n.V.

Z 143

OS 743 n.v.

W 7

7.30

533

Vorschule

der

praktischen Geometrie.

Bearbeitet

von

Dr. ph. Heinrich von Bünau,

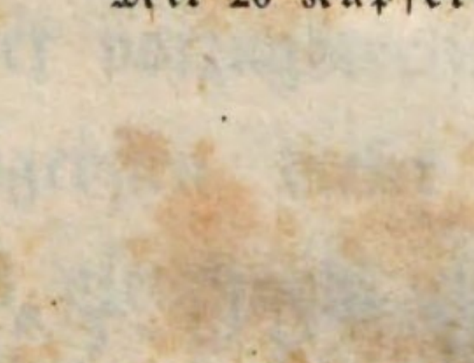
Lehrer der Mathematik an der Königlichen Gewerb- und Baugewerkenschule zu Chemnitz.

Mit 20 Kupfertafeln.

Leipzig,

Weidmann'sche Buchhandlung.

1847.



134 344 316

Staatl. Bibliothek Passau

Vorwort.

In der Reihe derjenigen Wissenschaften, deren Verbreitung Aufgabe der technischen Bildungsanstalten ist, verdient die praktische Geometrie einen der ersten Plätze, insofern kaum ein Zweig der Technik ihrer entbehren kann. Erscheint sie in diesem Sinne zwar nur im Range einer Hülfswissenschaft, und muß sie sich als solche des Eingehens auf eine bestimmte Richtung, d. h. einer vorzugsweisen Anwendung auf Bestimmungen von Raumgrößen dieser oder jener Gattung streng enthalten, so sind es gleichwohl einzelne hervorragende Größen dieser Art, bei welchen von ihr am häufigsten Gebrauch gemacht wird; namentlich bei der Ausmessung und graphischen Darstellung von Theilen der Erdoberfläche. Hier eröffnet sich der praktischen Geometrie ein so außerordentlich weites Feld der Anwendung, daß gewöhnlich unter praktischer Geometrie nur diejenige Wissenschaft verstanden wird, welche lehrt, wie

Theile der Erdoberfläche ausgemessen und graphisch dargestellt werden. Beschränkt man ihren Umfang dahin, dann tritt sie aus der Reihe der Hülfswissenschaften heraus und wird zum Fachstudium. Von letzterer Voraussetzung wurde bei Bearbeitung der vorliegenden, in zwei Abschnitte zerfallenden Schrift ausgegangen. Der erste umfaßt die niedere Feldmeßkunst; der zweite, mehr als ein Anhang zu betrachtende, die praktische Stereometrie. Jener zeigt die Aufnahme von Grundstücken geringer Umfänglichkeit und den Gebrauch der hierzu dienlichen Meßinstrumente, dieser beschränkt sich nur auf eine geringe Anzahl der gemeinsten Körperformen.

Das Buch ist bestimmt, als Leitfaden bei dem von mir zu ertheilenden Unterrichte in der praktischen Geometrie an hiesiger Gewerbschule zu dienen, bei dessen Ausarbeitung auf den Stand der Vorbildung der Schüler hauptsächlich Rücksicht zu nehmen war. Aus der dritten, d. i. der untersten Classe treten dieselben in die zweite Classe über, und in dieser findet jener Unterricht statt, bestehend in Vorträgen über praktische Geometrie und in Uebungen der Messungsoperationen auf dem Felde, welche letztere auch in der ersten Classe fortgesetzt werden. Arithmetik, Elementargeometrie, einschließlich der Stereometrie, nach Tellkampf's Vorschule der Mathematik, Projectionslehre und Physik bilden neben dem Sprachunterrichte und der Unterweisung im freien Handzeichnen den Lehrstoff der dritten Classe. Dieser wird in der zweiten weiter ausgeführt, und was die mathematische Fortbildung anlangt, so schließen hier der niederen Arithmetik die höhere und der Elementargeometrie die Trigonometrie sich zunächst an.

Daher durften in diesem Lehrbuche nicht gleich anfänglich trigonometrische Formeln angewendet werden, und wo es dennoch geschah, dem Unterrichte durch einstweilige Hinweglassung derselben keine wesentlichen Lücken bereitet werden. Im weiteren Verlaufe des Vortrages macht sich der Bedarf trigonometrischer Formeln fühlbarer, und es ist dann auch von denselben unbedenklich Gebrauch gemacht worden, weil inzwischen der Unterricht in der Trigonometrie deren Begründung dargethan hat. Ebenso berechtigte der vorangegangene Unterricht in der Physik, einige Lehren derselben, welche hauptsächlich in der praktischen Geometrie Anwendung finden, als bekannt vorauszusetzen.

Nahe lag die Frage, ob keins der schon vorhandenen Lehrbücher über praktische Geometrie ähnlichen Anforderungen entspricht und daher als Leitfaden zu wählen gewesen wäre, oder ob die an sich schon beträchtliche Anzahl derselben nothwendig noch um eins vermehrt werden mußte.

Bereits vor acht Jahren, seit welcher Zeit mir der Unterricht in der praktischen Geometrie an hiesiger Gewerbschule obliegt, drängte sich mir diese Frage auf, und es dürfte schon dieser Zeitraum dafür sprechen, daß ich es mit deren Beantwortung nicht gewissenlos genommen habe. Vielmehr versuchte ich, dem einen und anderen Lehrbuche nachzugehen, besonders dem vortrefflichen von Ulrich, überzeugte mich aber immer mehr, daß keines dieser Lehrbücher dem Bedürfniß genannter Lehranstalt entsprach. Es wird dieser Umstand keineswegs befremden, wenn man berücksichtigt, daß die meisten Gewerbschulen eine, kaum über zehn Jahre hinaus reichende Geschichte haben, noch im Emporblühen begriffen sind, und

daß daher bei denselben sowohl hinsichtlich der Unterrichtsmethode, als auch der Umfänglichkeit und Auswahl des zu behandelnden Lehrstoffes Erfahrungen zu erwerben sind.

Letztere nun waren es, die mich zur Veröffentlichung dieser Schrift bestimmten, deren Inhalt eine nachsichtige Beurtheilung nicht versagt werden möge.

Chemnitz, im August 1847.

H. v. Bünau.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erster Abschnitt.

Die niedere Feldmeßkunst.

Erstes Capitel.

Vom Abstecken und Messen gerader Linien 16

Zweites Capitel.

Operationen mit der Meßkette und dem Winkelkreuze.

Absteckung gerader Linien unter hinderlichen Umständen 48
Vom Construiren der Perpendikel 49
Vom Darstellen der Parallelen 51
Messung unzugänglicher Geraden 54
Graphische Darstellung und Inhaltsbestimmung verschiedenartig gestalteter Figuren 64

Drittes Capitel.

Von den Winkelmeßinstrumenten 77
Die Boussole 78
Operationen mit der Boussole 86
Der Meßtisch 97
Meßtischoperationen 109
Theilung der Figuren 147
Zusätze und Bemerkungen über einige der wichtigsten, bei Ausführung vorstehender Operationen und Rechnungen vorkommenden Fehler . 171
Der Horizontalkreis mit beweglichen Dioptern 183
Operationen mit dem Horizontalkreise 186
Vom Centriren der Winkel 195
Trigonometrisches Netz 199

Viertes Capitel.

Seite
Vom Abstecken der Figuren 211

Fünftes Capitel.

Die Verticalmessungen 231
Vom geometrischen Höhenmessen 234
Trigonometrische Höhenmessung 242
Vom Nivelliren 256
Barometrisches Höhenmessen 287

Zweiter Abschnitt.

Praktische Stereometrie.

Einleitung 300

Erstes Capitel.

Körper mit entwickelbaren Oberflächen.

Das Prisma und der Cylinder 305
Die Pyramide und der Kegel 310

Zweites Capitel.

Körper mit Umdrehungsoberflächen 315

Drittes Capitel.

Unregelmäßige Körper 321

Einleitung.

§. 1.

Besteht das Wesen der reinen Geometrie darin, Gesetze zu entwickeln, durch welche Größe und Gestalt des abstracten, d. h. von aller Bedeutung frei gedachten Raumes bestimmt werden, so ist es für die praktische Geometrie bezeichnend, die dort erworbenen Wahrheiten als unantastbar vorauszusetzen, und vermittelst derselben auf Bestimmungen des concreten Raumes auszugehen. Pflegt nun öfters schon die reine Geometrie dem zu bestimmenden, d. h. zu messenden Raume irgend eine Bedeutung unterzulegen, so geschieht dies gleichwohl nur im Interesse des Anfängers, Behufs der besseren Fixirung der Begriffe, welche um so eindringlicher und bleibender sein werden, je mehr an entsprechenden Beispielen die Nützlichkeit der vorgetragenen Lehren gezeigt wird. Derartiges Einstreuen von Nutzanwendungen zwischen die Lehren der reinen Wissenschaft nahm mit dem Erkennen ihres Werthes in den Künsten und Gewerben dergestalt überhand, daß eine strengere Sonderung der Theorie und Praxis wünschenswerth erschien, und hierdurch Schriften hervorgerufen wurden, welche die Aufzählung von geometrischen Uebungsbeispielen zum ausschließlichen Zweck hatten. Je systematischer dabei eine bestimmte Richtung oder mehrere Richtungen zugleich verfolgt wurden, z. B. die Anwendung der geometrischen Sätze auf die Inhaltsbestimmung solcher Räumlichkeiten, wie sie im Baufache oder irgend einem Gewerbszweige vorzukommen pflegen, desto näher kam man derjenigen Wissenschaft, welche durch die Benennung praktische Geometrie bezeichnet worden ist. Ihre vollständige Ausbildung fand sie in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts durch Tobias Mayer, dessen bereits in vierter Auflage erschienenem Werke unter dem Titel „gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1777" das rege Interesse der Mathema-

tiker für diese Wissenschaft hauptsächlich zuzuschreiben ist, denen es bis auf den heutigen Tag nur zum geringsten Theil möglich war, Gediegneres hervorzubringen.

Es ist, an die wörtliche Bedeutung der praktischen Geometrie sich haltend, in neuerer Zeit nur diejenige Wissenschaft darunter verstanden worden, welche die Ausmessung der Erdoberfläche zum Gegenstand hat, und wofür die Benennung Feldmeßkunst (Geodaesia) entstand, insofern es sich nur um die Bestimmung kleiner Theile der Erdoberfläche handelte. Daß aber letztere nicht als eine einzelne Wissenschaft, sondern nur als ein Bestandtheil der praktischen Geometrie anzusehen sei, leuchtet wohl von selbst ein. Faßt man nun die reine Geometrie in ihrer gewöhnlichen Bedeutung als Lehre von den abstracten Raumgrößen überhaupt auf, so folgt, daß die angewandte oder praktische Geometrie alle nur denkbaren Räume auszumessen lehren, sich keineswegs auf einzelne Classen von Raumgrößen beschränken werde; eine Auffassung, welche T. Mayer's oben angeführtes Werk charakterisirt, welcher jedoch an diesem Orte mit beträchtlicher Einschränkung nachgekommen werden wird, indem einem festgestellten Plane gemäß nur die Operationen der niederen Feldmeßkunst, so wie nur die Inhaltsbestimmungen der im gemeinen Leben hauptsächlich ihres Inhaltes wegen interessirenden Körper erörtert werden sollen, mit Ausschluß zugleich der Differential- und Integral-Rechnung.

§. 2.

In der zuletzt bezeichneten engeren Begrenzung der praktischen Geometrie, als niedere Feldmeßkunst, wird sie es vorerst mit der Bestimmung terrestrischer Räumlichkeiten von geringer, eine Quadratmeile kaum übersteigender Umfänglichkeit zu thun haben, und zeigen, wie solche ausgemessen, bildlich dargestellt und nach ihrem Inhalte berechnet werden; alsdann in einem zweiten Theile der praktischen Stereometrie dieselbe Folge der Betrachtungen auf die gebräuchlichsten Gegenstände des gemeinen Lebens ausdehnen. Hierbei wird es nicht hinreichen, zu begreifen, daß die Lehrsätze und Folgerungen der reinen Geometrie zur Lösung von Aufgaben der praktischen Geometrie überhaupt angewendet werden können, sondern als ein vorzüglicher Umstand erscheinen, welche Mittel, hauptsächlich welche Instrumente und Geräthschaften sie zur Erreichung ihrer Zwecke anwendet. Die allseitige Kenntniß der Meßinstrumente, die Fähigkeit, ihre Vorzüge und Mängel beurtheilen zu können, wird als ein erstes Erforderniß für den praktischen Geometer hervorgehen. Um aber den Leser

nicht durch eine ununterbrochene Aufzählung der Instrumente zu ermüden, so wird davon gewöhnlich nur dann die Rede sein, wenn es auf ihren Gebrauch ankommt.

§. 3.

Welche Meßoperationen auch zur Ausführung kommen sollen, immer erheischen sie die Zugrundlegung einer bestimmten Längeneinheit, d. i. einer geraden Linie von unveränderlicher Größe; daher diese zuvörderst beschäftigen möge.

Mit wenigen Worten würde dieser Gegenstand sich erledigen lassen, existirte in den verschiedenen Staaten, oder mindestens in den Provinzen des nämlichen Staates, zur Bestimmung der Räumlichkeiten einerlei Art eine und dieselbe Grundeinheit. Leider ist dem jedoch nicht so,*) ungeachtet es von Seiten mehrerer Landesbehörden an Bestrebungen, einen solchen Zustand herbeizuführen, nicht gemangelt hat und noch immer die sorgfältigsten Erwägungen hierüber obschweben. Sollte dereinst ein gemeinschaftliches Längenmaß für alle, oder doch die Mehrzahl der unter sich verkehrenden Staaten zur Wirklichkeit werden, dann dürfte die Aufzählung ihrer gegenwärtigen Maße nur als eine historische Merkwürdigkeit erscheinen, während zur Zeit die Nothwendigkeit sie gebietet.

Im grauesten Alterthume schon finden sich Längenbestimmungen vor, wobei die Grundeinheit einem von der Natur selbst dargebotenen Gegenstande entlehnt wurde, nämlich dem Fuße eines erwachsenen Mannes. Konnte dieses, von zu vielerlei Umständen abhängige und darum schwankende Grundmaß sich auf die Dauer auch nicht erhalten, so ist dennoch die Benennung desselben, nämlich der Fuß, auf die nunmehr in den meisten Ländern üblichen Einheiten übergetragen worden. In den Hauptstädten derselben sind Stäbe aus gewissen der Zerstörung oder sonstigen Veränderung minder unterworfenen Stoffen, gewöhnlich aus Eisen, seltener aus Platin, deponirt und von denselben als den Repräsentanten oder Originalen eines Fußes, einer Elle u. s. w., auch mehrerer derselben, durch Uebertragung die im gewöhnlichen

*) Aus den Mittheilungen über die Verhandlungen des sächsischen Landtages II. Kammer 1845 No. 12—14 geht hervor, daß es in Sachsen 80 verschiedene Scheffelgrößen giebt, und daß selbst die legalen Dresdener Scheffel bis zu 148 Cubikzoll variiren. 12 Procent beträgt die Schwankung der bei den Obrigkeiten als legal vorgefundenen Kannen, und wenn von der auffallend großen Adorfer Elle abgesehen wird, ½ Zoll die Differenz zwischen der kleinsten und größten sächsischen Elle.

Verkehr vorkommenden Maßstäbe entlehnt worden. Zu umständlich und selbst unausführbar würde es jedoch sein, wollte man alle Maßstäbe mit dem Urmaße vergleichen; vielmehr sind die in den Werkstätten und sonst vorhandenen nur Copieen von Copieen, deren endlicher Zusammenhang mit dem Urmaße schwerlich immer nachzuweisen sein würde. Daß nun bei derartigen Uebertragungen stets die größte Sorgfalt angewendet werden möchte, erscheint wohl wünschenswerth, ist jedoch in der Erfahrung unbegründet, wofür die Abweichungen sprechen, welche an Maßstäben derselben Stadt, zu geschweigen mehrerer Städte desselben Landes wahrgenommen werden. Was für Verwirrungen aber aus dem leicht denkbaren Verluste des Urmaßes hervorgehen, dies wird durch vielfältige Beispiele zur Genüge dargethan.

Es war daher und ist noch immer ein Gegenstand tiefen Nachdenkens ausgezeichneter Mathematiker, eine von der Natur selbst gebotene unveränderliche Längeneinheit zu entdecken. Von Bedeutung mußte nun die Idee erscheinen, welche zu Ende des vorigen Jahrhunderts ihre Verwirklichung fand, nämlich eine Dimension unserer Erde selbst der fraglichen Einheit zum Grunde zu legen. Unter Leitung der berühmten französischen Mathematiker Delambre und Méchain wurde eine Gradmessung von Dünkirchen bis Barcelona ausgeführt, aus dem gewonnenen Resultate mit Hinzuziehung astronomischer Beobachtungen und unter der wahrscheinlichsten Voraussetzung über die Erdabplattung die Bogenlänge eines Erdmeridianquadranten in Toisen*) bestimmt, hierauf der zehnmillionste Theil desselben für die neu zu schaffende Längeneinheit definitiv angenommen, und ihr die Benennung Mètre beigelegt. Damit aber in der Folge keine Irrung hinsichtlich der nach dem gefundenen Grundmaße anzufertigenden Maßstäbe oder Etalons entstehen könne, war überdies das Meter auf ein Platinalineal aufgetragen worden, und enthält 443,295936 Linien der eisernen Toise von Peru (eines bei jener Gradmessung benutzten Maßstabes), wenn sich das Meter unter einer Temperatur von 0 Grad, und die Toise unter einer Temperatur von 13° R. befindet, überdies die Toise in 864 Linien eingetheilt wird. Die Ausdehnung des Platins und anderer zu Maßstäben geeigneten Stoffe für jeden einzelnen Grad irgend einer Temperaturscala haben sorgfältige physikalische Untersuchungen kennen gelehrt, daher künftig und so lange keine Verlegenheit wegen Erlangung genauer metrischer Maßstäbe entstehen wird, als das Grund-

*) Auf eine Toise kommen sechs alte Pariser Fuß, welcher letztere in 144 Linien eingetheilt wird.

maß noch existirt oder nur eins von den weitverbreiteten treuen Etalons. Ob aber, ginge dasselbe verloren, durch Wiederholung jener Gradmessung die nämliche Länge wieder erhalten werden würde, dies ist eine Frage, welche aus mehreren sehr erheblichen, jedoch hier nicht darzulegenden Gründen von den competentesten Autoritäten unserer Zeit verneinend beantwortet wird.*) Es haben daher andere Vorschläge Berücksichtigung gefunden, darunter vorzüglich nennenswerth erscheinen: die Länge des Secundenpendels für einen Ort genau zu bestimmen und solche als Einheit für einen zulässigen Umkreis gelten zu lassen, oder in einem Lande zwei unverletzbare Punkte auszuwählen, ihre Entfernung zu ermitteln und davon einen entsprechenden Theil als Normalmaß zu nehmen. Desfallsige Ergebnisse jedoch, auf deren Grund Maßregulirungen stattgefunden hätten, liegen keineswegs vor, und so blieb als das einzige Auskunftsmittel nur eine Vergleichung der Normalmaße verschiedener Staaten mit dem Mètre définitif übrig.

§. 4.

Die folgende, den zuverlässigsten Quellen entlehnte Uebersicht zeigt, wie sehr in verschiedenen Ländern einerlei benanntes Maß, nämlich der Fuß, von einander abweicht.

Staat.	Welcher Theil eines Meters der übliche Fuß ist.
Frankreich, Pariser . .	0,3248394
England, Rußland . .	0,3047945
Preußen, Dänemark . .	0,3138535
Baiern	0,2918592
Hannover	0,2920947
Sachsen	0,2831901
Braunschweig	0,2853624
Kurhessen, Kasseler . .	0,2876991
Würtemberg	0,2864903
Baden, Schweiz . . .	0,3000000
Oestreich, Wiener . . .	0,3161109

Gewöhnlich werden zwei Fuß zu einer Elle zusammengefaßt, oder noch mehrere zu anders benannten Längen, wie z. B. in Sachsen

---

*) Die Länge eines Meridianquadranten war zu 5130740 Toises de Pérou bei 13° R. gefunden worden. In neuerer Zeit ist durch Puissant und weiter durch Bessel (Astronomische Nachrichten No. 438) nachgewiesen worden, daß in Folge gewisser, bei den Berechnungen obiger Grundlage der Metergröße untergelaufener

15⅛ Fuß eine Ruthe, 6 Fuß eine Klafter u. s. w. geben; auch Theile des Fußes finden ihre Anwendung, z. B. der zwölfte Theil desselben, Zoll genannt, welcher in zwölf Linien und diese neuerdings in zwölf Punkte zerfällt. Diese Maße wählt man dann als Seiten- und Kantenlängen für Quadrate oder Würfel, wenn es sich um Grundeinheiten für Flächen- und Körperinhalte handelt, und fügt überdies den Benennungen für die Längeneinheit die Worte Quadrat oder Cubik bei, wodurch die Zusammensetzungen Quadratfuß, Cubikfuß, Quadratzoll, Cubikzoll u. s. w. entstehen. Endlich ist es ferner üblich, eine gewisse Anzahl Flächen- oder Volümeneinheiten z. B. 150 Quadratruthen zu einer neuen höheren Flächeneinheit, dem Scheffel, zwei derselben wiederum zu einem Acker zu vereinigen. Vergleichende Uebersichten üblicher Maße kommen in verschiedenen Schriften vor, am vollständigsten erscheinen die Tafeln zur Vergleichung der gebräuchlichsten Maße und Gewichte, welche in Dr. Hülße's Ausgabe der größeren Logarithmentafeln von Vega S. 620—634 enthalten sind; aus welcher obige Tabelle entlehnt worden ist.

§. 5.

Unter allen Eintheilungen und Vervielfältigungen, denen bis jetzt Urmaße unterworfen worden sind, verdienen diejenigen, welche das Meter betreffen, den Vorzug, da sie sich dem gewöhnlichen dekadischen Zahlensysteme anschließen, dessen leichte Handhabung auch auf die metrisch ausgedrückten Raumgrößen übergeht. Das Meter liegt dem seit dem Jahre 1795 eingeführten neuen französischen oder metrischen Maßsystem zum Grunde, dessen Anordnung hier folgen mag.

Die Grundeinheit des Längenmaßes heißt Mètre (Meter).
= = = Flächenmaßes = Are = 100 Quadratmet.
= = = Körpermaßes = Stère oder Mètre cube.
= = = Hohlmaßes = Litre (Liter) = 0,001 Cubikmeter.
= = der Gewichte = Gramme (Gramm).

Aus den Benennungen für die Grundeinheiten werden dann die-

Rechnungsfehler die wahre Länge des vorausgesetzten Erdmeridianquadranten eigentlich zu 5131179,81 Toises de Pérou oder zu 10000855,76 jetzige Meter angenommen werden müsse (bei einer mittleren Fehlermöglichkeit von ± 498,23 Meter), daß folglich das Meter, als zehnmillionster Theil davon, eigentlich im wahrscheinlichen Mittel um 0,000085576 seiner jetzigen Länge oder um 0,085576 Millimeter größer hätte angenommen werden sollen als es ist.

jenigen ihrer Theile oder Vervielfältigungen dergestalt gebildet, daß man bei jenen die französischen Sylben deci, centi, milli, bei diesen die griechischen deca, hecto, kilo, myria voransetzt. Folgende der dadurch abgeleiteten Einheiten sind wirklich im Gebrauch:

Décamètre = 10 Mètres, Hectomètre = 100 Mètres, Kilomètre (Wegmaß, Mille) = 1000 Mètres, Myriamètre (Meile, Lieue) = 10000 Mètres.

Décimètre = 0,1 Mètre, Centimètre = 0,01 Mètre, Millimètre = 0,001 Mètre.

Hectare = 100 Ares, Myriare = 10000 Ares (Feldmaße).

Centiare = 0,01 Are.

Décistère = 0,1 Stère.

Décalitre = 10 Litres, Hectolitre = 100 Litres, Kilolitre = 1000 Litres = 1 Mètre cube, Myrialitre = 10000 Litres.

Décilitre = 0,1 Litre, Centilitre = 0,01 Litre, Millilitre = 0,001 Litre.

Décagramme = 10 Grammes, Hectogramme = 100 Grammes, Kilogramme = 1000 Grammes.

Décigramme = 0,1 Gramme, Centigramme = 0,01 Gramme, Milligramme = 0,001 Gramme.

Ein Gramm ist das Gewicht eines Cubikcentimeters chemisch reinen Wassers vom Maximum der Dichte; letzteres beträgt 1,00010824 und findet statt bei 4,11° C.

Auf das metrische Maßsystem gründen sich nun noch andere im bürgerlichen Verkehr seit 1812 in Frankreich gesetzlich gestattete Maße, deren Aufzählung an diesem Orte zu weit führen würde.

§. 6.

Laut der oben §. 3 citirten Landtagsverhandlungen war Sachsen nahe daran, durch Einführung eines neuen Maßsystems, welchem die Annahme, daß ein neuer sächsischer Fuß 0,3 Meter betragen sollte, zum Grunde lag, die vorhandenen Maßdifferenzen ausgeglichen zu sehen. Der betreffende Gesetzentwurf ist zwar zur Zeit nicht realisirt worden, inzwischen gewährten die bezüglichen Erläuterungen interessante Aufschlüsse über die bestehenden Maßgrößen, deren Aufzählung hier am geeigneten Orte sein dürfte. Nach den durchschnittlichen Werthen einer großen Anzahl zuverlässiger Bestimmungen über die zeitherigen sächsischen Maße haben sich folgende Maßvergleichungen ergeben:

1) 60 zeitherige Leipziger Fuß oder 30 Dresdner Ellen sind = 17 Metern.

2) 18 zeitherige Leipziger Fuß und Dresdner Ellen sind = 17 neusächsischen Fußen und Ellen.
3) Ein bisheriger Leipziger Fuß ist = $\frac{17}{60}$ oder 0,283333 Meter = $2\frac{5}{6}$ Decimeter, oder = $\frac{17}{18}$ oder 0,944444 Fuß, oder $11\frac{1}{3}$ Zoll des neuen Maßes.
4) Eine bisherige Elle ist = $\frac{17}{30}$ oder 0,566666 Meter = $5\frac{2}{3}$ Decimeter = $\frac{17}{18}$ oder 0,944444 Elle oder $22\frac{2}{3}$ Zoll des neuen Maßes.
5) Ein Meter ist = 3,529412 oder $3\frac{9}{17}$ zeitherige Leipziger Fuß, oder 1,764706 oder $1\frac{13}{17}$ zeitherigen Ellen.
6) Ein neuer Fuß oder eine neue Elle sind = $1\frac{1}{17}$ oder 1,058823 bisherige.
7) Eine neue Ruthe ist = $10\frac{10}{17}$ oder 10,58823 bisherige Fuß, oder = $5\frac{5}{17}$ oder 5,29412 bisherige Ellen, oder = $\frac{1080}{1547}$ oder 0,698124 bisherige Feldmesserruthe, oder = $\frac{45}{68}$ oder 0,661765 zeitherige Straßenruthe.
8) Eine zeitherige Feldmesserruthe zu 7 Ellen 14 Zoll oder $15\frac{1}{6}$ Leipziger Fuß ist = $14\frac{35}{108}$ oder 14,32407407 neusächsischen Fußen, oder = $1\frac{467}{1080}$ oder = 1,4324074 neusächsische Ruthe.
9) Eine zeitherige Straßenruthe zu 8 Dresdner Ellen ist = $15\frac{1}{9}$ neusächsischen Fußen oder = $1\frac{23}{45}$ oder 1,511111 neusächsische Ruthe.
10) Eine neue sächsische Meile ist = 26470,588 Fuß oder 13235,294 Ellen oder 1654,4117 Straßenruthen des bisherigen Maßes oder 0,827259 ehemalige sächsische Polizeimeile.
11) Eine frühere sächsische Polizeimeile (Post-, Biermeile) zu 16000 Dresdner Ellen oder 2000 Straßenruthen ist = 15111,111 neusächsischen Ellen oder = 9066,666 Metern oder = 3022,222 neusächsischen Ruthen oder = 1,208888 neusächsische Meile.
12) Die neue Weiflänge der Garne verhält sich zu der zeitherigen bei gleichem nominellen Weifmaß, wie die neusächsische Elle zur älteren Elle selbst, d. i. wie 18 zu 17.
13) 324 zeitherige Quadratfuß oder Quadratellen = 289 neusächsischen.
14) Ein zeitheriger Quadratfuß ist = $\frac{289}{324}$ oder 0,891975 neusächsischen Quadratfuß, oder = $\frac{289}{3600}$ oder = 0,8027775 Quadratmeter, oder = $\frac{289}{32400}$ oder 0,00891975 neusächsische Quadratruthe.
15) Eine zeitherige Quadratelle ist = $\frac{289}{324}$ oder 0,891975 neusächsische Quadratelle oder = $\frac{289}{900}$ oder 0,321111 Quadratmeter oder = $\frac{289}{8100}$ oder 0,035678 neusächsische Quadratruthe.
16) Eine zeitherige Quadratruthe (à 7 Ellen 14 Zoll) ist = 205,17909

nensächsischen Quadratfuß oder 18,466118 Quadratmeter oder 2,0517909 neusächsischen Quadratruthen.

17) Ein neuer Quadratfuß (oder 0,09 Quadratmeter) ist = $1\frac{35}{289}$ oder 1,121107 bisherigen.

18) Ein Quadratmeter (oder $11\frac{1}{9}$ neusächsische Quadratfuß oder $2\frac{7}{9}$ neusächsische Quadratellen) ist = $12\frac{132}{289}$ oder 12,456744 bisherigen Quadratfuß oder = $3\frac{33}{289}$ oder 3,114186 bisherigen Quadratellen.

19) Eine neue Quadratruthe (oder 9 Quadratmeter oder 25 neue Quadratellen oder 100 neue Quadratfuß) ist = $112\frac{32}{289}$ oder 112,1107 bisherigen Quadratfußen, oder = $28\frac{8}{289}$ oder 28,02763 bisherigen Quadratellen, oder = 0,487379 bisherigen Quadratruthen à 7 Ellen 14 Zoll.

20) Ein bisheriger Acker von 300 Quadratruthen zu 7 Ellen 14 Zoll ist = 1,025895 oder nahe $1\frac{1}{39}$ neusächsischen Acker, oder = 615,5370 neuen Quadratruthen oder 5539,833 Quadratmetern, oder = 61553,7 neuen Quadratfußen.

21) Ein neuer Acker zu 600 Quadratruthen oder 5400 Quadratmetern oder 15000 neuen Quadratellen oder 60000 neuen Quadratfußen ist = 292,4274 bisherigen Quadratruthen zu 7 Ellen 14 Zoll oder 0,074758 oder fast $\frac{39}{40}$ bisherige Acker oder 16816,6062 bisherigen Quadratellen oder = 67266,425 bisherigen Quadratfußen.

22) 5832 bisherige Cubikfuß oder Cubikellen sind = 4913 neuen.

23) Ein zeitheriger Cubikfuß ist = $\frac{4913}{5832}$ oder 0,842421 neue sächsische Cubikfuß, oder = $\frac{4913}{216000}$ oder 0,0227454 Cubikmeter.

24) Eine zeitherige Cubikelle = $\frac{4913}{5832}$ oder 0,842421 neue sächsische Cubikelle oder = $\frac{4913}{27000}$ oder 0,1819629 Cubikmeter.

25) Ein neusächsischer Cubikfuß oder eine dergleichen Cubikelle oder ein dergleichen Cubikzoll ist = $1\frac{919}{4913}$ oder 1,187054 bisherigen.

26) Ein Cubikmeter oder $4\frac{17}{27}$ Cubikellen oder $37\frac{1}{27}$ neue Cubikfuß ist = 5,4956204 bisherigen Cubikellen oder = 43,964963 bisherigen Cubikfuß.

27) Eine Holzklafter nach bisherigem Klaftermaß ist = $1\frac{53}{4860}$ oder 1,010906 neue Klafter, wenn die Scheitlänge so viel Fuß oder Viertelellen nach dem neuen Maß beträgt, als die zu vergleichende alte Klafter nach dem bisherigen Maße enthielt.

Eine alte $\frac{6}{4}$ellige Klafter ist daher = 90,98154
" " $\frac{7}{4}$ " " " = 106,14513
" " $\frac{8}{4}$ " " " = 121,30872
neusächsischen Cubikfußen.

28) Eine neue Klafter enthält unter gleicher Voraussetzung $\frac{4868}{4913}$ oder 0,98921 bisherige. Eine neue $\frac{6}{7}$ ellige Klafter (= 90 neue Cubikfuß) ist daher = 106,83486 zeitherigen Leipziger Cubikfußen; eine neue $\frac{7}{7}$ ellige Klafter (= 105 neue Cubikfuß) ist = 124,64067 dergl.; eine neue $\frac{8}{7}$ ellige Klafter (= 120 neue Cubikfuß) ist = 142,44648 dergl.

29) 21 bisherige Dresdner Kannen sind = 20 Litern oder neuen Kannen, daher eine alte Dresdner Kanne = $\frac{20}{21}$ Liter.

30) 1 Liter oder neue sächsische Kanne = $1\frac{1}{20}$ bisherige Dresdner Kanne oder = 75,971456 bisherigen Cubikzollen.

31) Eine bisherige Tonne beim Bier zu 105 Dresdner Kannen ist genau gleich einem Hektoliter oder einer neuen Tonne.

32) Die Größe des Fasses bleibt daher auch ganz genau gleich der Größe des bisher beim Bier gewöhnlich gewesenen Fasses, indem dessen 420 bisherige Dresdner Kannen gleich sind 400 Litern.

33) Ein bisheriger Eimer von 72 Kannen beim Wein, Branntwein, Essig u. s. w. ist = 68,571428 oder reichlich 68½ Litern.

34) Das bisher beim Weine gebräuchlich gewesene Faß zu 432 Dresdner Kannen würde 411,428571 Liter ausmachen, also um 12 ältere Dresdner oder 11,428571 neue sächsische Kannen größer sein, als das jetzt gestattete Faß.

35) Der bisher für das Land gesetzlich gewesene Dresdner Scheffel ist = 104 Litern oder $1\frac{1}{25}$ Hektoliter oder 6656 neusächsischen oder = 7901,0314 frühern Leipziger Cubikzollen anzunehmen; 25 bisherige Dresdner Scheffel sind = 26 Hektolitern oder neuen sächsischen Scheffeln.

36) Ein Hektoliter ist = 4,391976 zeitherigen Leipziger Cubikfuß oder = $\frac{25}{26}$ bisherige Dresdner Scheffel oder = 105 bisherigen Dresdner Kannen, oder nahe 7597$\frac{1}{7}$ zeitherigen Leipziger Cubikzollen.

Nur um Längen- und damit in Verbindung stehende Flächen-, Körper- und Hohlmaße handelte es sich hier, da in Sachsen wie in den Zollvereinsländern überhaupt die Gewichtseinheit bereits mit dem metrischen System in Relation gebracht, nämlich ein Pfund Zollgewicht = 0,5 Kilogramme gesetzt worden ist.

§. 7.

Wird bei einer der praktisch-geometrischen Operationen größte Genauigkeit bedungen, dann sind die im Vorangegangenen enthaltenen Maßangaben mit Vorsicht zu gebrauchen, und hauptsächlich darüber Erkundigungen einzuziehen, für welche Temperatur diese oder jene Ma

gelten sollen. Gewöhnlich findet dies für den Frostpunkt statt, doch geschehen auch andere Voraussetzungen. Diese Vorsicht ist in der Wahrnehmung begründet, daß verschiedene Stoffe für dieselbe Temperaturzunahme ungleiche Ausdehnungen zeigen. Dulong und Petit fanden, daß innerhalb des Frost- und Siedepunktes des Wassers die specifische Längenausdehnung für jeden Grad der Centesimalscala bei den nachverzeichneten Stoffen sich wie folgt gestaltete:

Gußeisen	0,000011100,
Schmiedeeisen . .	0,000012660,
Glasstab	0,000008116,
Glasröhre	0,000008757,
Gold	0,000014660,
Kupfer.	0,000017120,
Messing	0,000018000,
Platin.	0,000009918,
Zinn	0,000024830,
Zink.	0,000031080,
Queckstlber. . . .	0,000180182

der = 1 gesetzten ursprünglichen Länge.

Der Einfluß nun, welchen die specifische Ausdehnung auf die Ausdehnungen nach den drei Richtungen des Raumes ausübt, kann leicht nachgewiesen werden.

Es sei l die Länge eines Körpers bei 0° C, dann ist sie bei t°:

$$1)\ L = l\,(1+\lambda t);$$

in welcher Gleichung λ den auf die specifische Ausdehnung bezüglichen Coefficienten bedeutet. Auch erhält man für t,° die Länge L, zu:

$$2)\ L_{,} = l\,(1+\lambda t_{,});$$

folglich ist

$$\frac{L_{,}}{L} = \frac{l\,(1+\lambda t_{,})}{l\,(1+\lambda t)} = \frac{(1+\lambda t_{,})}{(1+\lambda t)} =$$

$$\frac{(1+\lambda t_{,})\ (1-\lambda t)}{(1+\lambda t)\ (1-\lambda t)} = \frac{1-\lambda t+\lambda t_{,}-\lambda^2 t_{,} t}{1-\lambda^2 t^2}.$$

Da nun λ gewöhnlich sehr klein ist, so kann man ohne merklichen Fehler setzen:

$$\frac{L_{,}}{L} = 1-\lambda t+\lambda t_{,} = 1+\lambda\,(t_{,}-t)$$

oder

$$(I)\ L_{,} = L\ [1+\lambda\,(t_{,}-t)].$$

Um die Flächenausdehnung zu berechnen, berücksichtige man, daß,

wenn F und F, die Inhalte ähnlicher Flächen vorstellen, aus geometrischen Gründen sein muß:

$$\frac{F,}{F} = \frac{L,^2}{L^2} = \left[1 + \lambda\,(t, - t)\right]^2 =$$

$1 + 2\,\lambda\,(t, - t) + \lambda^2\,(t, - t)^2$, oder weil λ^2 nahe $= 0$ ist:

$$\text{(II)}\quad F, = F\,[1 + 2\,\lambda\,(t, - t)].$$

Eben so ergiebt sich die cubische Ausdehnung, wenn nur der Satz angewendet wird, daß sich die Inhalte ähnlicher Körper V und V, wie die dritten Potenzen homologer Dimensionen verhalten, wodurch erhalten wird:

$$\frac{V,}{V} = \frac{L,^3}{L^3} = \left[1 + \lambda\,(t, - t)\right]^3 \text{ oder}$$

$$\frac{V,}{V} = 1 + 3\,\lambda\,(t, - t) + 3\,\lambda^2\,(t, - t)^2 + \lambda^3\,(t, - t)^3$$

d. i.

$$\text{(III)}\quad V, = V\,[1 + 3\,\lambda\,(t, - t)].$$

Setzt man $\lambda\,(t, - t) = m$, so folgt, daß, wenn durch eine gegebene Temperaturerhöhung die Länge 1 zu $1 + m$ wird, durch dieselbe die Fläche 1 zu $1 + 2\,m$, und das Volumen 1 zu $1 + 3\,m$ anwächst.

Beispiel 1. Bei 20° C ist mittelst eines geschmiedeten, eisernen, bei 10° C normalmäßig bestimmten Stabes die Länge einer Linie zu 100 Fuß gefunden worden. Man fragt, welches die eigentliche Länge der gemessenen Linie sei?

In der Gleichung (I) setze man $L = 100$, $\lambda = 0{,}00001266$, $t, = 20$ und $t = 10$, so ist die fragliche Länge, gemäß der Formel (I)

$$L, = 100\,[1 + 0{,}00001266\,(20 - 10)]$$
$$= 100\,[1 + 0{,}0001266] =$$
$$= 100\,.\,1{,}0001266 = 100{,}01266 \text{ Fuß},$$

der begangene Fehler folglich

$$= 0{,}01266 \text{ Fuß}.$$

Beispiel 2. Wären die gemessenen 100 Fuß die Seite eines Quadrates gewesen, dann würden 10000 Quadratfuß auf dessen Inhalt gekommen sein; der wirkliche Flächeninhalt würde aber nach Formel (II)

$$F, = 10000\,[1 + 2\,.\,0{,}00001266\,(20 - 10)]$$
$$= 10000\,(1 + 0{,}0002532)$$
$$= 10002{,}532 \text{ Quadratfuß},$$

demnach 2,532 Quadratfuß mehr betragen.

Beispiel 3. Werden diese 100 Fuß als Kantenlänge eines Würfels angesehen, dann beträgt dessen Inhalt 1000000 Cubikfuß, welcher aber in der That nach Formel (III)

$$V_t = 1000000\,[1 + 3\,.\,0{,}00001266\,(20 - 10)]$$
$$= 1000000\,(1 + 0{,}0003798)$$
$$= 1000000\,.\,1{,}0003798$$
$$= 1000379{,}8 \text{ Cubikfuß},$$

mithin 379,8 Cubikfuß größer sein würde.

Beispiel 4. Wie lang muß bei 5° C. ein Messingstab gemacht werden, damit solcher bei 25° C. die normale Meterlänge angiebt?

Nach Formel (I) hat man hier sofort:

$$1 = L\,[1 + 0{,}000018\,(25 - 5)]$$
$$= L\,(1 + 0{,}00036)$$
$$= L\,.\,1{,}00036, \text{ demnach die geforderte Länge}$$

$$L = \frac{1}{1{,}00036} = \frac{100000}{100036}$$
$$= 0{,}999642 \text{ Meter.}$$

Auf eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes müssen wir hier verzichten. Man sehe außer a. a. O. Eytelwein's Handbuch der Hydrostatik S. 115 u. f.

§. 8.

Um die Grenze der niederen und höheren Feldmeßkunst genauer zu bestimmen, wird es nöthig sein, unsere Erde selbst so wie einige wenige Linien und Ebenen, welche in Bezug auf dieselbe gedacht werden können, etwas näher ins Auge zu fassen. Zu diesem Behuf mögen A, B und C Fig. 1 Punkte auf der Erde sein, und zwar in der Durchschnittslinie einer durch den Erdmittelpunkt M geführten Ebene mit der Erdoberfläche liegend, d. h. in einem größten Kreise derselben, wenn von der Abplattung und den zufälligen Unebenheiten der Erde abgesehen, diese sonach völlig sphärisch vorausgesetzt wird. Werden nun durch jene drei Punkte oder überhaupt durch was immer für Punkte der Erdoberfläche Radien gedacht, so zeigen dieselben die Richtungen der Schwere, d. i. der Erdanziehung für die betreffenden Punkte der Erde an, und es gelten dafür die gleichbedeutenden Benennungen verticale, senkrechte oder lothrechte Richtung. Aeußerlich wird diese Richtung durch die Spur eines frei fallenden Körpers oder durch einen von diesem gespannten Faden — Loth oder Senkel genannt — angezeigt. Irgend eine Ebene durch die verticale Linie geführt

heißt verticale Ebene oder schlechthin Verticalebene, auch loth- oder senkrechte Ebene, und sie muß die Erde stets in einem größten Kreise schneiden.

Wird angenommen, AB sei ein beträchtlicher Theil vom größten Kreise ABCF, dann folgt hieraus, daß der Winkel der beiden Verticalen DM und EM der Bogenendpunkte A und B eben so beträchtlich sein werde, im Verhältniß zu den um M in der Schnittebene möglichen vier rechten Winkeln, und daß das Gegentheil sich ergiebt, sobald AB kleiner gewählt wurde, vielleicht bis zur Bogenlänge AC abnahm. Setzen wir, der Bogen habe eine Meile zur Länge, so wird der Winkel der Verticalen DM und GM circa 4 Minuten betragen. Für noch kleinere Bogenlängen folgt dann ein noch kleinerer Winkel der Verticalen, und es kann dahin kommen, daß Stücke der Schenkel von der Erdoberfläche an gerechnet, wie AD und CG, parallelen Linien gleich erachtet werden können. Nicht selten werden alle Verticalen innerhalb einer, ja selbst mehrerer Quadratmeilen für parallel angesehen; es richtet sich dies nach dem beabsichtigten Genauigkeitsgrade geodätischer Operationen. Letztere werden Gegenstand der niederen Feldmeßkunst sein, so lange die Annahme des Parallelismus der Verticalen an der Erdoberfläche gestattet ist, darüber hinaus gehören sie der höheren Geodäsie an.

§. 9.

Während nun bei höheren geodätischen Operationen die wirkliche Länge des Bogens AC sorgfältig zu ermitteln sein würde, verwechselt die niedere Geodäsie ihn mit seiner Sehne. Letztere geht in ihren Annahmen so weit, die Ebene dreier oder mehrerer vom Erdmittelpunkte gleichweit entfernter Punkte für normal zu den Verticalen derselben zu erklären. Nach dieser Voraussetzung fallen mit der bezeichneten Ebene die Berührungsebenen aller in dem so beschränkten Umkreise liegenden Punkte zusammen; sie bilden eine einzige, im Durchschnitt durch die Linie MN dargestellte Ebene, die wasserwägige, horizontale, auch wagrechte Ebene aller dieser Punkte, verwirklicht in der nicht allzugroßen Oberfläche einer ruhigen Flüssigkeit.

Linien in dieser Ebene sind horizontal oder wasserwägig, mögen sie nun sonst als gerade oder gekrümmt vorausgesetzt werden; und zugleich die normalen Projectionen oder Bilder von Figurengrenzen, welche auf der unebenen Erdoberfläche selbst angetroffen werden. Denkt man sich nämlich eine horizontale Ebene, auf dieselbe von allen merkwürdigen Punkten des darzustellenden Stückes der Erdoberfläche Per-

pendikel oder Verticallinien gefällt, und die Fußpunkte derselben oder ihre Durchschnitte mit dieser Ebene gehörig verbunden, dann kommt in dieser Ebene eine Projection oder ein Bild der Gegend zu Stande, deren Darstellung im verjüngten Maßstabe, der Plan oder Grundriß, hauptsächlicher Gegenstand der niederen Feldmeßkunst ist. Werden noch überdies die Größen jener Perpendikel selbst bestimmt, giebt man also die gegenseitige Lage der Punkte einer Gegend in verticaler Richtung an, d. h. ermittelt ihre Höhen und Tiefen, so reichen beide Angaben in der Regel hin, alle die Räumlichkeiten einer Gegend betreffenden Fragen zu beantworten. Es werden hiernach alle Operationen der niederen Feldmeßkunst in Horizontal- und in Verticalmessungen zerfallen.

Inzwischen auch die höhere Feldmeßkunst läßt dieselbe Eintheilung ihrer Schritte zu. Hier wird ein Punkt der Erde nicht als solcher allein betrachtet, sondern daß er der Oberfläche einer Kugel angehöre, welche seine Entfernung vom Erdmittelpunkte zum Halbmesser hat. Diese Oberfläche heißt dann der Horizont des gedachten Punktes, und zwar der wahre Horizont, zum Unterschiede vom scheinbaren, worunter nur die Berührungsebene der Kugeloberfläche für den gewählten Punkt verstanden wird; also jene Ebene, welche vorhin in der niedern Feldmeßkunst als Grundlage der bildlichen Darstellung kleiner Gegenden bezeichnet wurde. Sind Punkte der Erde vom Erdmittelpunkt ungleich weit entfernt, so kommen denselben verschiedene Horizonte zu. Handelt es sich um die Bestimmung dieser Punkte, dann wird der Horizont eines Punktes gewählt und jeder der übrigen Punkte auf denselben bezogen, dergestalt, daß die Durchschnitte der Verticalen jener Punkte mit dem Fundamentalhorizonte gefunden werden. Die gegenseitige Lage dieser Punkte wird hierauf durch Messung der zwischen denselben enthaltenen Bogen größter Kreise oder auch auf andere Art ermittelt. Mit dieser Untersuchung ist die zweite, nämlich die Bestimmung der Entfernungen der betrachteten Punkte von dem Erdmittelpunkte auf das Engste verbunden. Hieraus folgt dann die gegenseitige Lage der Punkte in Bezug auf verticale Richtungen d. h. die Höhen und Tiefen derselben; und es ist nun wohl nicht zu verkennen, daß, wie behauptet worden, auch die Operationen der höheren Feldmeßkunst in zwei Classen, nämlich in die Horizontal- und Verticalmessungen, zerfallen.

Erster Abschnitt.

Die niedere Feldmeßkunst.

Erstes Capitel.

Vom Abstecken und Messen gerader Linien.

§. 10.

Zunächst soll nur vom Abstecken gerader Linien unter Gebrauch der einfachsten Instrumente d. i. bloßer Absteckstäbe und Schnüre die Rede sein. Welcher Mittel man sich auch bedienen mag, stets wird die Forderung eine zweifache sein können, insofern es darauf ankommt, entweder zwischen, oder außerhalb zweier gegebenen Punkte andere Punkte zu finden, welche mit jenen in einerlei Verticalebene fallen.

Anlangend die erste Forderung, so kann derselben, wenn die gegebenen Punkte nicht zu weit von einander entfernt sind, durch bloßes Ausspannen einer Schnur zwischen beiden Punkten entsprochen werden, welches Verfahren der Erläuterung nicht erst bedarf. Für größere Entfernungen hingegen mögen die zwei Punkte durch lothrecht errichtete Stäbe A und B Fig. 2 bezeichnet sein, deren lothrechter Stand unter Anwendung eines Lothes oder Senkels G leicht geprüft werden kann. Das Auge H des Beobachters werde möglichst weit hinter den Stab A gebracht — etwa 20 Schritte — und nun ein Gehülfe genöthigt, einen dritten Stab C, später einen vierten D u. s. w. dergestalt auszustecken, daß diese Stäbe das Wahrnehmen des Stabes B hindern, oder — was gleichbedeutend ist — bis sämmtliche Stäbe einander decken.

§. 11.

Vermag der Beobachter nicht hinter einen der Stäbe A oder B zu gelangen, dann ist mit Hinzuziehung eines Gehülfen das Einbringen mehrerer Stäbe in die Richtung der Geraden AB Fig. 3 folgendermaßen zu bewerkstelligen. Der Stab C wird beliebig, jedoch in nicht allzugroße Entfernung von AB ausgesteckt, hierauf der Stab D in der Richtung CA. Der Beobachter bei D richtet nunmehr — dies ist der technische Ausdruck dafür — den Stab des C in DB ein, so daß solcher nach C′ gelangt. C′ richtet dann den Stab D nach A hin ein, wodurch derselbe in D′ seinen Platz findet; und so wird das gegenseitige Einrichten beider Beobachter fortgesetzt, bis ein jeder den Stab des anderen in der Richtung von AB vorfindet.

Geübte Arbeiter vollziehen diese Operation nicht in solchen Intervallen, sondern sie bewegen sich gleichzeitig und continuirlich mit ihren Stäben vorwärts nach der Linie AB hin, und halten in dem Augenblicke inne, wo sämmtliche vier Stäbe einander decken. Allenfalls nöthige Correcturen werden zuletzt nicht minder rasch vollzogen.

§. 12.

An Abhängen oder quer über Thäler oder Bergrücken hinweg erfolgt das Linienabstecken auf ähnliche Art wie vorhin. Dabei erheischt das Verfahren um so größere Sorgfalt, als es nur selten ausführbar ist, von einem einzigen Standpunkte aus sämmtlichen Stäben ihren gehörigen Platz anzuweisen. Hinter A Fig. 4 erscheint nur der nahe zu errichtende Stab C im Gesichtswinkel des Stabes B d. h. zwischen den Sehestrahlen HE und HB. Der Stab D fällt entweder nicht oder nur mit einem zur sicheren Aufstellung unzureichenden Theile seiner Länge in den Winkel EHB hinein; daher der Beobachter hinter den Stab C sich begeben wird, woraus hervorgeht, wie genau der Stab C eingesetzt sein muß, damit von ihm aus das Einrichten des Stabes D ohne Irrung erfolgen könne. Aehnlich kann es sich ereignen mit dem Stabe F Fig. 5 und mit noch anderen auszusteckenden Stäben. Daß vom Stabe B aus rückwärts nach A zu der Stand der Stäbe Behufs der Prüfung ihrer Richtigkeit zu beobachten sein wird, leuchtet für sich ein. Vermittelst eines Gehülfen kann die Absteckung wesentlich erleichtert werden; auch unterliegt dann das Abstecken einer Linie quer über ein Thal hinweg keinerlei Schwierigkeit bei sonst freiem Terrain. Sind dann A und B wiederum die Endpunkte der Linie, so wird zuerst der Stab C vom ersten Standort hinter A aus eingerichtet,

vielleicht auch D. C oder D dienen dann wie vorhin zur Aussteckung neuer Stäbe E, F.... Zuverlässiger und rascher erfolgt das Abstecken unter Mitwirkung eines zweiten Gehülfen, dessen Stab K schon von A aus eingerichtet werden konnte.

Uebrigens erlangt selbst der Anfänger bald hinreichende Fertigkeit im Abstecken gerader Linien, und wird auf Grund des Vorangegangenen im Stande sein, Punkte einer Verticalebene selbst quer über einen Bergrücken hinweg anzugeben.

§. 13.

Kommt es auf die Bestimmung des Durchschnitts E Fig. 6 zweier Geraden AB und CD an, dann richten zwei hinter A und D gedachte Beobachter den Stab des Gehülfen beziehentlich in die Linien AB und CD ein. Bei hinderlichem Terrain kann gemäß §. 11 verfahren werden, wodurch ebenfalls der fragliche Durchschnitt E hervorgeht.

Zusatz. Nur unter sehr günstigen Umständen, in der Regel bei ganz offenem Terrain, werden Stäbe allein zur Absteckung einer Geraden hinreichen. Sie genügen für sich nicht mehr, sobald zwischen den gegebenen Punkten Hindernisse, wie Waldungen, Ortschaften u. dgl. vorkommen.

Ein ausschließlich mittelst bloßer Stäbe unter sonst günstigen Umständen ausführbares Problem würde darin bestehen, von einem zwischen zwei Convergenten AB und CD Fig. 7 gegebenen Punkte E eine Gerade nach dem Convergenzpunkte selbst abzustecken. Zu diesem Behufe führe man durch E eine beliebige Gerade und bestimme deren Durchschnitt G mit AB, wähle hierauf einen Punkt H und gebe den Durchschnitt I von GH mit CD an. Durch H legt man wiederum willkührlich die Gerade HK und ermittelt deren Durchschnittspunkte L, K mit CD und AB, findet endlich den Durchschnitt F der Diagonalen GL und KI des Viereckes GILK, so ist F ein Punkt der gesuchten Geraden, und diese folglich bestimmt.

Um das Verfahren zu prüfen, kann ein zweiter Punkt gefunden werden, welcher mit dem gegebenen und bereits erhaltenen in derselben Richtung liegen muß. Der leicht zu führende Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist in den Betrachtungen über harmonische Oerter enthalten.

Anmerkung. Anlangend die Unsicherheit beim Abstecken einer geraden Linie, so hängt diese von der Entfernung des Beobachters vom ersten und vom einzurichtenden Stabe ab; auch ist es ungemein leicht, die Größe des hierbei möglichen Fehlers durch Rechnung zu bestimmen.

§. 14.

Das Abstecken gerader Linien geht in der Regel dem Messen derselben voran. Letzteres selbst aber besteht darin, zu untersuchen, wie oft eine gegebene, durch einen Stab, eine Kette, eine Schnur u. s. w. vergegenwärtigte Länge in der zu messenden Linie enthalten sei. Aehnliches erfolgt beim graphischen Darstellen von Räumlichkeiten, beim Fertigen von Plänen und Rissen. Das Abstecken gerader Linien wird hier durch das Ziehen derselben mittelst eines Stiftes längs des Linealrandes vertreten. Sind solchergestalt zwei auf dem Papierblatte gegebene Punkte verbunden, dann besteht eine der gewöhnlichsten Forderungen darin, die Entfernung beider Punkte zu finden, d. h. auszudrücken, wie oft eine bestimmte Gerade in derselben wiederholt werden kann. Damit sofort vom Risse Gebrauch zu machen sei, so befindet sich diese Längeneinheit auf demselben Blatte an einer passenden Stelle aufgetragen, d. h. es ist eine Gerade gezogen, deren Endpunkte nur um die Größe der gewählten Längeneinheit von einander abstehen oder worin diese Größe sich mehrfach wiederholt. Zarte Theilstriche auf der gezogenen Geraden drücken den Wiederkehr der geltenden Grundeinheit aus, welche überdies gewöhnlich einmal in gleiche Theile zerlegt erscheint, deren einer oder mehrere wiederum in wirklich als abgesondert vorliegende oder leicht zu gewinnende Unterabtheilungen zerfallen können. Derartige Aneinanderreihungen von Grundeinheiten und ihrer Theile werden Maßstäbe (échelles) genannt; wovon die üblichsten vor der wirklichen Linienausmessung auf dem Felde besprochen werden sollen.

§. 15.

Einen der einfachsten Maßstäbe zeigt Fig. 8. Hier wiederholt die Längeneinheit sich fünfmal auf der Geraden AB, und es ist noch außerdem die erste AC durch fortgesetzte Halbirung in Theile zerlegt worden, dergestalt, daß die Einheit in Achtel zerfällt. Kaum bedarf es hinsichtlich des Gebrauchs des Maßstabes einer Erklärung; es ist für sich einleuchtend, daß mit dem — hier als bekannt vorauszusetzenden — Zirkel die zu messende Gerade erfaßt wird, d. h. dessen Spitzen auf die Endpunkte dieser Geraden zu bringen sind, und nun zu untersuchen ist, wie viel dieselbe volle Einheiten und Bruchtheile in sich einschließt. Oder wäre solches wegen zu großer Länge der zu messenden Geraden nicht thunlich, so wird man Einheiten des Maßstabes auf dieselbe übertragen, die entweder vollständig in ihr aufgehen, oder einen Rest zur weiteren Vergleichung mit Einheitstheilen darbieten wer-

den. Hierbei können wir nicht umhin, auf die Zweckmäßigkeit der aus der Figur zu ersehenden Ziffernfolge zur Bezeichnung der vollen Einheiten und der Einheitstheile aufmerksam zu machen.

§. 16.

Für eine gegebene, als Einheit betrachtete Linie kann zwar theoretisch deren Eintheilung beliebig weit fortgesetzt werden, im Praktischen findet dies jedoch bald durch zu nahes Aneinanderfallen der Theilstriche seine Grenzen. Glücklicherweise giebt es in den sogenannten Transversalmaßstäben — deren Einrichtung demnächst beschrieben werden soll — ein sehr passendes Mittel, jeder verlangten Eintheilung der Grundeinheit zu entsprechen. AC Fig. 9 stimme mit der Grundeinheit des vorigen Maßstabes überein, und sei jetzt nur in vier gleiche Theile eingetheilt worden. DE und FG bedeuten gleich weit von einander abstehende Parallelen zu AB; AF, BG und CH, 1I, 2K .... Perpendikel zu denselben aus den Theilpunkten für die Einheiten. Nun habe man die Querlinie oder Transversale 6F gezogen und zu ihr parallel die übrigen Transversalen 46, 24, C2. Hiernach ist $\triangle$ C1m $\sim$ $\triangle$ CH2, und weil $C1 = \frac{HC}{2}$, so folgt: $m1 = \frac{H2}{2} = \frac{1}{8} AC = \frac{1}{8}$, da $AC = 1$.

Setzen wir, die Entfernung zweier Punkte komme mit der Linie Mm überein, so würde der Ausdruck dafür $2\frac{1}{8}$ Fuß, Ellen u. s. w. sein, je nachdem die Grundeinheit der Fuß, die Elle u. s. w. wäre. Auch könnte die besprochene Entfernung den Längen Mo, Mn oder n1, d. i. resp. den Werthen $2\frac{7}{8}$, $2\frac{5}{8}$ und $\frac{5}{8}$ entsprochen haben. Wäre es jedoch unausführbar, die Zirkelspitzen genau in zwei vorhandene Theilpunkte einer und derselben Parallele des Transversalmaßstabes einzusetzen, dann sind zwischen je zwei Parallelen Hülfsparallelen einzuschalten oder dieselben als vorhanden anzunehmen. So sei mitten inne zwischen K und M die Hülfsparallele pq dargestellt, und die Zirkelspitzen mögen auf die Punkte q und p selbst treffen, dann entspricht ihr Abstand offenbar dem Werthe $2\frac{3}{16}$; oder kämen noch die Stücke qr und qs hinzu, so würden die Zahlen $2\frac{11}{16}$ und $2\frac{15}{16}$ den gemessenen Längen entsprechen. Fügte es sich aber, daß die Hülfsparallele nicht in der Mitte zwischen je zwei Hauptparallelen, sondern vielleicht im ersten, zweiten Drittel, Viertel, Fünftel u. s. w. einzuführen wäre, dann würden in denselben die fraglichen Längen deshalb leicht zu ermitteln sein, weil durch diese Parallelen im $\triangle$ HC2 stets diesem ähnliche Dreiecke abgesondert werden würden. Das zwischen den Schen-

keln CH und C2 des Winkels HC2 enthaltene Stück einer dieser Parallelen ist von H2 der nämliche Theil, als es der Abstand der betreffenden Parallele von dem Convergenzpunkte C in Bezug auf das Perpendikel CH ist, wodurch die Relation jenes Stückes zur Grundeinheit sogleich hervorgeht.

Gegenstand der Uebung ist es, die Zirkelspitzen so auf die Perpendikel 1I, 2K u. s. w. und zugleich auf die Transversalen C2, 24, ... zu setzen, daß die Stichpunkte vollständig oder wenigstens sehr nahe mit wirklich gezogenen Hülfsparallelen zusammenfallen; wodurch letztere entbehrlich werden.

Wären die Perpendikel auf AB durch Hauptparallelen in vier gleiche Theile getheilt worden, während man die Einheit AC nur halbirt hätte, wie in Fig. 10, so würde die Wirkung des Transversalmaßstabes die nämliche gewesen sein, nämlich die Einheit sich in sofort mit dem Zirkel zu erfassende Achtel zergliedert haben.

So kann die Duodecimaleintheilung eines Fußes, Zolles u. s. w. vermittelst dieses Verfahrens leicht ausgeführt werden; und es sind, kommt es auf die Absonderung durch den Zirkel ohne Weiteres abzunehmender Zwölftel an, doppelt so viel Fälle möglich als es Zusammensetzungen der Zahl 12 aus je zwei Factoren giebt.

Auch darf es nun nicht Wunder nehmen, wenn der tausendste Theil einer im Ganzen geringen Länge z. B. von 6 Zollen noch recht wohl mit freiem Auge zu erkennen ist und selbst auf noch kleinere Theile Rücksicht genommen werden kann, wie aus der Eintheilung Fig. 12 hervorgeht, worin AB die Einheit vorstellt.

Transversalmaßstäbe der Decimaleintheilung, wie Fig. 12 einen solchen darstellt, sind für den Gebrauch vorzüglich geeignet, und werden daher in der praktischen Geometrie am häufigsten angewendet. Verweilen wir noch einen Augenblick bei dem hier vorliegenden Maßstabe und suchen für die in demselben bezeichneten Längen die entsprechenden Zahlenwerthe auf. Man wird finden: ab = 0,649, cd = 0,308, ef = 0,065, und wenn gh zwischen zwei benachbarten Hauptparallelen mitten inne liegt, so folgt dafür 0,5425. Aendert AB seine Bedeutung, stellt sie nicht mehr die Einheit, sondern das Zehnfache derselben oder ihren zehnten Theil dar, so wirken diese Voraussetzungen auf die Zahlenwerthe obiger Dimensionen dergestalt ein, daß für die erste das Einerzeichen nach der Rechten, für die zweite nach der Linken um eine Stelle zu versetzen ist.

§. 17.

Gewährt allerdings der Transversalmaßstab ein entsprechendes

Mittel zur Eintheilung des Grundmaßes in sehr kleine Theile, so ist er gleichwohl vorzugsweise nur beim Gebrauch der Karten und Risse anwendbar, weniger beim Abnehmen in der Natur wirklich vorhandener Längen, insofern es darauf ankommt, außerordentlich kleine Theile der Einheit mit Sicherheit zu bestimmen. Setzen wir, bh Fig. 12 sei die zu messende Länge, und man habe an dieselbe einen wirklichen Maßstab d. h. einen aus Metall, Holz u. s. w. geformten Stab MN angelegt, auf welchem die Grundeinheit MP = PN, eine jede für sich in zehn gleiche Theile durch Theilstriche abgesondert, erscheine. Einer der Endpunkte der zu messenden Geraden falle zwischen die Theilstriche 4 und 5 der Grundeinheit MP hinein, der andere aber, nämlich b liege im Anfange des Stabes; hiernach würde sein:

$$bh = bt + th = 1{,}4 + th.$$

Auf die Bestimmung von th wird es nun ankommen, damit der Werth für bh in geschlossener Zahlform sich ergiebt. Zu diesem Behufe schließe an die Kante db des Maßstabes ein bewegliches Lineal ahk5, auf welchem 4 Theile des Maßstabes in 5 gleiche Theile eingetheilt sein mögen, und der mit 0 bezeichnete Theilstrich falle mit dem Endpunkte h der Geraden bh zusammen, überdies noch der dritte Theilstrich mit einem Theilstriche des Maßstabes, hier mit dem siebenten. Es wird dann th $\frac{3}{5}$ oder $\frac{6}{10}$ eines Maßstabtheiles betragen, und da dieser dem zehnten Theile der Maßeinheit entspricht, so hätte man für die gesammte Länge

$$bh = 1{,}4 + 0{,}06 = 1{,}46.$$

Um dies einzusehen, möge das Lineal an einem anderen Platze β gedacht werden, so daß seine äußersten Theilstriche mit zweien Theilstrichen des Maßstabes zusammenfallen. Da 5 Theile des Lineals 4 Theilen des Maßstabes gleichkommen, so ist ein Theil des ersteren $\frac{4}{5}$ eines Theiles vom letzteren d. i. ur = $\frac{4}{5}$us, und daher r um $\frac{1}{5}$us zur Rechten von s entfernt. Weil ferner

$$2us - 2ur = 2sr \text{ oder}$$
$$up - uq = pq,$$

so liegt q um $\frac{2}{5}$us zur Rechten von p entfernt. Auf dieselbe Weise folgt, daß der Punkt o um $\frac{3}{5}$us von n, i um $\frac{4}{5}$us von c und c um $\frac{5}{5}$us von t abstehen müsse.

Wird das Lineal längs des Maßstabes verschoben, so daß r auf s fällt, dann hat der Theilstrich u0 vom Theilstriche uv um denselben Weg rs = $\frac{1}{5}$us sich entfernt. Wäre damit die zu messende Länge erfüllt d. h. stände der Theilstrich u0 — welcher hier als Inder oder

Zeiger anzusehen ist — auf dem Endpunkte der zu messenden Geraden, so würde jetzt deren numerischer Werth 0,92 betragen. Bewegt man das Lineal weiter, dann tritt ein Augenblick ein, für welchen der Theilstrich q2 in die Richtung des Theilstriches p1 zu liegen kommt. Dann aber hat u0 von uv sich auch um den Betrag pq = 2sr = $\frac{2}{5}$us = $\frac{4}{10}$us entfernt, und die Größe der zu messenden Geraden wäre jetzt, wenn der Index mit deren Endpunkte zusammenfiele, 0,94. Gelangte auf gleiche Art o3 nach n2, dann würde u0 von uv sich auch um das Stück no = 3sr = 3 . $\frac{1}{5}$us = $\frac{6}{10}$us entfernt haben, so daß der Index nun vom Anfange b der zu messenden Geraden um die Größe 0,96 abstände.

Wird das Lineal ferner bewegt, dann gelangt es auch in die Lage α, für welche dessen dritter Theilstrich mit einem Theilstriche des Maßstabes coincidirt. In dieser Stellung befindet sich der Index kh nach der vorangegangenen Betrachtung um die Größe $\frac{3}{5}$us von t entfernt, und es ist solche der Länge bt hinzuzurechnen, damit der Zahlenwerth für die zu messende Gerade bh hervorgeht. Man erhält sonach:

$$\begin{aligned} bh &= bt + th = 1{,}4 + \tfrac{3}{5}us \\ &= 1{,}4 + \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{1}{10} = 1{,}4 + \tfrac{3}{50} \\ &= 1{,}4 + 0{,}06 = 1{,}46, \end{aligned}$$

wie oben behauptet worden ist, und sieht nun leicht ein, wie das bewegliche Lineal recht wohl als Mittel der Eintheilung einer Geraden in beliebige Theile dienen könne. Nach den Erfindern Peter Nunnez oder Nonius und Vernier oder Werner wird das bewegliche Lineal Nonius oder Vernier genannt, und es kann dasselbe auch in Gestalt eines Bogens auftreten, sobald diese eigenthümliche Eintheilung auf einen Kreisumfang übertragen werden soll.

§. 18.

Noch durch eine anders angeordnete Eintheilung des Nonius kann bh Fig. 13 — welche Länge mit bh der vorigen Figur übereinstimme — ermittelt werden. 5 Theile des Nonius sollen diesmal 6 Theilen des Maßstabes entsprechen. Hiernach ist, wenn, wie in der Noniusstellung β, der Index 0u mit einem Theilstriche uv des Maßstabes zusammenfällt, ur = $\frac{6}{5}$us, folglich

$$ur - us = \tfrac{6}{5}us - us = \tfrac{1}{5}us = rs$$

$$2\,(ur - us) = uq - up = \tfrac{2}{5}us = 2 \cdot rs = pq$$

$$3\,(ur - us) = uo - un = \tfrac{3}{5}us = 3 \cdot rs = no$$

$4\,(ur - us) = ui - ul = \frac{4}{5}us = 4\,.\,rs = li$

$5\,(ur - us) = uc - ug = \frac{5}{5}us = 5\,.\,rs = gc$ d. h.

c5 trifft auf einen Theilstrich des Maßstabes.

Würde nun durch gleitende Fortbewegung des Nonius längs des Maßstabrandes r auf s zu liegen kommen, dann hätte der Index u0 um den Betrag sr d. h. um $\frac{1}{5}$ us zur Linken von uv sich entfernt;

um $\frac{2}{5}$ us, wenn q auf p gefallen wäre,

$= \frac{3}{5}$ us $=$ o $=$ n $=$ $=$

$= \frac{4}{5}$ us $=$ i $=$ l $=$ $=$

$= \frac{5}{5}$ us $=$ c $=$ g $=$ $=$

An der Ziffer des Noniustheilstriches, welcher mit einem Theilstriche des Maßstabes zusammenfällt, erkennt man folglich, um welchen Theil von us der Index über seine ursprüngliche Lage fortgerückt ist. In der Stellung α des Nonius zeigt der Index auf den Endpunkt h der zu messenden Geraden bh und der Noniustheilstrich 3 trifft auf einen Maßstabstheilstrich, daher ist $th = \frac{3}{5}$ us und mithin wie vorhin, weil $us = \frac{1}{10}$:

$$bh = bt + th = 1{,}4 + \tfrac{3}{5}\,.\,\tfrac{1}{10} = 1{,}46.$$

§. 19.

Fällt kein Theilstrich des Nonius mit einem Theilstriche des Maßstabes zusammen, wie in der Noniusstellung γ Fig. 12, dann führt folgende einfache Ueberlegung zur fraglichen Längenbestimmung einer Geraden. Der Index schneidet die Länge bm ab, und ungeachtet kein Theilstrich des Nonius mit einem solchen des Maßstabes genau zusammenfällt, so ist es doch noch am meisten der Fall mit dem vierten Noniusstrich, der nur um den geringen Betrag fl einen Theilstrich des Maßstabes überschritten hat. Fielen beide Theilstriche zusammen, dann könnte über den Werth der Länge bm kein Zweifel sein, indem derselbe 0,18 betrüge, da zu bg d. i. zu $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{5}\,.\,\frac{1}{10} = \frac{8}{100}$ hinzuzurechnen wäre. Vereinigte sich hingegen der fünfte Noniustheilstrich e5 mit dem nächsten Theilstriche des Maßstabes, dann würde der Index 0m auf w fallen und eine zwei Theilstrichen des Maßstabes gleichkommende Länge anzeigen, in der Zergliederung $\frac{1}{10} + \frac{5}{5}\,.\,\frac{1}{10}$. Die wirkliche Länge bm liegt daher zwischen den Grenzen $\frac{1}{10} + \frac{4}{5}\,.\,\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{10} + \frac{5}{5}\,.\,\frac{1}{10}$, welche nur um $\frac{1}{5}\,.\,\frac{1}{10} = 0{,}02$ differiren.

Für die vorliegende Theilung ist:

$$lf + ey = yf - el = \tfrac{1}{10} - \tfrac{4}{5}\,.\,\tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{5}\,.\,\tfrac{1}{10}.$$

Nach dem bloßen Augenmaße taxire man das Verhältniß von lf zu ey, welches hier ziemlich genau wie 1 : 2 sein dürfte; woraus ye = 2lf entsteht. Es folgt daher

$$lf + 2lf = 0{,}02,$$
$$3lf = 0{,}02,$$
$$lf = 0{,}00666\ldots$$

Um den Betrag lf ist aber die zu messende Länge bm größer als $bg + \frac{4}{5}.bg$ d. h. größer als $\frac{1}{10} + \frac{4}{5}.\frac{1}{10}$, mithin

$$bm = 0{,}18 + 0{,}0066\ldots = 0{,}1866\ldots$$

Je geringer nun der Irrthum bei Beurtheilung des Verhältnisses lf : ey ist, desto genauer wird die Correctur der zu messenden Geraden bm hinsichtlich der Ueberschreitung fl des vierten Noniustheilstriches über einem Maßstabtheilstriche ausfallen.

§. 20.

Ohne Schwierigkeit lassen die hier an einem besonderen Zahlenbeispiele ausgeführten Bestimmungen zu allgemeinen sich erheben. Bezeichnet n die Anzahl Theile des Maßstabes, welche der Nonius umfaßt, so kommen auf diesen entweder $n + 1$, oder $n - 1$ gleiche Theile, und drücken P und p bezüglich die wirklichen Längen eines Maßstabs- und Noniustheiles aus, dann ist für den ersten Fall:

$$P : p = n : n + 1, \text{ woraus}$$
$$(n + 1)\,P = np$$
$$\text{oder } P + \frac{1}{n}P = p,$$
$$\text{folglich } p - P = \frac{1}{n}P$$

hervorgeht.

Der Unterschied zwischen einem Theile der Haupteintheilung und einem solchen des Nonius beträgt sonach $\frac{1}{n}$ des ersteren; welches auch im zweiten Falle stattfindet, denn alsdann ist:

$$P : p = n : n - 1$$
$$\text{oder } P(n - 1) = np,$$
$$\text{folglich } P - p = \frac{1}{n}P.$$

Beide Eintheilungsarten sind sonach geeignet, einen Theil der Haupteintheilung in n gleiche Theile einzutheilen, und es wird von der beabsichtigten Stellung des Nonius abhängen, welche derselben zu

wählen ist; erstere stets dann, wenn der Inder des Nonius dem Anfangspunkte des Maßstabes zugekehrt erscheinen soll, wie in Fig. 12, hingegen letztere, sobald der Inder auf der Seite des Maßstabsendpunktes anzubringen ist, wie in Fig. 13.

Welche von beiden Eintheilungen auch gewählt werden mag, stets wird der Betrag, um welchen der Inder über den zunächst benachbarten Theilstrich des Maßstabes hinaus fortbewegt wurde, dadurch sich ergeben, daß man den Werth eines Maßstabstheils mit einem Bruche multiplicirt, welcher die Anzahl der zwischen dem Inder und dem Coincidenzstriche enthaltenen Theile des Nonius zum Zähler und die Anzahl aller Theile desselben zum Nenner hat.

§. 21.

Was nun den im §. 19 besprochenen Fall des Nichtzusammenfallens der Theilstriche beider Eintheilungen anlangt, so läßt sich auch hierbei von besonderen Zahlenwerthen leicht absehen.

Setzt man für Fig. 12 lf : ey = k : h, dann ist $ey = \frac{h}{k} . lf$, und wenn n und P die Bedeutungen des vorigen §. behalten,

$$lf + ey = \frac{1}{n} . P.$$

Hieraus folgt

$$lf + \frac{h}{k} . lf = \frac{1}{n} . P$$

$$\text{oder } lf = \frac{k}{h+k} . \frac{1}{n} . P.$$

In Bezug auf jenes Beispiel würde sein:

$$k = 1,\ h = 2,\ n = 5,\ P = \frac{1}{10},$$

$$\text{daher } lf = \frac{1}{2+1} . \frac{1}{5} . \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{1}{5} . \frac{1}{10} = 0{,}00666\ldots.$$

Auch läßt das Ergebniß dieser Betrachtung eine leicht in Worte zu fassende Regel zu.

§. 22.

Da der Nonius an sehr vielen Meßinstrumenten angebracht wird, so mögen, um mit ihm vertrauter zu werden, noch ein Paar Beispiele folgen.

Beispiel 1. Wie würde ein Nonius zu theilen sein, damit Hundertel einer Linie d. h. des zwölften Theiles eines Zolles sicher abzunehmen wären, der Index aber des Nonius diesem selbst voranginge?

Hier dürfen nur 21 Linien des Maßstabes auf dem Nonius in 20 gleiche Theile eingetheilt werden. Ein Theil des letzteren ist dann von einer Linie um $\frac{1}{20}$ derselben verschieden, nämlich um diesen Betrag größer als dieselbe. Um zu den Hunderteln der Linie zu gelangen, oder vielmehr diese sofort am Nonius ablesen zu können, bedarf es blos einer anderen Schreibart für den Bruch $\frac{1}{20}$ d. i. die gleichbedeutende 0,05. Fig. 14 zeigt die Einrichtung und Bezeichnungsweise des den vorgeschriebenen Bedingungen entsprechenden Nonius; eine Eintheilung, wie solche u. A. an Barometerscalen vorzukommen pflegt. Man würde für den augenblicklichen Stand des Index lesen: 26 Zoll 6,65 Linien, d. h. um diese Größe würde der Index des Nonius vom Anfangspunkte des Maßstabes entfernt sein.

Beispiel 2. An einen in Sexagestmalgrade eingetheilten Kreis einen Nonius anzubringen, welcher die Winkel von fünf zu fünf Minuten erkennen läßt.

Hier wird es darauf ankommen, Zwölftel eines Grades durch den Index des Nonius abzusondern, und soll dieser jenem vorangehen, d. h. der Index zwischen dem Nonius und dem Anfangspunkte der Kreiseintheilung enthalten sein, so sind 11 Grade derselben auf dem Nonius in 12 gleiche Theile zu theilen. Sind am Kreisumfange halbe Grade angemerkt, dann werden auf dem Nonius aus 5 derselben 6 zu machen sein.

MQ Fig. 15 zeigt ein Stück des die Haupteintheilung enthaltenden Umkreises, Rand oder Limbus genannt. Er enthält die gewöhnliche Gradeintheilung, welche in der centralen Linie mn beginnt und von da aus zu beiden Seiten den Umkreis durchläuft. Längs desselben ist ein den Nonius enthaltendes Bogenstück RS irgendwie beweglich. Es könnte aber auch — wie bei der Kippregel, einem in der Folge zu beschreibenden Instrumente — RS fest, hingegen MQ längs RS gleitend gedacht werden.

In der Abbildung erscheint RS zur Rechten der Fundamentallinie mn fortgerückt, und der zweien benachbarten Nonien zugleich angehörige Index 0 fällt in die Richtung der zweiten Centrale po. Um den Winkel beider Centrallinien zu messen, dient der Nonius zur Rechten, welcher eine solche Einrichtung hat, daß die Ablesung der Winkel von 5 zu 5 Minuten sofort erfolgen kann, d. h. ohne Anwendung der am Schlusse des §. 20 aufgestellten Regel. Es ist wahrzunehmen,

daß die Theilstriche yz und xz beziehentlich des Nonius und Limbus coincidiren, der Inder aber den neunten Grad bereits überschritten hat, folglich die Geraden mn und po einen Winkel von 9 Grad 25 Minuten unter sich einschließen.

Wir erkennen den Theilstrich yz als den fünften vom Inder aus, und sehen leicht ein, daß der ebensovielte Theilstrich, d. i. uw, von 60 des benachbarten Nonius aus, nothwendig wieder mit einem Theilstriche des Limbus coincidiren muß, ja daß diese Wahrnehmung, sobald solche für alle Noniusstellungen stattfindet, als Beweis für die Richtigkeit der beiderseitigen Eintheilungen dient.

§. 21.

Werden die bisher besprochenen Eintheilungen gerader Linien auf den Oberflächen prismatischer oder cylindrischer Stäbe vollzogen, dann kommen wirkliche Maßstäbe zu Stande, womit auf dem Felde oder sonst Längen gemessen werden können. Beträgt der Abstand zweier Punkte nur wenige Zolle oder Linien, so dient zur Ermittelung desselben ein kleinerer Maßstab, als wenn es größeren Entfernungen gilt. Während bei Ausmessung von Gefäßen ein bloßer Zollstab völlig hinreichen kann, wird man, sollen Dimensionen eines größeren Gegenstandes, einer Maschine, eines Gebäudes u. dgl. gefunden werden, Stäbe von der Länge mehrerer Fuße oder Ellen anwenden. Stäbe jedoch von etwa 10 Ellen Länge gehören schon zu den größten; sie haben vor kleineren den entschiedenen Vorzug, daß sie weniger oft in der Richtung der zu messenden Linie umgelegt zu werden brauchen. Dahingegen bedürfen so lange Stäbe zur gehörigen Festigkeit bedeutende Querdimensionen — Breite und Dicke — und werden dadurch schwerfällig d. i. für den Transport so wie für die eigentliche Handhabung unbequem. Wollte man den zehn Ellen langen Stab in der Mitte theilen und mit einem Charnier versehen, wie dies im Kleinen bei den sogenannten Schmiegen geschieht, dann würde der Maßstab für den Transport geeigneter sein, und dies um so mehr, wenn aus dem Stabe fünf gleich große Stücke gemacht und diese mit Charnieren oder Bändern gehörig verbunden würden, da sich dann beim Nichtgebrauch des Maßstabes dessen ursprüngliche Länge auf den fünften Theil reducirte. Maßstäbe von dieser Einrichtung d. h. Schmiegen von so riesenhafter Größe kommen wirklich vor, und finden vorzüglich Behufs der Detailerwerbung bei Aufnahme von Ortschaften ihre Anwendung; im Kleinen sind sie ein allgemein bekanntes und beliebtes Meßgeräth.

Kommt es darauf an, mit einem Male eine beträchtliche Länge,

vielleicht von 30 bis 50 Ellen, zu erfassen, so läßt sich dies auf mehrfache Weise erreichen. Es kann die Längeneinheit — auch wohl nebst ihren Unterabtheilungen — auf ein Band aus Pergament oder einen anderen Stoff aufgetragen werden, wobei nur darauf zu sehen ist, daß der Stoff der Ausdehnung, sei es durch Aenderung der Luftfeuchtigkeit oder andere Einflüsse, möglichst wenig unterliegt. Das Band läßt sich durch Aufrollung in einem dosenähnlichen Gehäuse leicht aufbewahren und beim Nichtgebrauch selbst in der Tasche unterbringen. Bänder dieser Art heißen Bandmaße und werden vorzüglich beim Ausmessen von Gebäuden gebraucht.

Durch sogenannte Meßschnüre werden sie nicht vollständig ersetzt. Denn wenn auch nicht zu leugnen ist, daß durch wirkliche Aufzeichnung der einzelnen Maßeinheiten mittelst färbender Stoffe auf die Schnur oder durch Knoten in derselben ein bequemes Maß gewonnen wird, so liegt es in der Natur der gedrehten Faser und wird auch durch die Erfahrung bestätigt, daß die Schnur der Längenausdehnung weit mehr als das Band unterworfen ist, daher die Meßschnur im Allgemeinen weniger Sicherheit als das Bandmaß gewährt. Zu dieser für genaue Messungen nachtheiligen Längenausdehnung der Meßschnur und selbst des Bandmaßes gesellet sich noch deren rasche Abnutzung beim öfteren Gebrauch, daher solche auch bei eigentlichen Terrainvermessungen nur in Ermangelung anderer Meßgeräthschaften benutzt werden, ungeachtet sie vermöge ihres geringen Gewichts leicht und bequem gehandhabt werden können.

Weit vorzüglicher, auch allgemein im Gebrauch sind zu diesem Behufe die Meßketten. Die Glieder einer Meßkette sind unter sich gleich lange, völlig gerade gestreckte Drähte aus Eisen, Messing oder Kupfer, und an ihren Enden dergestalt umgebogen, daß dadurch der Anschluß der benachbarten Glieder — gewöhnlich unter Dazwischenkunft eines Ringes — möglich wird.

Selbst die Methode der Zeichner, auf dem Papiere mittelst des Zirkels Längen auf- und überzutragen, ist im Großen auf dem Felde benutzt worden, indem hier hölzerne Zirkel von mehreren Fußen Schenkellänge gebraucht worden sind.

In der Gleichförmigkeit der Schritte eines Mannes hat man ferner ein Mittel gefunden, Längen zu messen, sobald größte Genauigkeit nicht gefordert wurde; so wie endlich der Schall d. h. das Gesetz seiner Fortpflanzung in ruhiger Luft für denselben Zweck Anwendung fand.

Die im Vorangegangenen nur angedeuteten Mittel der Längen-

bestimmung von Linien sollen jetzt einer näheren Betrachtung unterworfen werden.

§. 22.

Der Maßstab und sein Gebrauch. Harziges oder mit Oel getränktes Holz ist das üblichste Material zu Maßstäben und verdient selbst vor dem dauerhafteren Metall wegen seiner äußerst geringen Längenänderung durch Temperaturwechsel den Vorzug. An den Enden ist der Maßstab Behufs geringerer Abnutzung mit messingenen oder eisernen Schuhen versehen, und die Grenzen je zweier Maßeinheiten werden auf demselben durch Eindrücke in das Holz oder durch eingesetzte Metallstifte bezeichnet, auch durch Beisetzung von Ziffern die Folgeordnung der Maßeinheiten nebst ihren Unterabtheilungen bemerklich gemacht. Für gewöhnliche Messungen reicht ein einziger Maßstab hin, und es ist dann nur darauf zu sehen, daß derselbe nicht durch Umlegung, sondern durch Aneinanderlegung in der Richtung der zu messenden Linie fortgebracht wird. Scharfe Spitzen oder Keile p und q Fig 16 können zur Bezeichnung vom Anfange und Ende des Maßstabes auf der Bodenoberfläche MN angewendet und so die Anschlußpunkte für die folgenden Auflegungen desselben gewonnen werden. Zwei, ja selbst drei völlig übereinstimmende Maßstäbe sind jedoch erforderlich, sobald nicht nur sehr genaue Resultate des Messens, sondern diese daneben auch in kürzester Zeit erlangt werden sollen.

Ist der Boden, auf welchem hin das Messen erfolgen soll, annähernd eben und wagrecht, und entweder durch eine angespannte Schnur, durch Tracirung, oder nur durch ausgesteckte Stäbe die Richtung der zu messenden Linie bezeichnet, so genügt es, bei zwei oder drei Maßstäben, selbige sorgfältig nach dieser Richtung hin an einander zu legen und abwechselnd die hinteren voran zu bringen, bis auf diese Weise das gegebene Ziel erreicht ist. Bei geringer, etwa 2 bis 4° betragender Bodenneigung wird sehr oft auch noch so verfahren. Wäre z. B. ab Fig. 17 die zu ermittelnde Horizontale, ac das Terrainprofil, und man hielte dafür, die wirklich gemessene Länge ac mit der gesuchten ab verwechseln zu können, so würde, wäre $\angle$ cab $= 4°$ und ac $= 1000$ Fuß, ab um 2,4 Fuß zu groß ausgesprochen werden; bei 2° um 0,6 und bei 1° um 0,15 Fuß. Der Fall wird jedesmal entscheiden, ob dieser Fehler vernachlässigt werden kann oder nicht, letzterer übrigens leicht zu bestimmen sein, sobald entweder das Perpendikel bc oder der Winkel cab gegeben sind.

Soll die Rechnung vermieden werden, und sofort aus der wie-

derholten Anlegung der Maßstäbe die horizontale Projection ab Fig. 18 der Schrägen ac hervorgehen, dann wird es nur darauf ankommen, die Stäbe in der Verticalebene durch ac stets horizontal zu legen, wobei freilich der Vortheil des unmittelbaren Anschließens je zweier benachbarten Stäbe verloren geht. Gesetzt die Messung beginne im oberen vertical über b gelegenen Punkte c, so wird der Stab cd vermittelst einer Setzwage n oder auf andere Art horizontal an c angelegt, aus dem Stabende d unter Benutzung eines Lothes das Perpendikel de gefällt, an den Fußpunkt desselben neuerdings der Stab in die horizontale Lage ef versetzt, wieder von f herabgelothet, an g wie vorhin der Stab angehalten und so bis zur Erreichung des Zieles a fortgefahren. Offenbar ist dann das Produkt aus der Anzahl der Anlegungen des Maßstabes in seine wirkliche Länge nur noch um den Theil hm desselben zu vermehren, um sogleich die verlangte Entfernung der Punkte a und b zu erhalten.

Wäre daneben nicht verabsäumt worden, auch die Perpendikel de, fg . . . ma zu messen, dann würde deren Summe dem Perpendikel bc gleich sein, und hätte man noch überdies die Schräge ac wirklich gemessen, so böten sich Elemente genug dar, um nachträglich durch Rechnung ab zu bestimmen und somit das Resultat der Messung zu prüfen.

Anmerkung. Statt am Ende d des Maßstabes ein Loth de herabzulassen und dieses nachher zu messen, kann ein entsprechend eingetheilter Stab, der das unmittelbare Ablesen des Perpendikels de möglich macht, angewendet werden; wobei jedoch der Hülfsstab vertical zu stellen ist, was leicht durch ein daneben angehaltenes Bleiloth oder in Ermangelung dessen durch ein nahe am Stabe frei herabfallendes Steinchen zu erreichen ist. Ein Arbeiter würde dann den Stab dc um das Ende c herum drehend auf und nieder bewegen, so lange bis von einem zweiten die Setzwage beobachtenden Arbeiter der horizontale Stand derselben ausgesprochen wäre, in welchem Augenblicke vom ersten oder besser von einem dritten Arbeiter das Ablesen der Anzahl Zolle und Linien erfolgte, welche auf das Perpendikel de kämen.

§. 23.

Kommt es darauf an, eine beträchtliche Länge mit größter Genauigkeit zu messen, dann reichen die hier beschriebenen Verfahrungsarten nicht mehr hin. Gewöhnlich ist die bloße Kenntniß der Entfernung zweier sehr weit von einander gelegenen Punkte der einzige und letzte Zweck ihrer Messung keineswegs; vielmehr erscheint solche nur als Mittel zur Beurtheilung der Lage anderer mit diesen zwei Punkten in irgend einer Relation stehenden Punkte. In einem solchen

Falle steht es dem Geometer fast immer frei, im Bereiche eines Landes ein zur Messung einer bedeutenden Länge günstiges d. h. möglichst wagrechtes Terrain auszuwählen. Auch ist er sonst, was die Herbeischaffung der nöthigen Meßgeräthschaften anlangt, nicht beschränkt, so daß Verfahrungsarten ausgeübt werden können, welche für die Zwecke des gemeinen Feldmessens als zu complicirt und kostspielig erscheinen würden.

Tobias Mayer empfiehlt für flachen Boden besondere Meßschemel, d. h. dreifüßige Tischchen, wie Fig. 19 einen solchen darstellt, deren Platten durch Schrauben gehoben und gesenkt werden können. Es sollen deren drei vorhanden sein, sobald mit zwei Maßstäben operirt wird, und solche in der Richtung der zu messenden Linie so aufgestellt werden, daß der erste vom Anfangspunkte A derselben um einige Fuß entfernt zu stehen kommt, damit das Ende a des auf dem ersten und zweiten Schemel ruhenden Maßstabes mittelst eines Lothes vertical über A eingestellt werden kann. Das andere Ende b des Maßstabes greift bis in die Mitte der zweiten Schemelplatte über, und es unterliegt jetzt keinen Schwierigkeiten, den Stab ab mittelst einer Setzwage k und unter Anwendung der Stellschrauben m und n horizontal aufzulegen. Um aber zugleich den Maßstab in die Richtung der zu messenden und am anderen Ende durch einen lothrechten Stab bezeichneten Linie zu bringen, ist derselbe mit zwei hervorragenden Visirstiften r und s versehen. Ist solchergestalt der Maßstab in die richtige Lage gebracht, dann wird mit einem feinen Stifte — Federmesser, Bleistifte — am Ende b desselben auf der Schemelplatte ein feiner Strich gezogen, nur aus Vorsicht für eine mögliche Verrückung des Maßstabes. Nun erfolgt das Anlegen des zweiten, völlig mit dem ersten übereinstimmenden Maßstabes. Behutsam wird derselbe dem ersten angefügt und wie dieser unter Benutzung des dritten Meßschemels so wie der Setzwage in die zu messende Linie eingerichtet, auch das Ende dieses Maßstabes durch einen zarten Einschnitt in die obere Fläche des Schemels markirt. Jetzt wird der erste Maßstab hinweggenommen, desgleichen der erste Meßschemel, und solcher vor den dritten gebracht, auf ihn und den vorigen Schemel der Maßstab wie vorhin aufgelegt, und in dieser Weise bis zum Ende der zu messenden Linie fortgefahren.

Weil selbst beim vorsichtigsten Aneinanderlegen zweier Maßstäbe Verrückungen derselben dennoch vorzukommen pflegen, so ist es die Praxis einiger Geometer, die Maßstäbe auf den Schemelplatten nicht bis zum wirklichen Anschluß ihrer Enden zu nähern, sondern einen

Zwischenraum übrig zu lassen, diesen mit dem Zirkel zu messen, und den gefundenen Betrag gehörig in Rechnung zu bringen.

Nach v. Osterwald sollen in der Richtung der zu messenden Linie Pfähle von etwa 4 Fuß Höhe in den Boden eingeschlagen und oben darauf in horizontaler Lage Latten befestigt werden, auf welchen hin das Messen mittelst der Maßstäbe wie vorhin erfolgt.

Weniger genau erfolgt das Messen längs einer in der Richtung der zu messenden Linie angespannten Schnur.

Die merkwürdigsten Beispiele genauer Linienmessungen sind jene §. 3 erwähnten Operationen, welche Behufs der Größen- und Gestaltermittelung unserer Erde auf Veranlassung der Pariser Akademie der Wissenschaften gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts durch Méchain und Delambre zur Ausführung kamen. Man wendete dazu Platinmaßstäbe von zwei Toisen Länge an, und es waren derselben vier vorhanden. Sie glichen aber nicht einfachen Stäben, sondern stellten sehr complicirte Apparate dar, durch welche die Temperatur nebst der von ihr abhängigen Längenausdehnung des Platinlineals, so wie dessen Neigung gegen den Horizont auf das Zuverlässigste beobachtet werden konnten. Hier würde deren Beschreibung am unrechten Orte sein, daher wir auf das Werk von Méchain und Delambre, base du système métrique etc., tome II., verweisen, worin diese Apparate vollständig beschrieben und durch Figuren veranschaulicht sind.

§. 24.

Das Bandmaß und die Meßschnur. Ersteres wird auch Rollmaß genannt und es ist bereits im §. 21 das Hauptsächlichste hierüber mitgetheilt worden. Wir fügen noch hinzu, daß, wenn ein wirklich gewebtes Band angewendet wird, dasselbe in Leinölfirniß gesotten und mit einem dünnen Oelfarbenanstrich versehen zu werden pflegt, auf welchen Anstrich erst das Auftragen der landesüblichen Fuße erfolgt, die in Zolle und Linien eingetheilt und durch Beifügung entsprechender Ziffern zum praktischen Gebrauch geeignet gemacht werden. Auch trifft man jetzt häufig metrisch eingetheilte Bandmaße an, besonders zum Aufnehmen von Maschinen. Uebrigens rührt die Benennung Rollmaß daher, weil das eine Bandende an eine kleine, mit einer Kurbel versehene Welle befestigt wird, auf welcher das Band ab- und aufgerollt werden kann. Die Welle selbst befindet sich in einem dosenähnlichen Gehäuse aus Messing oder Leder, das einen Schlitz hat, aus welchem das andere Bandende hervortritt, wie solches Fig. 20 zeigt.

Hinsichtlich der Meßschnur ist nur noch die Bemerkung übrig geblieben, daß sie gewöhnlich aus Hanf gedreht zu sein pflegt, und vor ihrer Anwendung mit Leinöl zu durchdringen ist, weil sie sonst der Ausdehnung zu sehr unterliegt.

§. 25.

Die Meßkette. Für die Zwecke der praktischen Geometrie im engeren Sinne, d. h. für das eigentliche Feldmessen, ist die Meßkette anerkannt das passendste Meßgeräth und allgemein im Gebrauch. Gewährt sie auch nicht den hohen Genauigkeitsgrad, welcher durch Maßstäbe erreicht werden kann, so haben dennoch vergleichende Messungen gezeigt, daß bei sorgfältiger Handhabung der Meßkette Resultate hervorgehen, welche den durch Maßstäbe erlangten an Schärfe wenig nachstehen, daß aber die Kette dem Maßstabe entschieden vorzuziehen ist, sobald in kürzester Zeit brauchbare Messungen ausgeführt werden sollen.

Die gewöhnlichste Einrichtung der Meßkette ist aus Fig. 21 ersichtlich. m, n, o, p .... sind Kettenglieder aus Eisendraht von der Stärke eines Gänsekieles, an den Enden dergestalt umgebogen, daß solche durch Ringe untereinander verbunden werden können, welche man gewöhnlich aus Messingdraht fertigt. Die Figur stellt einen Theil der ausgespannten Kette dar, für welche die Mittelpunkte a, b, c, d .. der Verbindungsringe gleichweit, einen Fuß oder eine Elle weit, von einander abstehen. Gewöhnlich besteht eine Kette aus 50 Gliedern, deren je 10 auf eine Ruthe kommen, welche in Sachsen beim Feldermessen 7 Ellen 14 Zoll beträgt. Es sind aber auch ellige Kettenglieder üblich; namentlich beim Straßenbau.

Die beiden Endglieder der Meßkette haben geringere Länge als die übrigen, da mit denselben die Kettenringe in Verbindung stehen. N zeigt einen solchen Kettenring, der gewöhnlich aus gegossenem Messing angefertigt wird. Der Mittelpunkt a desselben steht vom Mittelpunkte b des ersten Gliederringes genau um die gewählte Längeneinheit ab, ist also mit bc, cd ... völlig übereinstimmend, und fällt beim Gebrauch der Kette in die Axe eines hölzernen, 4 bis 5 Fuß langen Stabes, des Kettenstabes, welcher Behufs der leichteren Handhabung der Kette durch den Kettenring hindurch gesteckt wird. Beide Kettenstäbe sind cylindrisch abgearbeitet und haben an ihren unteren Enden Stachel oder conische Schuhe, und damit die Kette an denselben nicht herabgleiten kann, sind wohl auch Querstifte durch die Stäbe hindurch gesteckt. Kettenstäbe von üblicher Form stellen die Figuren 22 und 23 dar.

Es giebt aber auch Meßketten mit elliptischen Endringen, wozu dann anders geformte Schuhe, nämlich keilförmige, gehören.

Zur leichteren Abzählung der Ruthen zeichnen sich diejenigen Ringe, welche je zwei benachbarte Ruthen verbinden, durch einen in der Mitte angebrachten Quersteg aus, und selbst die Ringe zwischen zwei halben Ruthen durch auffallendere Größe. Eine Folge hiervon ist, daß die an solche Ringe grenzenden Kettenglieder weniger lang sein können als die übrigen.

§. 26.

Außer den Ruthen- und Ellenketten giebt es noch Lachterketten, von gewöhnlich fünf Lachter Länge, welche zu bergmännischen Vermessungen gebraucht werden. Ein Lachter ist genau zwei Meter lang und wird dekadisch eingetheilt. Die Kettenglieder haben zwei Decimeter Länge, werden aus etwa zwei Millimeter starkem Messingdraht gefertigt und wie die Glieder der vorigen Ketten mit einander verbunden. An den Lachterringen d. h. an denjenigen Ringen, welche je zwei Lachter vereinigen, sind Messingblättchen angehängt, und in diesen kleine, runde Löcher befindlich, deren Anzahl mit der vom Kettenanfange aus vorhandenen Lachtermenge übereinstimmt. Eisendraht wird des Einflusses wegen nicht angewendet, den solcher auf die Magnetnadel, den Hauptbestandtheil der bergmännischen Winkelmeßinstrumente, ausübt.

§. 27.

Unter sonst gleichen Umständen haben Meßketten von möglichst langen Gliedern den Vorzug, weil Abnutzungen der Gliederringe beim Gebrauch nicht gänzlich zu vermeiden sind, dadurch aber jede Kette ihre Länge nothwendig ändern und diese Fehlerquelle um so ergiebiger sein muß, je mehr Kettenringe vorhanden sind. Erste Pflicht des Geometers ist es daher, von Zeit zu Zeit seine Meßkette zu untersuchen und nöthig erscheinende Berichtigungen durch Zusammenklopfung abgenutzter Ringe oder auf andere Art vorzunehmen. Besonders tritt diese Nothwendigkeit dann ein, wenn die Kette von ungeübten Händen gehandhabt, zu sehr angespannt, und andererseits nicht darauf gesehen wird, daß ein jedes Kettenglied völlig gerade gerichtet sei.

Ein vorzügliches Mittel, die Kette zu prüfen, besteht darin, daß man sie auf einer wagrechten Bank so ausspannt, wie dies auf dem Felde zu geschehen pflegt. Zuvor aber werden auf der Bank mittelst eines Normalmaßes in gerader Linie sämmtliche Ruthen oder Ellen

einer Kettenlänge nebst den Unterabtheilungen, nämlich den Fußen, sorgfältig aufgetragen. Ist nun die Kette richtig, so wird sie über dieser Eintheilung dergestalt ausgebreitet werden können, daß die Mitte eines jeden Kettenringes über einen Theilstrich der vorhandenen Eintheilung zu liegen kommt, während im Gegentheil fehlerhafte Stellen der Kette augenblicklich an den Tag treten werden.

§. 28.

Ein metallener oder hölzerner, dann an den Enden beschlagener und in seine Unterabtheilungen eingetheilter Normalmaßstab gehört unerläßlich zu jedem vollständigen Meßapparate; insbesondere aber zur Prüfung der Kette. Dieser Stab darf zum gewöhnlichen Messen schlechterdings nicht gebraucht werden, sondern er dient nur zur Kettenprüfung, und ist er von Holz, so hat man ihn, damit er sich nicht werfe, beim Nichtgebrauch aufzuhängen. Mittelst desselben kann dann die Prüfung der Kette auch auf folgende Art geschehen.

Auf möglichst wagrechtem Boden — etwa in der Nähe des Hauses, worin der Geometer während der Dauer einer Messung sein Standquartier genommen hat — wird eine Schnur ausgespannt. Längs derselben werden von Ruthe zu Ruthe Pfählchen mit möglichst glatten Köpfen bis zur Erdoberfläche eingeschlagen, so daß sämmtliche Pfahlköpfe in eine horizontale Ebene fallen, was mittelst einer Setzwage leicht zu erreichen ist. Nun werden auf den Pfahlköpfen zarte Einschnitte angebracht, deren je zwei genau um eine Ruthe von einander abstehen, wozu hauptsächlich der Normalmaßstab dient. Jetzt ist es leicht denkbar, wie die Kette über sämmtliche Pfähle auszuspannen sei, und für sich einleuchtend, daß, wenn die Mitten der Ruthenringe genau über die vorgezeichneten Merkmale fallen, mindestens die Ruthen selbst richtige Länge haben. Die Unterabtheilungen des Normalmaßstabes dienen dann dazu, die Richtigkeit der einzelnen Kettenglieder zu untersuchen.

Sind zur Ausführung einer Messung mehrere Wochen, vielleicht Monate bestimmt, dann ist die hier angegebene Prüfung der Kette hinlänglich oft zu wiederholen. In solchen Fällen stehen gewöhnlich Reserveglieder und Ringe zur Verfügung, auch ist man dann im Besitz der einfachsten Werkzeuge, wie einer Zange, eines Hammers u. s. w., sobald bloßes Zusammendrücken einzelner Kettenringe oder Gliederstreckungen zur Kettenberichtigung nicht mehr genügen.

§. 29.

Ueber die eigentliche Praxis des Kettenmessens oder gemeinhin

Kettenziehens, d. h. über die dabei zu beachtenden Handgriffe ist wenig zu sagen, da solche durch Uebung erworben werden müssen.

Zwei Arbeiter oder Kettenzieher sind zur Führung der Kette mindestens erforderlich, durch drei hingegen wird solche wesentlich erleichtert. Vermittelst der Kettenstäbe spannen sie dieselbe annähernd in der Richtung der zu messenden Linie, und nachdem der erste etwa 20 Schritt hinter seinen, lothrecht im Anfangspunkte der Linie errichteten Kettenstab sich begeben hat, so sieht er zu, ob zwischen diesen Stab und den an das Ende der Linie gesetzten der Kettenstab des zweiten Arbeiters genau hineinfällt, d. h. mit jenen zwei Stäben in einerlei Verticalebene liegt. Man sagt: der erste Arbeiter richtet den Stab des zweiten in die zu messende Linie ein. Rascher würde diese Operation von statten gehn, wenn ein dritter Arbeiter den Stab des zweiten zwischen den des ersten und den Endstab der Linie einrichtete; auch könnte dieser Arbeiter nachsehen, ob sämmtliche Kettenglieder in Ordnung wären, kein Glied mit dem anderen sich verschlungen hätte. Gleichzeitig zieht der zweite Arbeiter die Kette sanft an, und etwas mehr, sobald er für seinen Stab den richtigen Standort innerhalb der Linie nachzuweisen vermag.

Zeigt sich nun die Kette völlig angespannt — nicht übermäßig — und findet sonst gegen ihre richtige Lage kein Bedenken statt, dann werden die Kettenstäbe aufgehoben, und der Standpunkt des zweiten wird durch ein Stäbchen — Zählstäbchen piquet genannt — angemerkt, wovon der zweite Arbeiter in einer Kapsel 10 Stück bei sich führt. Ist ein dritter Arbeiter zur Verfügung, so kann auch dieser darauf sehen, daß der Standort des zweiten Kettenstabes nicht verloren geht.

Inzwischen begiebt sich der zweite Arbeiter vermittelst des Kettenstabes, die Kette nach sich ziehend, in der zu messenden Linie weiter, und er, sowie der erste Arbeiter sorgen dafür, daß während dieser Bewegung die Kette mehr über dem Boden schwebt als ihn berührt, besonders wenn derselbe hart oder steinig ist, weil sonst beim wirklichen Hinschleifen der Kette ihre Glieder durch dann unvermeidliche Erschütterungen zu schnell abgenutzt werden würden. Der erste Arbeiter bringt nun, nachdem er das vom zweiten zurückgelassene Zählstäbchen an sich genommen hat, seinen Kettenstab an die Stelle desselben, indessen jener die Kette in der Linie ausstreckt. Dann erfolgt das Einrichten beider Kettenstäbe wie vorhin; es wird im Standorte des zweiten abermals ein Zählstäbchen eingesteckt, dieses später vom ersten Arbeiter aufbewahrt, und so das Ende der zu messenden Linie erreicht. Zur genauen Ermittelung der zwischen dem letzten Zähl-

stäbchen und dem Endpunkte der Linie noch befindlichen Länge ist ein in zehn Theile eingetheilter Fußstab nöthig. So viel Zählstäbchen nun der erste Arbeiter am Schlusse der Messung aufzuweisen hat, so viel sind volle Kettenzüge zurückgelegt worden. Beträgt ein jeder 5 Ruthen, so wird es einer bloßen Addition des Produktes aus der Ruthenanzahl in die Anzahl der Zählstäbchen zum Ueberschusse der vollen Kettenzüge bis zum Linienendpunkte bedürfen, um die geforderte Länge auszudrücken. Fänden sich 7 Stäbchen vor, und wären vom Standorte des letzten Stäbchens aus bis zum Endpunkte der Linie hin noch 4 Ruthen 2,7 Fuß gefunden worden, dann würde die gesammte Länge $7 \times 5 + 4{,}27 =$ 39,27 Ruthen betragen.

Für wichtige Zwecke begnügt man sich mit diesem ersten Ergebniß keineswegs, sondern unternimmt die Messung rückwärts, ja noch mehrmals, und sieht, falls die Resultate nicht allzu schwankend erscheinen, das arithmetische Mittel derselben für die wahre Länge der Linie an.

§. 30.

Wenn die zu messende Linie sorgfältig abgesteckt, nämlich zwischen den Endpunkten durch eine möglichst große Anzahl Bodenpfähle bezeichnet worden ist, so erleichtert dies das Messungsgeschäft nicht nur wesentlich, sondern schützt auch vor mancherlei Irrungen, besonders vor dem Ausweichen der Kette aus der Richtung der zu messenden Linie. Zu welcher Größe der dadurch entstehende Fehler anwachsen könne, geht aus folgender Betrachtung hervor:

AB Fig. 24 sei die zu messende Linie. $Ab = bc = cd = dB =$ l stellen die nach beiden Seiten von AB ausweichenden Kettenzüge vor. Die Größen dieser durch die Perpendikel be, ch und dg ausgedrückten Abweichungen können als gleich angenommen werden, so daß bd parallel zu AB erscheint und das Perpendikel aus c auf bd, nämlich cf dem Doppelten von ch gleich kommt. Es werde diese Abweichung durch d bezeichnet und durch n die Anzahl der zwischen A und B enthaltenen Kettenzüge oder Kettenlängen, auch vorausgesetzt, daß mit dem letzten Kettenzuge der Endpunkt B erreicht wird.

Hiernach hat man:

$$AB = 2\sqrt{(l^2 - d^2)} + (n-2)\sqrt{(l^2 - 4d^2)}$$

$$= 2l\sqrt{\left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)} + (n-2)\,l\sqrt{\left(1 - \frac{4d^2}{l^2}\right)}.$$

Gründen der allgemeinen Arithmetik gemäß ist:

$$(1 - \tfrac{1}{2}y)^2 = 1 - y + \frac{y^2}{4} \text{ annähernd}$$

$= 1 - y$, sobald y einer sehr kleinen Größe entspricht. Dann aber folgt:

$$\sqrt{1 - y} = 1 - \tfrac{1}{2}y.$$

Wird nun für y einmal $\frac{d^2}{l^2}$, dann $\frac{4d}{l^2}$ gesetzt, so folgt:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)} = 1 - \frac{d^2}{2l^2} \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{4d^2}{l^2}\right)} = 1 - \frac{2d^2}{l^2}, \text{ daher}$$

$$AB = 2l\left(1 - \frac{d^2}{2l^2}\right) + (n-2)\,l\left(1 - \frac{2d^2}{l^2}\right)$$

$$= nl - \frac{d^2}{l}(2n - 3).$$

Der Ausdruck $\frac{d^2}{l}(2n - 3)$ zeigt den begangenen Fehler an, und läßt erkennen, daß die Unrichtigkeit mit der Größe der Kettenausweichung und mit der Anzahl der Kettenzüge wächst, während sie abnimmt, sobald die Länge der Kette vergrößert wird. Lange Ketten sind folglich den kurzen vorzuziehen.

Beispiel. Man hat eine gewöhnliche Ruthenkette zu 5 Ruthen oder 50 Fuß Länge 100 mal nach einander aufgetragen, und ist der Meinung, daß bei jedem Kettenzuge eine Seitenabweichung von $\frac{2}{5}$ Fuß erfolgt sei, dann würde die wahre Länge der gemessenen Linie sein:

$$= 100 \,.\, 50 - \frac{0{,}4^2}{50}(2 \,.\, 100 - 3)$$

$$= 5000 - 0{,}0032\,(200 - 3)$$

$$= 5000 - 0{,}6304$$

$$= 4999{,}3696 \text{ Fuß}.$$

Der begangene Fehler wäre hier 0,6304 Fuß oder 0,000126 der ganzen Länge. Bei 1 Fuß jedesmaliger Seitenabweichung der Kette würde für dieses Beispiel der Fehler schon 3,94 Fuß oder 0,000788 der eigentlichen Länge betragen.

§. 31.

Ein zweiter Fehler entspringt aus der Neigung der Kette gegen den Horizont. Kommt es auf die Länge der Horizontalen AC Fig. 25

an, und ist die Kette dergestalt geneigt geführt worden, daß ein Punkt B z. B. der Endpunkt derselben in einem Lothe durch C sich befindet, und würde AB mit der fraglichen Länge AC verwechselt, dann könnte der begangene Fehler entweder aus dem bekannten Perpendikel BC oder dem Neigungswinkel $BAC = \alpha$ leicht gefunden werden.

Im ersten Falle hätte man für denselben $AB - AC = AB - \sqrt{(AB + BC)(AB - BC)}$; im zweiten

$$AB - AC = AB - AB \cdot \cos\alpha$$
$$= AB(1 - \cos\alpha)$$
$$= 2AB \cdot (\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Denn bekanntlich ist:

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

und wenn $\beta = 0$ gesetzt wird:

$$1 - \cos\alpha = 2 \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha = 2(\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Mit dem Neigungswinkel nimmt daher die Größe des Fehlers auffallend zu.

Beispiel. Es sei die 5 Ruthen lange Kette dreimal in der Schrägen AB enthalten und deren Neigung zu 4° befunden worden; dann würde die Horizontalprojection AC der Schrägen AB betragen:

$$5 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \cos 4° = 149{,}625 \text{ Fuß},$$

und folglich der Fehler 0,375 Fuß.

Wäre die Neigung der Schrägen in diesem Falle 2° gewesen, dann stellte sich der Fehler zu 0,0914 Fuß heraus; ein Fehler, der in den meisten Fällen unberücksichtigt bleibt.

§. 32.

Es ist schon erwähnt worden, daß die Kette bei ihrem Gebrauche nicht übermäßig angespannt werden solle, weil sie sich sonst leicht durch Oeffnung der Kettenringe in ihren Dimensionen ändern könne. Auch möchte alle Anstrengung sie völlig gerade zu richten vergeblich sein, indem immer eine Einsenkung derselben in der Mitte — sei sie auch noch so klein — übrig bleiben würde. Stets wird sie eine eigenthümliche krumme Linie — die Kettenlinie genannt — repräsentiren, welche in der Verticalebene der beiden Kettenendpunkte enthalten ist.

Es mögen A und B Fig. 26 die Aufhänge- oder Endpunkte der Meßkette vorstellen, und man habe solche dergestalt angespannt, daß die Tiefe der Einsenkung in der Mitte, nämlich CD, dem Auge kaum

merkbar vorkommt, welches Verhalten auch in der That bei gehöriger Handhabung der Kette stets eintreten wird. Dann aber können die zwei Aeste AD und DB der Kettenlinie ADB mit ihren Sehnen AD und BD füglich verwechselt werden. Meinte man nun durch die Kettenlänge die Entfernung der Punkte A und B selbst erlangt zu haben, so würde dies ein Irrthum sein, dessen Größe folgendermaßen zu bestimmen wäre. Es findet statt:

$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2}$$

$$2AC = 2\sqrt{AD^2 - CD^2} = AB \text{ d. i.}$$

$$AB = \sqrt{4AD^2 - 4CD^2} = \sqrt{(2AD)^2 - 4CD^2}$$

$$= \sqrt{(AD + DB)^2 - 4CD^2}$$

$$= \sqrt{(AD + DB + 2CD)\,(AD + DB - 2CD)}$$

$$= \sqrt{(L + 2D)\,(L - 2D)},$$ wenn L die Kettenlänge bedeutet.

Die Größe des Fehlers ist daher:

$$(AD + DB) - AB = L - AB.$$

Beispiel. Wenn die Tiefe der Einsenkung einer Fünfruthenkette in der Mitte 0,4 Fuß betrüge, dann wäre zunächst der wirkliche Abstand beider Kettenenden

$$= \sqrt{(50 + 2\,.\,0{,}4)\,(50 - 2\,.\,0{,}4)}$$

$$= 49{,}9946 \text{ Fuß.}$$

Man erhielte also hier die Fehlergröße zu $50 - 49{,}9946 = 0{,}0054$ Fuß.

Bei 0,2 Fuß Senkung beträgt der Fehler nur 0,0017 Fuß.

Anmerkung. Wird die krumme Linie ADB genommen wie sie ist, als eine gemeine Kettenlinie, dann folgt aus der Natur derselben, daß für abnehmende Einsenkungen die spannenden Kräfte an den Kettenenden wachsen. Die Tiefe der Einsenkung einer Meßkette richtet sich nach der Länge und dem Gewichte derselben, und ist für dieselben spannenden Kräfte bei kleineren Ketten kleiner als bei größeren, sobald die Gewichte der Ketten ihren Längen proportionirt angenommen werden.

So vermögen zwei Kettenzieher die Kette nur bis zu einer gewissen Grenze horizontal zu spannen, und rechnet man die Spannkraft eines jeden zu 25 Pfd., so wie das Gewicht der 5 Ruthen langen Kette zu 6 Pfd., so würde die Tiefe der Ketteneinsenkung circa $1\frac{1}{2}$ Fuß, bei einer halb so langen Kette und denselben Spannkräften jedoch blos $\frac{3}{8}$ Fuß betragen.

§. 33.

Endlich verdient noch der durch Temperaturänderung entstehende Fehler beim Kettenmessen bemerkt zu werden. Um ihn gehörig zu wür-

digen, wird es nur einer Anwendung der in §. 7 entwickelten Formeln auf den vorliegenden Fall bedürfen.

Man setze, die 5 Ruthen lange Kette sei bei 12° C. gefertigt worden, habe also bei dieser Temperatur ihre normale Länge; es soll der Werth einer Kettenlänge für 25° C. bestimmt und daraus auf den begangenen Fehler geschlossen werden.

Nach Formel (I) §. 7 ist die für 25° C. geltende Kettenlänge, wenn die Kette aus Eisendraht vorausgesetzt, der Ausdehnungscoefficient hiernach zu 0,00001266 angenommen wird,

$$= 50\,[1 + 0{,}00001266\,(25 - 12)]$$
$$= 50{,}00823 \text{ Fuß},$$

d. i. um 0,00823 Fuß zu groß, oder um 0,000164 der normalen Kettenlänge.

Liegt auch die Abwendung dieses Fehlers nicht in unserer Macht, so erscheint er doch so außerordentlich gering, daß auf ihn bei den gewöhnlichen Meßoperationen mit der Kette keine Rücksicht genommen zu werden braucht. Es ist dies mit den vorher besprochenen Fehlern wohl auch der Fall, sobald die Kette vorsichtig gehandhabt wird, daher auch diese in der Regel unbeachtet bleiben; inzwischen leuchtet für sich ein, daß jene Fehler nur durch genaue Kenntniß der Fehlerquellen auf ihr Minimum herabgebracht werden können.

§. 34.

Behufs oberflächlicher Messungen ist das Ausschreiten gerader Linien mit Vortheil anzuwenden. Soll hierdurch der Wahrheit nahe gekommen werden, so wird zunächst von Seiten des ausschreitenden Individuums Bekanntschaft mit dem Verhältnisse der Größe seines Schrittes zu einer üblichen Längeneinheit vorausgesetzt. Durch wiederholtes Ausschreiten einer gegebenen Länge sei z. B. gefunden worden, daß 30 Schritte auf 5 Ruthen kommen. Alsdann wird es sich noch darum handeln, beim Ausschreiten selbst die Richtung der fraglichen Linie sorgfältig inne zu halten, was entweder mittelst zweier in dieselbe ausgesteckter Stäbe geschieht, oder auch nur durch einen einzigen, sobald zufällig ein natürliches Richtobject, eine Thurmspitze, Hausecke u. dgl. in die Verticalebene der durch Schritte zu messenden Linie hineinfällt.

Anmerkung. Tobias Mayer's Fertigkeit im Ausschreiten wird wohl selten angetroffen werden, indem dieser eine Genauigkeit von $\frac{1}{400}$ bis $\frac{1}{500}$ der ge-

messenen Länge erreichte, was mit dem Genauigkeitsgrade einer mittelmäßigen Kettenmessung übereinstimmt.

§. 35.

Auch die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft wird mitunter zur annähernden Bestimmung der Entfernung zweier Punkte auf der Erdoberfläche angewendet. Da die Geschwindigkeit des Lichtes außerordentlich groß ist, indem solche in einer Sekunde 40000 geographische Meilen beträgt, so kann die Entstehung desselben und seine Wahrnehmung für terrestrische Weiten als in einen Augenblick zusammenfallend erachtet werden.

Nach Dulong's Versuchen beträgt die Geschwindigkeit des Schalles in trockener atmosphärischer Luft bei 0° C. für eine Sekunde 333 oder genauer 333,44 Meter. Bei erhöhter Temperatur, also verminderter Dichte der Luft, geschieht die Fortpflanzung des Schalles in ihr mit vermehrter Geschwindigkeit, daher jene Angabe einer Correction bedarf, welche Dulong selbst in dem Factor $\sqrt{(1 + 0{,}00375\,t)}$ beigegeben hat. Die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft wird, wenn t die Lufttemperatur in Centigraden bedeutet, durch die Formel

$$333{,}44\,\sqrt{(1 + 0{,}00375\,t)}$$

ausgedrückt, welche nach Dulong's directen Versuchen (Poggend. Ann. XVI. S. 464) wenigstens zwischen 0° und 22° C. der Erfahrung genau entspricht.

Wäre nun an dem einen Endpunkte einer zu messenden Linie eine Feuerexplosion verursacht, vielleicht ein Geschütz abgefeuert worden, und hätte man am anderen Ende mittelst einer guten Sekunden- oder Terzienuhr die Zeit zwischen der Wahrnehmung des Blitzes und Schalles beobachtet, dann würde die fragliche Entfernung unter Berücksichtigung zugleich der Lufttemperatur leicht zu berechnen sein.

Beispiel. Die verflossene Zeit betrage 7 Sekunden, und die Lufttemperatur 17½° C. Dann ist zunächst die Schallgeschwindigkeit

$$= 333{,}44\,\sqrt{(1 + 0{,}00375\,.\,17{,}5)}$$
$$= 344{,}2 \text{ Meter,}$$

und nunmehr die gesuchte Entfernung

$$344{,}2 \times 7 = 2509{,}4 \text{ Meter.}$$

Das Verfahren, mittelst der Schallgeschwindigkeit Entfernungen zu messen, liefert besonders darum schwankende Resultate, weil auf diese Geschwindigkeit die Windrichtung, der Luftdruck, selbst die mög-

licherweise alterirte Lufttemperatur längs der zu messenden Linie, sowie nicht minder der atmosphärische Dunst unberechenbare Einwirkungen ausüben. Hierbei soll keinesweges geleugnet werden, daß unter günstigen Umständen sehr genaue Resultate möglich sind, vielmehr spricht die Erfahrung dafür. Unter Anderm erwähnt Tobias Mayer einer solchen Messung, wobei die Entfernung zweier Punkte genau bestimmt und zu 3569 Kalenbergischen Schuhen befunden worden war. Aus einer Reihe von 6 Beobachtungen ergab sich, daß ein durch ein Geschütz verursachter Schall 3,1 Sekunde brauchte, um diesen Weg zurückzulegen, durch welche Angabe — da die Geschwindigkeit des Schalles hiernach 1151 Kal. Fuß betrug, — die gemessene Länge zu 3568,1 Kal. Fuß, demnach nur um 0,9 Fuß zu klein erhalten wurde.

§. 36.

Das Winkelkreuz. Bevor wir zu den Operationen mit der Kette übergehen, wollen wir uns zuvörderst eines leicht zu erlangenden Instrumentes versichern, welches dazu dient, auf dem Felde rechte Winkel darzustellen, und in Verbindung mit der Kette sehr umfassende Anwendungen zuläßt, ja gewissermaßen ein Ganzes bildet; ich meine das Winkelkreuz.

Wie schon bemerkt, soll durch das Winkelkreuz ein rechter Winkel vergegenwärtigt werden, oder es dient vielmehr dazu, zwei sich rechtwinklig schneidende Verticalebenen darzustellen, was auf mancherlei Weise zu erreichen ist.

Zuerst genügt hierzu schon ein cylindrisches oder prismatisches, mit zwei einander rechtwinklig durchschneidenden Sägeschnitten versehenes Stück Holz, welches von einem beschuhten Stabe getragen wird, der vermittelst eines Bleilothes senkrecht im Scheitelpunkte des anzugebenden rechten Winkels aufgestellt werden kann.

Vorausgesetzt nun, daß die Einschnitte ab und cd Fig. 27 im Holzstücke in verticalen, unter sich rechtwinkligen Ebenen befindlich sind, und die in ihrem Durchschnitte gelegene Spitze M des Stabes dergestalt im Erdboden eingedrungen ist, daß das Winkelkreuz von selbst ruhig steht, dann wird es, indem das Auge des Beobachters durch diese Einschnitte hindurch steht, leicht sein, Stäbe wie A, B, C und D von einem Gehülfen so ausstecken zu lassen, daß solche in den Schenkeln vier benachbarter rechter Winkel enthalten sind. Auch leuchtet von selbst ein, daß das Abstecken dieser Stäbe um so genauer erfolgen kann, je zarter die Einschnitte im Winkelkreuze, d. h. je weniger breit dieselben geführt worden sind.

Die Richtigkeit des Winkelkreuzes kann durch einen sehr einfachen Versuch dargethan werden. Man dreht es so herum, daß die Spitze des Stabes aus dem Durchschnitte der beiden Verticalebenen nicht im Mindesten herauskommt, und erwartet den Augenblick, wo die Stäbe C, D mitten im Schlitze ab sich darstellen. Jetzt sucht man das Kreuz in dieser Lage zu befestigen, und steht hierauf zu, ob die beiden anderen Stäbe A, B von selbst im Schlitze cd sich zeigen, was immer der Fall sein muß, wenn anders das Winkelkreuz richtig construirt worden ist.

Offenbar wird der nämliche Zweck erreicht, wenn statt des Holzstückes zwei rechtwinklig auf einander gepaßte Lineale gewählt werden in deren Mittellinien ab und cd Fig. 28 lothrechte Stifte befestigt sind.

Das Winkelkreuz tritt auch in der Form achtseitiger, in der Mitte der Seitenflächen mit Einschnitten versehener prismatischer Körper auf, sowie überhaupt zur Darstellung des rechten Winkels oder der Hälfte desselben vielerlei Projecte realisirt worden sind, unter denen wir hier nur noch den Winkelspiegel — Equerre à reflexion — erwähnen wollen.

Derselbe besteht aus einem kleinen kupfernen cylindrischen Gefäß, einer Dose ähnlich, von $2\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll Durchmesser und $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Zoll Höhe. Das Instrument hat keine Stützen, sondern wird mit der Hand gehalten, mit der rechten oder linken, je nachdem nach der einen oder anderen Seite hin operirt werden soll. V Fig. 29 zeigt einen nur beim Gebrauch des Instrumentes geöffneten fensterähnlichen Verschluß, durch welchen die von Gegenständen reflectirten Lichtstrahlen in das Innere desselben gelangen können; o ist eine Ocularöffnung, um durch dieselbe Gegenstände wahrzunehmen. Aus dem horizontalen Durchschnitte Fig. 30 dieses Instrumentes ist zu erkennen, daß dieser Oeffnung eine zweite P gegenüber liegt. Letztere ist entweder rund oder rectangulär geformt und dient zum Einlassen der in diese Richtung fallenden Lichtstrahlen. Das Object B spiegelt sich in einem lothrecht auf dem Grunde des Gefäßes angebrachten ebenen Metallspiegel M an der Stelle b, und wird von da nach a auf einen zweiten, jedoch kleineren Spiegel m reflectirt, welches neue Spiegelbild a das hinter o gedachte Auge dergestalt trifft, daß mit ihm zugleich das direct wahrnehmbare Object O erscheint, und zwar dieses oberhalb jenes, es mag das Object B zur Linken oder Rechten des Beobachters vorhanden sein. Die Ebene des Spiegels m schließt mit der Gesichtslinie oA drei Viertel eines rechten Winkels ein, und beide Spiegelebenen sind genau unter einem halben rechten Winkel zu ein-

ander gestellt. Aus dieser Anordnung der Spiegel folgt, daß der einfallende Lichtstrahl Bb mit dem zum zweiten Mal reflectirten ao einen rechten Winkel bildet.*) Da nun in die Richtung des letzteren das unmittelbar wahrnehmbare Object A hineinfällt, nämlich ao mit Ao einerlei ist, so ist C, der Durchschnitt von Bb und Ao, der Scheitel eines rechten Winkels. Soll dieser auch zugleich im Mittelpunkte des Instrumentes, oder vielmehr in der Axe desselben gelegen sein, dann muß durch dieselbe nicht nur die Halbirungslinie des Winkels beider Spiegel gehen, sondern auch der unter einem Viertel eines rechten Winkels zur Ebene des größeren Spiegels M geneigte Gesichtsstrahl oA. Der Einfallswinkel des directen Lichtstrahles Bb mit dem Spiegel M beträgt hiernach ein Viertel eines rechten Winkels, genau so viel als der Zurückwerfungswinkel des zum zweiten Male reflectirten Strahles ao.

§. 37.

Der Gebrauch des Winkelspiegels bedarf kaum einer Erläuterung. Ist z. B. auf dem Terrain der Punkt C gegeben, durch welchen ein Perpendikel zu Ac oder Bc errichtet werden soll, so wird man je nach Erforderniß zur Rechten oder Linken oder vor sich hin einen Stab ausstecken. Angenommen, CA sei gegeben, der Stab befinde sich in D und dessen Bild in d, so daß es nach d′ reflectirt werde, welcher Punkt nicht in der Richtung von oA liege; dann wird man den Stab D nach B hin so lange fortrücken lassen, bis dessen Bild in b erscheint und bis das Bild dieses Bildes in a sich darstellt, d. h. in einem Punkte der Gesichtslinie oA. Jetzt ist der Stab D in einen Punkt des gesuchten Perpendikels gelangt, vorausgesetzt, daß in der Richtung der verticalen Axe des Instrumentes der gegebene Scheitel C liegt, was durch ein Bleiloth oder auch durch ein Steinchen erlangt werden kann, welches man aus der Mitte des Instrumentes herabfallen läßt.

Soll hingegen dieser Scheitel C des rechten Winkels erst gefunden werden, und sind hierzu die Punkte A und B beider Schenkel, sowie die Richtung NA gegeben, dann wird der Beobachter das Instrument nach dem Augenmaße in die Nähe des fraglichen Scheitels bringen, und nun in der Richtung NA so lange fortgehen, bis sich B auf dem Spiegel m im Punkte a d. h. in dieser Richtung zeigt, worauf

*) Die Katoptrik zeigt, daß, wenn ein Lichtstrahl von einem Planspiegel auf einen anderen reflectirt wird, der von diesem reflectirte Strahl mit dem ursprünglichen einen Winkel einschließt, welcher das Doppelte ist vom Neigungswinkel der beiden Planspiegel.

durch bloßes Herablothen aus der Instrumentsmitte der gesuchte Scheitel C erhalten wird.

Die Stellung der Spiegel könnte dadurch geprüft werden, daß man die Gleichheit der Nebenwinkel ACB und NCB untersuchte, und zu diesem Behufe das Instrument so lange im Sinne des beigesetzten Pfeiles drehte, bis oP mit CB zusammenfiele, worauf das Richtobject N an der Stelle a sich zeigen müßte, d. h. in der Richtung CB.

Uebrigens leuchtet für sich ein, daß zur Führung des Instrumentes eine sichere Hand gehört und nur bei fester Unterstützung genaue Resultate zu erwarten sind. Es empfiehlt sich dasselbe besonders durch seine geringe, selbst für die Aufbewahrung in der Tasche geeignete Umfänglichkeit, und wird, indem die Längen vermittelst bloßer Ausschreitung gemessen werden, bei flüchtigen Terrainaufnahmen vorzugsweise angewendet.

§. 38.

Aus einem gegebenen Punkte einer geraden Linie auf dieselbe ein Perpendikel zu fällen, oder richtiger, aus einem gegebenen Punkte einer Verticalebene zu dieser normal eine Verticalebene durch Ausstecken von Stäben zu bezeichnen, d. h. den Durchschnitt dieser Ebenen mit der Terrainoberfläche anzugeben; so wie zweitens, aus einem außerhalb einer geraden Linie gegebenen Punkte ein Perpendikel auf dieselbe zu construiren, dies sind die beiden sich fortwährend wiederholenden Aufgaben für den Gebrauch des Winkelkreuzes.

Jener wird dem Vorigen gemäß dadurch entsprochen, daß eine der Verticalebenen des Winkelkreuzes mit der gegebenen Verticalebene zusammenfallend gemacht wird, während die Durchschnittslinie seiner beiden Verticalebenen durch den auf dem Terrain gegebenen Punkt hindurchgeht; dieser Forderung kommt man dadurch nach, daß das Winkelkreuz dergestalt in der Richtung der gegebenen Verticalebene fortbewegt wird, daß eine seiner Verticalebenen mit ihr sich vereinigt. In dem Augenblicke nun, für welchen die andere Verticalebene des Winkelkreuzes den gegebenen Punkt in sich enthält, zeigt die Fußspitze des Instrumentes einen zweiten Punkt der verlangten Verticalebene auf der Terrainoberfläche an.

Zweites Capitel.

Operationen mit der Meßkette und dem Winkelkreuze.

§. 39.

Absteckung gerader Linien unter hinderlichen Umständen.

Erster Fall. In der Richtung der durch Stäbe wie A und C Fig. 31 bezeichneten Verticalebene mögen ferner Stäbe auszustecken sein; zunächst vor C liege jedoch ein Hinderniß M vor, ein Baum oder sonst ein Gegenstand.

Man wird das Winkelkreuz mit ab, d. i. mit einer seiner Visirebenen in der Richtung von A und C etwa in D aufstellen, und längs der zweiten cd eine beliebige Länge DE abmessen; hierauf das Winkelkreuz in E einsetzen, so daß cd mit DE zusammenfällt, dann in der Richtung von ab einen Punkt F markiren, das Kreuz auf denselben bringen und vermittelst desselben FG perpendikulär zu EF machen. Wird überdies FG = ED genommen, so liegt der Punkt G in der Verticalebene von AC. Ebenso ist ein zweites Perpendikel IH zu gewinnen, und zu größerer Sicherheit sogar ein drittes, deren Endpunkte in der fortzubringenden Richtung enthalten sein werden.

Da die Länge dieser Perpendikel und die Entfernung der Standpunkte für das Winkelkreuz gewöhnlich nur wenige Ruthen beträgt, so wird man zu dessen schärferer Aufstellung möglichst entfernte, entweder natürliche, d. h. zufällig schon vorhandene Richtobjecte, oder künstlich anzubringende, wie P, Q und R, S, wählen.

Anmerkung. Das künstliche Richtobject besteht in einem cylindrischen Stabe aus trockenem Holze von 6 bis 8 Ellen Länge und 2 bis $2\frac{1}{2}$ Zoll Stärke, der zum besseren Eindringen in die Erde an dem einen Ende mit einer metallenen, conisch zulaufenden Spitze — Schuh genannt — versehen ist. Der Stab wird entweder genommen wie er ist, mit seiner ihm eigenthümlichen Oberfläche, oder diese durch einen Anstrich aus Oelfarbe bedeckt, theils um ihn gegen Eindringung äußerer Feuchtigkeit zu schützen, vorzüglich aber damit er in größerer Entfernung noch mit freiem Auge wahrgenommen werden kann. Letzteres bewirkt ein regelmäßiger Farbenwechsel längs des Stabes von weiß und roth, zuweilen auch dunkelblau zwischen beiden, dergestalt, daß solcher zugleich als Meßstab zu benutzen ist. Wird außerdem an das andere Ende des Stabes ein Stück Zeug befestigt von demselben Farbenwechsel, so kommt eine eigentliche Meßfahne, auch jalon oder Bake genannt, zu Stande, deren 4 bis 6 Stück zu einem vollständigen Meßapparat nothwendig gehören.

§. 40.

Zweiter Fall. In Ermangelung des Winkelkreuzes könnte auch wohl ausschließlich nur mit der Kette operirt werden. Man wählt in der Richtung von AC Fig. 32 einen Punkt B aus und beschreibt aus demselben und einem zweiten, etwa C, mit paarweise gleichen Halbmessern BD, BE und CD, CE vier sich nach der Seite des Gegenstandes M zu durchschneidende Kreisbogen. Aus den Durchschnittspunkten D und E derselben werden neuerdings mit gleichen Halbmessern DF und EF Kreisbogen construirt, ebenso mit DG und EG, dann liegen die Durchschnittspunkte F und G derselben hinter M in der Richtung von AC.

Anmerkung. Dieses Verfahren ist wegen der zu beschreibenden und in die Erdoberfläche zu tracirenden Kreisbogen umständlich, bietet auch sonst zu viele Fehlerquellen dar, und wird daher nur bei gänzlicher Unstatthaftigkeit anderer Mittel angewendet.

§. 41.

Dritter Fall. Ein Hinderniß kann vorliegen, ein rectanguläres Gebäude M z. B., dessen Dimensionen selbst die Elemente zur Fortsetzung der Geraden AC Fig. 33 an die Hand geben.

Zuvörderst würde der Durchschnittspunkt B der Richtungen AC und HG nach §. 13 zu bestimmen sein, worauf man die Längen BH, BG, GF und FI zu messen hätte, um durch Rechnung HD und IE und mit den Endpunkten D und E dieser Stücke zwei Punkte in der hinter dem Gebäude M fortzusetzenden Richtung AC zu erhalten. Leicht ergiebt sich:

$$HD = \frac{GF \,.\, BH}{BG} \text{ und}$$

$$IE = \frac{BG \,.\, FI}{GF}.$$

Anmerkung. Bei verwickelten Fällen, z. B. wenn hinter einem Walde eine vor demselben gegebene Richtung fortzuführen ist, reichen die Kette und das Winkelkreuz in der Regel nicht mehr hin; vielmehr werden dann vollkommenere Meßinstrumente angewendet, von welchen später die Rede sein wird.

§. 42.

Vom Construiren der Perpendikel.

Aufgabe. Es ist eine Gerade AB Fig. 34 und in ihr ein Punkt C gegeben, in der Absicht, um aus diesem zu jener ein Perpendikel zu construiren.

Auflösung.

a) Vermittelst der Kette.

Von C aus messe man zwei gleich große Stücke CE und CF in der Richtung von AB und construire aus E und F mit gleichen Halbmessern ED und FD oder EG und FG beziehentlich sich durchschneidende Kreisbogen, so sind die Durchschnittspunkte D und G im verlangten Perpendikel enthalten.

Handelt es sich nur um den nach einer Seite von AB gelegenen Theil CD des Perpendikels DG, so wird man dennoch zu größerer Sicherheit auf der anderen Seite den Punkt G angeben und zusehen, ob D, C und G in derselben Richtung liegen.

Anmerkung. Der Punkt D ist auch unter Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes zu erhalten, indem z. B. auf CE drei Längeneinheiten aufgetragen und aus C und E mit den Halbmessern von vier und fünf Einheiten Bogen dargestellt werden, in deren Durchschnitte D hineinfällt. Dasselbe gilt vom Punkte G.

Wäre überdies der Punkt C einem der Endpunkte A und B der gegebenen Geraden sehr nahe gelegen, oder fiele selbst damit zusammen, dann würde das in der Elementargeometrie enthaltene Verfahren, diesen Punkt als Scheitel eines Peripheriewinkels anzusehen, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Kreisdurchmessers gehen, auch hier unter Gebrauch der Kette und der benöthigten Stäbe ausgeübt werden können.

b) Mittelst des Winkelkreuzes.

Bei der Beschreibung dieses Instrumentes ergab sich die Anwendung desselben Behufs der vorliegenden Aufgabe von selbst, auch stellt Fig. 31 die Auflösung derselben mehrmals dar.

§. 43.

Aufgabe. Von einem außerhalb einer Geraden AB Fig. 35 gegebenen Punkte D ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

Auflösung.

a) Vermittelst der Kette.

Aus D wird mit der vollen Kettenlänge oder einem Theile derselben ein Kreisbogen construirt, und beobachtet, in welchen Punkten solcher in die Richtung AB eintritt. Sind E und F diese Punkte, so halbirt man ihren Abstand, dann stellt der Halbirungspunkt C den Ankunftspunkt des geforderten Perpendikels in der Richtung AB dar, und es kann dessen Richtigkeit leicht durch Auffindung eines zweiten Punktes G dargethan werden.

Wegen der nicht unerheblichen Umständlichkeit und selbst Unzuverlässigkeit, mit welcher die Angabe der Bogendurchschnitte verbunden ist, zieht man jedoch vor, in AB gleich anfänglich zwei Punkte E und

F Fig. 36 und 37 beliebig auszuwählen, ihren Abstand unter sich, so wie vom gegebenen Punkte D zu messen, durch Rechnung FC oder EC, zur Bestätigung aber beide Längen zu finden, und dieselben nachher von E und F aus gehörig aufzutragen.

Man findet, mag nun C innerhalb oder außerhalb der Punkte E und F gelegen sein:

$$EC = \frac{EF^2 + ED^2 - DF^2}{2 \cdot EF}, \text{ so wie}$$

$$CF = \frac{EF^2 - ED^2 + DF^2}{2 \cdot EF}.$$

b) Unter Gebrauch des Winkelkreuzes.

Eine der Vistrebenen des Winkelkreuzes, etwa ab Fig. 38, wird so lange in der Richtung AB fortbewegt, bis die andere Vistrebene de in ihrer Fortsetzung den durch einen Stab bezeichneten Punkt D trifft, in welchem Augenblicke die Spitze des lothrecht gedachten Winkelkreuzstabes den Durchschnittspunkt C des verlangten Perpendikels mit der Terrainoberfläche bezeichnet.

Wie zu gleichem Zwecke der Winkelspiegel zu benutzen sei, wurde in §. 37 bereits angezeigt.

§. 44.

Vom Darstellen der Parallelen.

Aufgabe. Es ist eine gerade Linie AB und außerhalb derselben ein Punkt C gegeben. Man soll durch diesen eine Parallele zu jener angeben.

Auflösung.

a) Mittelst der Kette.

Erste Methode (Fig. 39). Von C aus fällt man das Perpendikel CD auf die Gerade AB, wählt in dieser möglichst weit entfernt einen Punkt E, construirt ein zweites Perpendikel EF zu AB und giebt ihm die Länge des ersten, so liegt der Endpunkt F des zweiten Perpendikels in der verlangten Parallele durch C. Zur Bestätigung wird ein drittes Perpendikel HG angegeben und jenen beiden gleich gemacht, worauf die Punkte C, F und G in der nämlichen Verticalebene enthalten sein müssen.

Zweite Methode (Fig. 40). Auch kann von C aus nach irgend einem Punkte D der Geraden AB eine Gerade CD bestimmt, hierauf in AB ein anderer Punkt G gewählt und durch ihn eine Gerade GF, welche CD

in E schneidet, geführt werden. Es wird dann nur darauf ankommen, in letzterer von E aus ein Stück EF so aufzutragen, daß F ein Punkt der verlangten Parallele ist, wozu die Längen EG, ED und EC zu messen sind, vermittelst welcher gefunden wird:

$$EF = \frac{CE \,.\, EG}{DE}.$$

Bedarf es einer Prüfung, so wird auf ähnliche Art ein neuer Punkt H bestimmt werden können.

Dritte Methode (Fig. 41). Kommt es auf größte Genauigkeit nicht an, und fällt in die Verticalebene von AB ein sehr entferntes Nichtobject X hinein, so kann nach diesem hin von C aus ein Stab E errichtet werden, welcher um so mehr in der gesuchten Parallele gelegen sein wird, in je größerer Entfernung das Object X sich befindet.

Der hierbei begangene Fehler kann als Differenz der zwei aus C und E auf AB gefällten Perpendikel CD und EF dargestellt werden, und man hat dafür:

$$DC - FE = \frac{DF \,.\, FE}{FX},$$

wodurch die vorangehende Aussage bestätigt wird.

b) Vermittelst des Winkelkreuzes.

Es kann auf §. 39 d. i. auf die Forderung Bezug genommen werden, eine Gerade hinter einem nicht zu beseitigenden Gegenstande M Fig. 31 fortzuführen. E bedeutet jetzt den gegebenen Punkt, durch welchen eine Parallele zu AC abgesteckt werden soll; F und I sind Punkte derselben.

§. 45.

Bei gemeinschaftlichem Gebrauche der Kette und des Winkelkreuzes ist es ein Leichtes, mancherlei anderen hierher gehörigen Forderungen zu entsprechen indem es fast immer nur die einfachsten Sätze der Elementargeometrie sind, worauf die auszuübenden Operationen sich gründen. So wird z. B. zu einer unzugänglichen Geraden AB Fig. 42 durch einen gegebenen Punkt C nach folgendem Verfahren eine Parallele zu erlangen sein.

Möglichst weit von C entfernt wird ein Punkt G gewählt, wodurch zwei Richtungen GA und GB sich ergeben. Dann führt man durch C eine Parallele zu GB und giebt den Durchschnitt F derselben mit GA an, hierauf auch den Durchschnitt E von CA mit GB, und legt eine Parallele zu GA durch E, deren Durchschnittspunkt D mit

der Geraden FA ein Punkt der gesuchten Parallele ist, welche nach P und Q hin verlängert und nöthigen Falls auch durch Auffindung eines neuen Punktes H geprüft werden kann.

Denn vermöge dieser Angaben ist:

$$\triangle BKD \sim \triangle FCD, \text{ daher}$$

$$BK : KD = FC : CD;$$

desgleichen $\triangle AIC \sim \triangle EDC$, mithin

$$AI : IC = ED : CD.$$

Hieraus folgt:

$$AI : BK = IC \,.\, ED : KD \,.\, FC.$$

Weil ferner

$$\triangle IKG \sim \triangle ICF \sim \triangle DKE,$$

so hat man:

$$IC : FC = IK : KG \text{ und}$$

$$ED : KD = GI : IK,$$

woraus $GI : KG = IC \,.\, ED : KD \,.\, FC$

hervorgeht; und es ist nun

$$AI : BK = GI : KG,$$

daher IK parallel zu AB.

§. 46.

Ein anderes Beispiel für die vereinigte Anwendung des Winkelkreuzes und der Kette treffen wir in folgender Aufgabe an:

Zwischen den Punkten A und B Fig. 43 einen dritten Punkt C mit jenen beiden in einerlei Verticalebene zu bringen, wenn B von A aus nicht wahrgenommen werden kann.

Durch A führe man eine Gerade, und wähle in ihr zwei Punkte D und G, von welchen aus das Object B gesehen werden kann; führe hierauf durch irgend einen Punkt E der Geraden DB eine Parallele zu DG, und bestimme deren Durchschnittspunkt F mit der Geraden GB. Werden nun die Stücke AD, DG, EF und AG gemessen, dann können die Längen EC und FC, deren Grenzpunkt C der gesuchte Punkt ist, nach den leicht zu erweisenden Formeln

$$EC = \frac{AD \,.\, EF}{DG} \text{ und}$$

$$FC = \frac{AG \,.\, EF}{DG}$$

berechnet werden.

Anmerkung. Nur von praktischem Interesse ist das Messen des Stückes AG, indem dasselbe ja durch Subtraction der gemessenen Längen DG und DA gefunden werden kann, nämlich um Gewißheit zu erlangen, daß beim Messen letzterer beiden Stücke kein Fehler vorgekommen sei.

§. 47.

Messung unzugänglicher Geraden.

In einer Reihe möglicherweise vorkommender Fälle soll gezeigt werden, welche Leistungen durch die Meßkette allein oder unter Zuziehung des Winkelkreuzes zu erzielen sind, sobald es sich darum handelt, die Länge einer unzugänglichen Geraden zu bestimmen. Nicht umhin können wir jedoch hierbei zu bemerken, daß, obschon von den zu besprechenden Verfahrungsarten mancherlei Anwendung je nach Beschaffenheit des Terrains wirklich gemacht werden kann, die Aufzählung dieser verschiedenen Fälle vorzüglich auch mit dazu dienen wird, den Gesichtskreis des angehenden Geometers zu erweitern.

Erster Fall. Zuvörderst möge es darauf ankommen, die Länge der Geraden AL Fig. 33 durch directe Messung mit der Kette zu finden. Innerhalb derselben finde sich jedoch ein Hinderniß M vor, etwa ein Gebäude von rectangulärem Grundriß, so daß ein Stück der zu messenden Geraden als unzugänglich erscheint.

Hat man dann neben einigen Stücken, welche der §. 41 zu einem anderen Zwecke erheischt, noch die Länge BF gemessen, dann folgt:

$$BD : BH = BF : BG \text{ und hieraus}$$

$$BD = \frac{BH \,.\, BF}{BG}.$$

Hinter M wird dann von D aus die Messung weiter fortzusetzen sein.

Zweiter Fall. Ist AB Fig. 44 die zu bestimmende, jedoch nur an ihren Endpunkten zugängliche Gerade, so wähle man zur Seite derselben einen beliebigen Punkt C, messe CA und CB und trage diese Längen beziehentlich auf ihre Verlängerungen dergestalt auf, daß CE = CA und CD = CB wird, worauf AB = DE sein wird.

Oder wenn das Terrain nicht erlaubt, die Längen CA und CB vollständig in ihren Verlängerungen aufzutragen, so trage man von einer jeden etwa nur den nten Theil auf, dann würde man AB = n . DE haben. Auch ist der Fall denkbar, für welchen von C aus nach AB hin die nämlichen Theile von CA und CB wie Ce und Cd darzustellen sind, wonach dann aus der gemessenen und zu AB parallelen Linie ed leicht auf AB zu schließen ist.

Endlich ist als eine Varietät dieses Falles der Umstand anzusehen, daß Ce und Cd nicht im geometrischen Verhältniß zu CA und CB gewählt werden können, sondern daß man genöthigt ist, auf CA und CB zwei passende Stücke wie Cd und Cf abzuschneiden, alsdann ef zu messen und nun entweder durch graphische Darstellung oder durch Berechnung AB zu finden. Der erste Weg wird nichts weiter als ein möglichst eben ausgebreitetes Blatt Papier, gute Zeichnungsgeräthschaften und einen sorgfältig ausgeführten verjüngten Maßstab erheischen, während der zweite Weg hiervon gänzlich absehen kann, indem aus den drei Seiten des Dreieckes efC leicht auf die Größe des Winkels bei C zu schließen ist.

Die Trigonometrie lehrt, daß, wenn A, B, C die drei Seiten eines Dreieckes und a, b, c, die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel vorstellen, einer der drei Winkel z. B. a nach folgenden Formeln berechnet werden kann. Es ist nämlich:

$$1)\ \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(S-B)(S-C)}{B\,.\,C}},$$

$$2)\ \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{S(S-A)}{B\,.\,C}} \text{ und}$$

$$3)\ \sin a = \frac{2}{B\,.\,C}\sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)},$$

wobei $S = \frac{A+B+C}{2}$ vorausgesetzt wird.

Ist aber einmal nach einer dieser Formeln der Winkel bei C des Dreieckes Cef berechnet worden, so läßt sich dann AB im Dreiecke ABC, da AC und BC durch directe Messung bekannt sind, leicht ermitteln. Man würde haben:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC\,.\,BC\,.\,\cos C}.$$

§. 48.

Sollte die zu bestimmende Gerade nur an einem ihrer Endpunkte zugänglich sein, so wird dieselbe mit Dreiecken in Verbindung zu bringen gesucht, deren Seiten durch directe Messung gefunden werden, mittelst welcher dann entweder auf dem Wege der graphischen Darstellung oder dem der Berechnung die fragliche Gerade zu erlangen ist.

Erster Fall. Es sei AB Fig. 45 die zu bestimmende, nur in B zugängliche Gerade. In der Verlängerung derselben werde BE gemessen, durch E eine Richtung EM gewählt und in derselben ED = DF ge-

macht, hierauf der Durchschnittspunkt C der Richtungen DA und FB bezeichnet, alsdann BC und CF gemessen, so kann mittelst dieser Elemente AB durch Rechnung gefunden werden.

Wird BG parallel zu EM gedacht, so ist:

$$\triangle ABG \sim \triangle AED \text{ und}$$

$$\triangle BGC \sim \triangle FDC, \text{ folglich}$$

$$AB : AE = BG : ED = BG : DF = BC : CF,$$

$$\text{daher } AB : AE - AB = BC : CF - BC \text{ oder}$$

$$AB : BE = BC : CF - BC, \text{ mithin}$$

$$AB = \frac{BE \,.\, BC}{CF - BC}.$$

Wäre hingegen $BC = CF$ gemacht worden, und hätte man außer (wie vorhin) BE diesmal die Stücke ED und DF gemessen, dann würde auf ähnliche Art folgen:

$$AB = \frac{BE \,.\, DF}{ED - DF}.$$

Zweiter Fall. Erlaubt das Terrain nicht, weder $BC = CF$ noch $ED = DF$ zu machen, dann wird man die Stücke BE, ED, DF, BC und CF zu messen haben und erhalten:

$$AB = \frac{BE \,.\, BC \,.\, DF}{ED \,.\, CF - DF \,.\, BC}.$$

Denn es ist:

$$AB : AE = BG : ED, \text{ ferner}$$

$$BG : DF = BC : CF, \text{ also}$$

$$BG = \frac{DF \,.\, BC}{CF}, \text{ daher}$$

$$AB : AE = \frac{DF \,.\, BC}{CF} : ED \text{ und}$$

$$AB : AE - AB = \frac{DF \,.\, BC}{CF} : ED - \frac{DF \,.\, BC}{CF}$$

$$\text{oder } AB : BE = \frac{DF \,.\, BC}{CF} : \frac{ED \,.\, CF - DF \,.\, BC}{CF},$$

$$\text{folglich } AB = \frac{BE \,.\, BC \,.\, DF}{ED \,.\, CF - DF \,.\, BC}.$$

Dritter Fall. Auch ergiebt sich AB, indem man durch einen der Endpunkte, etwa durch B Fig. 46 zwei beliebige Richtungen CD und FE führt und zusieht, wo dieselben die Richtung AD schneiden,

alsdann aber BC = BD, so wie BF = BE macht. Nun ist der Durchschnittspunkt G der Richtungen CF und AB anzugeben, worauf das Stück BG der zu messenden Geraden AB gleichkommt.

Denn hiernach ist $\triangle$ CBF $\cong$ $\triangle$ DBE, folglich $\angle$ C = $\angle$ D, und nun, da überdies $\angle$ CBG = $\angle$ DBA, auch $\triangle$ CBG $\cong$ $\triangle$ DBA, woraus BG = AB hervorgeht.

Vierter Fall. Schulz Montanus giebt folgende Methode der Längenbestimmung einer Geraden AB Fig. 47 an, bei welcher vorausgesetzt wird, daß man wenigstens ein Stück AE von AB direct zu messen im Stande sei.

Nachdem AE gemessen, wird außerhalb AB ein passender Punkt C ausgewählt, von welchem aus es möglich ist, die Längen CA und CE zu messen. Hierauf giebt man den Durchschnittspunkt F der Richtungen CE und BD an, von welchen letztere nach irgend einem Punkt D der Geraden CA führt. Jetzt mißt man auch FE und berechnet mittelst der erworbenen Stücke AB folgendermaßen.

Wird FG als parallel zu CA vorausgesetzt, so ist:

$$\triangle \text{CEA} \sim \triangle \text{FEG}, \text{ daher}$$

$$\text{CE} : \text{EF} = \text{AE} : \text{EG} = \text{AC} : \text{FG}, \text{ und weil}$$

$$\triangle \text{DBA} \sim \triangle \text{FBG},$$

$$\text{AB} : \text{AD} = \text{BG} : \text{FG}.$$

Man erhält daher

$$1)\ \text{EG} = \frac{\text{EF} \cdot \text{AE}}{\text{CE}},$$

$$2)\ \text{FG} = \frac{\text{EF} \cdot \text{AC}}{\text{CE}},$$

$$3)\ \text{BG} = \frac{\text{AB} \cdot \text{FG}}{\text{AD}} = \frac{\text{AB} \cdot \text{EF} \cdot \text{AC}}{\text{AD} \cdot \text{CE}}.$$

Nun ist ferner:

$$\text{BG} = \text{AB} - \text{AG} = \text{AB} - (\text{AE} - \text{EG})$$

$$= \text{AB} - \text{AE} + \text{EG}$$

$$= \text{AB} - \text{AE} + \frac{\text{EF} \cdot \text{AE}}{\text{CE}}, \text{ daher}$$

$$\frac{\text{AB} \cdot \text{EF} \cdot \text{AC}}{\text{AD} \cdot \text{CE}} = \text{AB} - \text{AE} + \frac{\text{EF} \cdot \text{AE}}{\text{CE}}, \text{ woraus}$$

$$\text{AB} = \frac{(\text{CE} - \text{EF}) \cdot \text{AE} \cdot \text{AD}}{\text{AD} \cdot \text{CE} - \text{EF} \cdot \text{AC}}.$$

Zusatz. Erlaubt das Terrain $CE = 2EF$ zu machen, dann ist

$$AB = \frac{AE \cdot AD}{2AD - AC}.$$

Oder wählte man D in der Mitte von AC, so würde folgen:

$$AB = \frac{CE - EF}{CE - 2EF} \cdot AE.$$

Fünfter Fall. In der Verlängerung von AB Fig. 48 messe man von B aus direct ein Stück BC, wähle einen Punkt D, welcher mit B und C verbunden gedacht ein gutes Dreieck, d. h. ein solches von weder zu spitzen noch zu stumpfen Winkeln verursacht, und messe auch die Seiten BD und CD.

Hierauf führe man BE nach einem beliebigen Punkte der Richtung AD, und messe noch die Seiten BE und ED des Dreieckes BED.

Entweder werden nun nach einem verjüngten Maßstabe die benachbarten Dreiecke BCD und BDE aufgetragen und deren Seiten BC und ED bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, oder man wählt, um AB zu finden, den Weg der Rechnung. Letzteren Falls wird nach einer der in §. 47 aufgestellten Formeln der Winkel CBD berechnet, wodurch der Winkel ABD sich ergiebt. Ebenso wird der Winkel BDE aus den drei Seiten des Dreieckes BDE gefunden, wodurch zur Berechnung der Länge AB im Dreiecke ABD die Seite BD und die Winkel ABD und BDA als bekannt vorliegen, und nun erhalten wird:

$$AB = \frac{BD \cdot \sin ADB}{\sin (ADB + ABD)}.$$

§. 49.

Umständlicher gestalten sich die Operationen, sobald ganz allein mittelst Kette und Stäben die Länge einer an keinem ihrer Endpunkte zugänglichen Geraden zu finden ist.

Erster Fall. Es sei AB Fig. 49 die zu messende Gerade, etwa jenseits eines Flusses gelegen, so wähle man diesseits eine Gerade CD aus, messe dieselbe, führe zu ihr in möglichster Entfernung eine Parallele MN und gebe deren Durchschnittspunkte M, P, Q und N beziehentlich mit den Richtungen CA, DA, CB und DB an. Nun werden die Stücke MC, CQ, MP und NQ gemessen und mittelst derselben die Längen CA und CB wie folgt bestimmt.

Man hat:

$$CD : MP = AC : AM, \text{ daher}$$

$$CD - MP : CD = AC - AM : AC \text{ oder}$$

$CD - MP : CD = MC : AC$, folglich

$$AC = \frac{CD \cdot MC}{CD - MP}.$$

Ferner ist:

$CD : NQ = BC : BQ$ oder

$CD - NQ : CD = BC - BQ : BC$ d. i.

$CD - NQ : CD = CQ : BC$, mithin

$$BC = \frac{CD \cdot CQ}{CD - NQ}.$$

Kennt man aber AC und BC, so ist es jetzt leicht, daraus auf die Größe der Geraden AB zu schließen, wenn nur von C aus entweder auf CA und CB selbst oder deren Verlängerungen die nämlichen Theile dieser Linien aufgetragen werden. Denn wäre $CH = \frac{1}{n}$ AC und $CI = \frac{1}{n}$ CB, so würde $IH = \frac{1}{n}$ AB, folglich $AB = n \cdot IH$ sein.

Zweiter Fall. Der Forderung des ersten Falles kann nach Ulrich auch folgendermaßen entsprochen werden.

Es wird ebenfalls eine Basis CD Fig. 50 von möglichster Länge angenommen und direct gemessen. Aus E, einem beliebigen Punkte der Richtung BD, mißt man die Länge EC, desgleichen aus F, einem Punkte der Richtung DA, die Länge FC.

Macht man jetzt $CG = \frac{1}{n} \cdot CD$ und $HC = \frac{1}{n}$ CE, so ist GH parallel zu DE. Nun wird der Durchschnittspunkt M der Richtungen GH und CB bezeichnet, dann $CK = \frac{1}{n} \cdot CF$ genommen, und hierauf auch der Durchschnitt L von GK mit CA angegeben, zuletzt LM gemessen, so ist $LM = \frac{1}{n} \cdot AB$, folglich $AB = n \cdot LM$.

Denn da hiernach auch GL parallel zu AD ist, so ergiebt sich:

$$CM : CB = CG : CD,$$

$$CL : CA = CG : CD, \text{ daher}$$

$$CM : CB = CL : CA,$$

demnach $\triangle CLM \sim CAB$, folglich:

$$AB : LM = CA : CL = CD : CG$$

$$= CD : \frac{1}{n} \cdot CD = n : 1,$$

woraus $AB = n \cdot LM$ hervorgeht.

Dritter Fall. Wieder wie vorhin wähle man eine Basis CD Fig. 51, bestimme deren Halbirungspunkt M, lege durch diesen Punkt die beliebigen Richtungen EH und GF, suche deren Durchschnitte E und F mit den Richtungen CA und DB, mache HM = ME, so wie GM = MF, und ermittele die Punkte I und K, d. h. die Durchschnitte der Richtungen MB, CG und MA, DH; dann gleicht IK der gesuchten Geraden AB.

Denn nach diesem Allen ist:

$$\triangle CMG \cong \triangle DMF, \text{ daher } \angle C = \angle D,$$

und weil $\angle CMI = \angle DMB$, so ist auch

$$\triangle CMI \cong \triangle DMB, \text{ folglich}$$

$$MI = MB.$$

Eben so erhält man

$$MK = AM$$

und nun wegen Gleichheit der Scheitelwinkel bei M

$$\triangle IMK \cong \triangle BMA.$$

Folglich ist IK = AB, aber auch parallel zu AB, daher diese Operation auch zur Lösung des in §. 45 aufgestellten Problems angewendet werden kann.

Vierter Fall. Auch können, sobald eine Basis CD Fig. 52 gewählt und gemessen worden ist, Dreiecke formirt, die Seiten derselben gemessen und nach einem verjüngten Maßstabe aufgetragen werden, wodurch auf dem Wege der graphischen Darstellung die fragliche Länge AB sich ergiebt. Ferner reichen die gemessenen Seiten der Dreiecke CFG, CFE, HDI und DIK nebst dem Stücke GH völlig hin, durch Rechnung AB zu bestimmen.

Füufter Fall. Einfacher gelangt man zum Ziele, sobald das Terrain der Wahl eines Punktes C Fig. 53 in der Richtung von AB nicht hinderlich ist. Von C aus wird alsdann eine Gerade CD zu wählen und zu messen sein. Nachher ist durch irgend einen Punkt G eine Parallele zu CA zu führen und der Durchschnitt derselben mit einer jeden der Richtungen BD und DA zu ermitteln, nämlich F und E. Werden noch überdies die Stücke FE und GD gemessen, so folgt leicht

$$AB = \frac{CD \cdot FE}{GD}.$$

Anmerkung. Alle diese Operationen, so wie die folgenden mit dem Winkelkreuze vorzunehmenden setzen flaches Terrain voraus, lassen überhaupt schärfste Genauigkeit niemals zu, und sind daher bei Messungen von Wichtigkeit schlechterdings zu verwerfen.

§. 50.

Etwas einfacher und im Ganzen zuverlässiger gestalten sich die Resultate der Längenbestimmung unzugänglicher Geraden, sobald neben der Meßkette auch noch vom Winkelkreuze Gebrauch gemacht werden kann. Dabei werden wieder die Fälle zu unterscheiden sein, für welche die zu bestimmende Gerade an ihren beiden Endpunkten zugänglich ist, nur an einem derselben, an keinem von beiden, jedoch in ihrer Verlängerung, oder endlich wenn keine dieser Begünstigungen eintritt.

Hierzu können noch die beiden Fälle gezählt werden, wobei die zu messende Gerade in einem Punkte zwischen ihren Endpunkten zugänglich ist, oder quer durch dieselbe hindurch gemessen werden kann.

Erster Fall. Aus B Fig. 54 errichte man zu AB das Perpendikel BC, in C zu BC das Perpendikel CD und hierzu durch A das Perpendikel DA, so ist DC der gesuchten Länge AB gleich.

Zweiter Fall. Durch B Fig. 55 werde eine beliebige Gerade BD gelegt und gemessen, hierauf der Durchschnittspunkt C eines Perpendikels aus A zu BD bezeichnet und CD gemessen. Aus D werde ferner gleichfalls zu BD ein Perpendikel geführt und der Punkt E gesucht, in welchem DE durch ein Perpendikel aus A getroffen wird; zuletzt noch DE gemessen. Nachher wird man haben:

$$AC = ED,$$

$$BC = BD - CD, \text{ folglich}$$

$$AB = \sqrt{(BD - CD)^2 + ED^2}.$$

Dritter Fall. Oder man mache AD Fig. 56 rechtwinklig zu AB, messe ein Stück AC und trage den nten Theil desselben von C aus auf CA oder in deren Verlängerung dergestalt, daß CF oder CD mit $\frac{1}{n}$. CA übereinstimmen. Wird nun entweder in F oder in D ein Perpendikel zu AD dargestellt, dessen Durchschnitt G oder E mit der Richtung CB gesucht und hierauf FG oder DE gemessen, dann folgt

$$AB = n \,.\, FG \text{ oder}$$

$$= n \,.\, DE.$$

Vierter Fall. In der Verlängerung von AB Fig. 57 messe man BC, errichte BD normal zu AB, suche in BD den Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel durch die Punkte A und C hindurch gehen, und messe BD, dann ist:

$$\triangle BDC \sim \triangle ABD,$$

$$\text{daher } BC : BD = BD : AB,$$

$$AB = \frac{BD^2}{BC}.$$

Fünfter Fall. Ist es nicht möglich, unmittelbar von B aus zu messen, dann wähle man in der Verlängerung von AB einen beliebigen Punkt D Fig. 58, führe durch ihn eine Richtung DC und fälle auf dieselbe Perpendikel durch B und A, nämlich EB und CA. Auf E errichte man ferner EF perpendikulär zu AD und messe die Stücke DE, DF und DC, so folgt leicht, wenn BG parallel zu DC gedacht wird:

$$\triangle DFE \sim \triangle ABG \text{ und daher}$$

$$FD : DE = BG : AB \text{ d. i.}$$

$$FD : DE = DC - DE : AB,$$

$$AB = \frac{DE\,(DC - DE)}{FD}.$$

Anmerkung. Ist es unthunlich, von E aus auf AD ein Perpendikel zu fällen, dann wird jeder andere Punkt von DC z. B. K oder L hierzu benutzt werden können. Nur sorge man dafür, ihn möglichst weit entfernt von D zu wählen.

Sechster Fall. Zur Seite von AB Fig. 59 wähle man eine beliebige Basis DE, so daß AD und BE perpendikulär zu DE sind, messe dieselbe, gebe deren Halbirungspunkt C an und von diesem aus zwei gleich große Stücke CF und CG in der Richtung DE, und errichte hierzu die Perpendikel FH und GI, welche die Richtungen CA und CB bezüglich in den Punkten H und I schneiden. Werden nun die Durchschnittspunkte K und L der Richtung HI mit den Richtungen DA und EB ermittelt, so ist $KL = AB$.

Denn man hat:

$$\triangle ADC \sim \triangle HFC \text{ und}$$

$$\triangle BEC \sim \triangle IGC, \text{ daher}$$

$$AC : HC = CD : CF = CE : CG,$$

$$\text{alsdann } BC : IC = CE : CG, \text{ mithin}$$

$$AC : HC = BC : IC,$$

folglich ist $\triangle ABC \sim \triangle HIC$, und deswegen HI parallel zu AB, also auch die Verlängerung von HI d. i. KL. Weil nun vermöge dieser Operationen DA auch parallel zu EB ist, so ergiebt sich hieraus

$$AB = KL.$$

Anmerkung. Gestattet das Terrain die Angabe der Punkte K und L nicht, so kann man $CG = \frac{1}{n} CE$ nehmen.

Dann aber ist $CI = \frac{1}{n} . CB$, und

$IH = \frac{1}{n} . AB$, folglich

$n . IH = AB$.

Siebenter Fall. Quer durch die zu bestimmende Gerade AB Fig. 60 hindurch führe man irgend eine Richtung NM und wähle in ihr den Punkt N, von welchem aus A und B gesehen werden können, suche hierauf die zwei Punkte E und D, in welchen Perpendikel aus B und A die Richtung NM treffen, und messe die Stücke CE, CD und CN, woraus durch Subtraction EN und durch Addition ND hervorgeht.

Nun untersuche man, welcher Theil NE von ND ist. Gesetzt, man fände den nten Theil, dann wird von E aus $EF = \frac{1}{n} . DC$ und $EG = \frac{1}{n} DE$ aufgetragen, darauf der Durchschnitt H der Richtungen BE und NA bestimmt, ferner aus G ein Perpendikel auf MN errichtet und dessen Durchschnittspunkt I mit NB angegeben.

Hiernach hat man, wie leicht dargethan werden kann:

$HI = \frac{1}{n} . AB$, daher

$AB = n . HI$.

Auch ergiebt sich von selbst, daß die Gerade HI durch F hindurch gehen muß, was als Bestätigung für die richtige Lage derselben anzusehen ist.

Achter Fall. Ist es möglich, das Winkelkreuz in einem Punkte C Fig. 61 der zu bestimmenden Geraden AB einzusetzen, so mache man CD perpendikulär zu AB, messe die beliebigen Längen CD und DE, errichte in E ein Perpendikel auf CD, suche dessen Durchschnittspunkte F und G mit den Richtungen DA und DB, und messe FG, so folgt:

$FG : AB = DE : DC$, hieraus

$$AB = \frac{FG . DC}{DE}.$$

Neunter Fall. Zeigt endlich das Winkelkreuz halbe rechte Winkel an, dann wird man bei der Forderung des vorigen Falles nur einen beliebigen Punkt C Fig. 62 in der zu messenden Geraden AB auswählen, durch ihn hindurch ein Perpendikel zu AB angeben, und in demselben so weit fortgehen, bis $\angle$ CDA der Hälfte eines rechten Winkels gleichkommt. Wird hierauf CD gemessen, so hat man damit auch schon den Theil CA von AB. Ebenso bestimmt sich der andere Theil CB.

§. 51.

Graphische Darstellung und Inhaltsbestimmung verschiedenartig gestalteter Figuren.

Wenn jetzt schon Darstellung und Inhaltsbestimmung der Figuren abgehandelt werden sollen, so geschieht dies besonders darum, weil diese Gegenstände nur noch an die vorangegangenen Operationen mit der Kette und dem Winkelkreuze angereiht zu werden brauchen, um ein Ganzes zu erlangen, das für die Zwecke der niederen Feldmeßkunst in vielen Fällen genügen wird. Ueberdies ändern die darzulegenden Methoden sich nicht, mögen nun die zur Erfüllung der vorliegenden Forderungen tauglichen Elemente entweder durch obige Meßgeräthschaften oder mittelst vollkommnerer später zu beschreibender erworben worden sein. Nie ist jedoch zu vergessen, daß in wichtigen Fällen, z. B. bei Theilung von Grundstücken, Anlage von Kunststraßen u. s. w., die Resultate der durch die Kette und das Winkelkreuz geführten Messungen durchaus nicht zu gebrauchen sind.

§. 52.

Aufgabe. Ein Dreieck soll graphisch dargestellt und sein Inhalt gefunden werden.

Auflösung.

a) Graphische Darstellung.

Zur Auftragung eines Dreiecks können dessen drei Seiten unmittelbar angewendet werden, sobald in ihm weder zu spitze noch zu stumpfe Winkel vorkommen.

Auf eine Gerade trage man nach einem verjüngten Maßstabe so viel Einheiten desselben auf, als in Wirklichkeit Längeneinheiten in einer der Seiten enthalten sind, und construire aus deren Endpunkten Kreisbogen mit Radien, welche bezüglich den verjüngten beiden anderen Seiten entsprechen. Hierdurch ergeben sich zwei Bogendurchschnitte, von denen ein jeder für den dritten Dreieckseckpunkt gewählt werden kann.

Beim Vorhandensein eines zu spitzen und damit verbundenen sehr stumpfen Winkels erfolgt die graphische Darstellung des Dreieckes zuverlässiger, indem eine der Seiten — etwa die größte — als Basis gewählt und auf ihr die Höhenlinie errichtet wird, wozu das Erforderliche entweder durch Berechnung oder unter Anwendung des Winkelkreuzes erlangt werden kann.

Zur Auftragung eines Dreieckes wie ABC Fig. 63 können auch

zwei Seiten AC und BC nebst dem von diesen eingeschlossenen Winkel ACB dienen. Letzterer würde in Ermangelung eines Winkelmeßinstrumentes dadurch zu erlangen sein, daß man von C aus gleich große Stücke CD und CE auf jenen Seiten abschnitte und die Sehne DE des Bogens DE durch directe Messung fände.

Trüge man nun nach einem verjüngten Maße an eine Gerade mn Fig. 64 ein Dreieck dce auf, dessen Seiten denen des Dreiecks DCE proportionirt wären, dann käme es blos noch darauf an, aus c auf mn eine der Seite CA proportionirte Länge ca anzugeben, ce zu verlängern, bis cb in Einheiten des verjüngten Maßes so viel beträgt, als CB in denen des wirklichen Maßes betragen hat, und endlich ab zu ziehen, um $\triangle$ cab $\sim$ $\triangle$ CAB zu haben.

Auch könnte die Größe des Winkels ACB oder DCE durch Rechnung gefunden werden, zu welchem Behufe man nur in eine der drei Formeln des §. 47 die dem vorliegenden Falle entsprechenden Werthe einführen dürfte. Hiernach würde sein:

$$\sin DCE = \frac{DE}{2DC^2} \sqrt{(2DC + DE)(2DC - DE)}.$$

Mittelst dieses Winkels und der ihn einschließenden Seiten ließe sich das Dreieck abc dann leicht unter Gebrauch eines den Reißzeugen gewöhnlich beigegebenen Transporteurs auf einem Blatte Papier darstellen, oder genauer mit Zuziehung solcher Tafeln, welche die wahren Längen der trigonometrischen Linien enthalten, deren es eine beträchtliche Anzahl giebt.*)

Wäre z. B. der Winkel DCE = 49° 17′ gefunden worden, so würde mittelst eines Transversal-Decimalmaßstabes, wie §. 16 einen solchen zeigte, auf nm ein die Einheit repräsentirendes Stück cg aufgetragen, in g ein Perpendikel zu mn construirt und selbiges, nämlich gh = 1,1619 .... oder circa 1,162 genommen, welche Zahl die Länge der Tangente dieses Winkels für den Radius = 1 ausdrückt. Zöge man nun ch, so schlössen gc und hc den darzustellenden Winkel von 49° 17′ ein, auf dessen Schenkeln die Auftragung der verjüngten Seiten ca und cb erfolgen und zuletzt durch die Endpunkte derselben eine

---

*) Die vorzüglichsten finden sich in der Vega'schen Sammlung mathematischer Tafeln, herausgegeben von Dr. J. A. Hülsse, Prof. und Director der Königl. Gewerbschule zu Chemnitz. Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung 1840.

Für den Handgebrauch besonders auf dem Felde eignen sich Rühlmann's logarithmisch-trigonometrische und andere nützliche Tafeln, zweite Auflage, Dresden und Leipzig in der Arnoldischen Buchhandlung 1840.

Gerade ab d. i. die dritte Seite des darzustellenden Dreieckes zu führen sein würde.

b) Inhaltsbestimmung.

Zur Inhaltsbestimmung eines Dreieckes bedarf es der graphischen Darstellung desselben nicht stets, indem sämmtliche hierzu erforderliche Elemente aus der directen Messung desselben hervorgehen. Wären z. B. die drei Seiten A, B und C eines Dreiecks gemessen worden, so hat man — wie die Elementargeometrie zeigt — den Inhalt des Dreieckes

$$1)\quad I = \sqrt{S\,(S-A)\,(S-B)\,(S-C)},$$

in welcher Formel $S = \frac{A+B+C}{2}$ ist.

Wurde eine der Seiten, etwa A, nebst der dazu gehörigen Höhenlinie H des Dreiecks gemessen, dann ist wie bekannt dessen Inhalt

$$2)\quad I = \frac{A \,.\, H}{2},$$

welche Formel gewöhnlich angewendet wird.

Es wurde oben gezeigt, wie der Winkel ACB Fig. 63 zu finden sei, ohne daß es nöthig wäre, das Dreieck ACB im verjüngten Maße aufzutragen. Dieser Winkel nun und die Längen der zwei ihn einschließenden Seiten CA und CB reichen vollkommen zur Bestimmung des Dreiecksinhaltes hin, denn man dafür hat:

$$3)\quad I = \frac{CA \,.\, CB \,.\, \sin ACB}{2}.$$

Beispiele.

1) Betragen die drei Seiten eines Dreieckes $20\frac{1}{8}$, $13\frac{1}{2}$ und $17\frac{3}{4}$ Ellen, so würde man nach Formel (1) dessen Flächeninhalt finden — da hier $S = \frac{20{,}125 + 13{,}5 + 17{,}75}{2} = 25{,}6875$ ist — zu

$$I = \sqrt{25{,}6875\,(25{,}6875-20{,}125)(25{,}6875-13{,}5)(25{,}6875-17{,}75)}$$
$$= \sqrt{25{,}6875 \,.\, 5{,}5625 \,.\, 12{,}1875 \,.\, 7{,}9375}$$
$$= 117{,}8406 \text{ □ Ellen.}$$

2) Ist die Grundlinie eines Dreieckes 1,3725 Decameter und dessen Höhe 7,2 Meter, dann folgt für den Inhalt nach der zweiten Formel:

$$I = \frac{13{,}725 \,.\, 7{,}2}{2} = 49{,}41 \text{ □ Meter.}$$

3) In Bezug auf Fig. 63 habe man durch directe Messung gefunden:

$$DC = CE = 10 \text{ Fuß}$$
$$DE = 7\tfrac{1}{2} \text{ "}$$
$$CA = 40\tfrac{1}{2} \text{ "}$$
$$CB = 52\tfrac{1}{4} \text{ " .}$$

Hiernach ist:

$$\sin DCE = \frac{7{,}5}{2 \,.\, 10^2} \sqrt{(2 \,.\, 10 + 7{,}5)\,(2 \,.\, 10 - 7{,}5)}$$
$$= \frac{3}{80} \sqrt{343{,}75},$$
$$\log \sin DCE = \log 3 + \tfrac{1}{2} \,.\, \log 343{,}75 - \log 80$$
$$= 9{,}8421526,$$

daher $\angle DCE = 44^\circ\, 2'\, 55''$.

Der Flächeninhalt des Dreieckes ABC ist mithin nach Formel (3)

$$I = \frac{40{,}5 \,.\, 52{,}25 \,.\, \sin 44^\circ\, 2'\, 55''}{2}$$
$$= 1058{,}0625 \,.\, \sin 44^\circ\, 2'\, 55'',$$
$$\log I = \log 1058{,}0625 + \log \,.\, \sin \,.\, 44^\circ\, 2'\, 55'',$$
$$= 3{,}0245115 + 0{,}8421525 - 1$$
$$= 2{,}8666641, \text{ woraus}$$

$I = 735{,}638$ □ Fuß hervorgeht.

§. 53.

Aufgabe. Ein Viereck darzustellen und zu berechnen.

Auflösung.

a) Das Quadrat.

Die Darstellung des einfachsten aller Vierecke d. i. des Quadrates erfolgt entweder durch rechtwinklige Zusammensetzung von vier gleichgroßen Linien, oder mittelst der sich ebenfalls rechtwinklig schneidenden Diagonalen, und kann als für sich einleuchtend angesehen werden.

Was den Flächeninhalt des Quadrates anlangt, so dient hierzu entweder eine Seite oder eine Diagonale, und man hat, wenn a und b beziehentlich dieselben bedeuten, für den Inhalt:

1) $I = a^2$

2) $I = \frac{b^2}{2}$.

b) Das Rectangel.

Auch die Darstellung dieser Figur bedarf der Erläuterung kaum, indem hierbei nur die rechtwinklige Aneinanderfügung der Seiten in ihren Endpunkten bewirkt zu werden braucht.

Der Flächeninhalt I des Rectangels wird entweder mittelst seiner beiden Seiten a und b oder nur einer derselben, etwa a, nebst einer Diagonale d gefunden, und es ist:

$$3)\quad I = ab$$

$$4)\quad I = a\sqrt{(d+a)(d-a)}.$$

c) Das Trapez.

Die zur Darstellung eines Trapezes tauglichen Elemente sind entweder mittelst der Kette allein oder unter Zuziehung des Winkelkreuzes zu erlangen, und bestehen im ersten Falle in sämmtlichen Seiten und einer Diagonale, im zweiten in einer der parallelen Seiten, etwa AB Fig. 65, nebst ihrem Abstande DG = CH und den Entfernungen GA und HA dieser Perpendikel von A.

Auch reicht es hin, eine der Diagonalen, vielleicht AC, zu messen, so wie die aus den Eckpunkten D und B auf selbige gefällten Perpendikel DE und BF, zugleich mit den Entfernungen derselben d. i. EA und FA vom Punkte A.

Solchergestalt wird man dann für den Flächeninhalt des Trapezes haben:

$$5)\quad I = \triangle ACD + \triangle ACB$$

$$6)\quad I = (AB + CD) \cdot \frac{CH}{2}$$

$$7)\quad I = (DE + FB)\frac{AC}{2}.$$

d) Das Trapezoid.

Wiederum können bei diesem Vierecke entweder sämmtliche Seiten nebst einer Diagonale direct gemessen werden, oder nur letztere AC Fig. 66 so wie die Perpendikel auf dieselbe DE und BF mit Hinzuziehung des Abstandes EA und FA eines jeden derselben vom Punkte A; welches letztere Verfahren für das Winkelkreuz sich eignet. Für dieses Instrument erscheint auch folgendes Verfahren empfehlungswerth, nämlich die Seite AB des Viereckes Fig. 67 zu messen, und nachher die Perpendikel DG und CH auf solcher, zugleich auch deren Entfernungen GA und HA vom Punkt A.

Besonders gewährt dieses Verfahren beim Auftragen des Trapezoids im verjüngten Maße Einfachheit und mehr Sicherheit, als eine

jede der vorigen Methoden, und läßt überdies die Inhaltsbestimmung der Figur sofort zu, ohne daß es noch der Dazwischenkunft neuer Hülfslinien bedürfte.

Die Formeln (5) und (7) dienen zugleich zur Inhaltsbestimmung des Trapezoides, insofern erstere solches als zwei abgesonderte Dreiecke darstellt, letztere hingegen die gemeinschaftliche Basis AC derselben in sich begreift.

Um nach dem dritten vorhin angedeuteten Verfahren den Inhalt des Trapezoides zu finden, vollende man die Rectangel AEDG, GHCF, DICF und HBKC, und folgere:

$$I = AGD + GHID + DIC + HBC$$
$$2I = 2AGD + 2GHID + 2DIC + 2HBC$$
$$2I = AGDE + GHID + GHID + DICF + HBKC$$
$$2I = AHIE + GBKF \text{ d. i.}$$

8) $2I = DG \,.\, AH + CH \,.\, GB.$

Wird von dem Punkte A ausgehend AB als Abscissenlinie angesehen, so sind GD und HC Ordinaten derselben, daher man, um den doppelten Inhalt des Trapezoides ABCD zu erhalten, nur eine jede der Ordinaten mit der Differenz der benachbarten Abscissen zu multipliciren und die erhaltenen Produkte zu addiren nöthig hat; eine Regel, von der wir im Folgenden in größerer Allgemeinheit Anwendung machen werden.

Beispiele.

1. Die Seite eines Quadrates betrage 17,34 Ellen, so ist dessen Inhalt

$$I = 17{,}34^2 = 300{,}6756 \text{ □Ellen}$$
$$= 300 \text{ □Ellen } 389 \text{ □Zoll } 20{,}96 \ldots \text{□Linien.}$$

2. Kommen auf die Diagonale eines Quadrates 9 Fuß 11 Zoll, so beträgt dessen Inhalt

$$I = \frac{(9\frac{11}{12})^2}{2} = 49\frac{49}{288} \text{ □Fuß}$$
$$= 49 \text{ □Fuß } 24\tfrac{1}{2} \text{ □Zoll.}$$

3. Sind 3,04 und 0,97 Meter bezüglich die Längen der zwei Seiten eines Rectangels, so folgt für dessen Inhalt

$$I = 3{,}04 \times 0{,}97 = 2{,}9488 \text{ □Meter}$$
$$= 2 \text{ □Meter } 94 \text{ □Decimeter } 88 \text{ □Centimeter.}$$

4. Die Diagonale eines Rectangels messe 130,75 und eine der Seiten 12,55 Ruthen, so erhält man für dessen Inhalt

$$I = 12{,}55 \sqrt{(130{,}75 + 12{,}55)(130{,}75 - 12{,}55)}$$
$$= 12{,}55 \sqrt{143{,}3 \,.\, 118{,}2}$$
$$= 1634{,}335 \text{ □ Ruthen}$$
$$= 10 \text{ Scheffel } 14{,}32 \text{ Metzen.}$$

5. 13, 22, 18 und $38\frac{1}{2}$ Ellen mögen bezüglich die Seiten AD, DC, CB und AB Fig. 65 eines Trapezes betragen, $28\frac{1}{2}$ Ellen die Diagonale AC, so ist dessen Flächeninhalt

$$I = \triangle ACD + \triangle ACB$$
$$= \sqrt{31{,}75\,(31{,}75 - 13)(31{,}75 - 22)(31{,}75 - 28{,}5)}$$
$$+ \sqrt{42{,}5\,(42{,}5 - 28{,}5)(42{,}5 - 18)(42{,}5 - 38{,}5)}$$
$$= \sqrt{31{,}75 \,.\, 18{,}75 \,.\, 9{,}75 \,.\, 3{,}25} + \sqrt{42{,}5 \,.\, 14 \,.\, 24{,}5 \,.\, 4}$$
$$= 137{,}346 + 241{,}474$$
$$= 378{,}821 \text{ □ Ellen.}$$

6. Die parallelen Seiten eines Trapezes sind 14 und 39 Zoll lang, ihr Abstand beträgt 10 Zoll, so ist der Flächeninhalt des Trapezes

$$I = (14 + 39)\tfrac{10}{2} = 53 \,.\, 5 = 265 \text{ □ Zoll.}$$

7. Wären für die Diagonale AC (Fig. 65) 24, und für die Perpendikel auf ihr DE und BF $6\frac{1}{2}$ und $14\frac{1}{3}$ Ellen gefunden worden, dann würde man für den Inhalt haben:

$$I = (6\tfrac{1}{2} + 14\tfrac{1}{3}) \,.\, \tfrac{24}{2} = 250 \text{ □ Ellen.}$$

8. Mit Bezug auf Fig. 67 habe man

$$AG = 12 \text{ Meter}$$
$$AH = 21 \;\;"$$
$$AB = 39 \;\;"$$
$$GD = 17 \;\;"$$
$$HC = 24 \;\;"$$

gefunden. Dann ist der doppelte Inhalt des Trapezoids, oder

$$2I = 17 \,.\, 21 + 24 \,.\, 27 = 1005,$$

daher $I = 502{,}5$ □ Meter

$= 5$ Ares 2,5 □ Mètres.

§. 54.

Aufgabe. Irgend ein Vieleck aufzutragen und zu berechnen.

Auflösung. Entweder wird man dasselbe in Dreiecke zerlegen, die Seiten derselben messen und mittelst der bekannten Seitenlängen die Dreiecke in ihrer gehörigen Folgeordnung aneinander reihen, oder besser eine Linie annehmen, etwa die Seite AF Fig. 68, und auf dieselbe unter Gebrauch des Winkelkreuzes Perpendikel Bb, Cc, Dd .... aus den Eckpunkten fällen, so wie diese Perpendikel nebst ihren Entfernungen von A oder B aus messen. Auf einem Blatte Papier ist in jedem Falle zur Vermeidung von Irrungen ein Entwurf der Figur mit freier Hand anzufertigen, ein Brouillon, und in denselben an eine jede der Dreiecksseiten oder der zuletzt erwähnten perpendikulären Linien die Zahl anzumerken, welche der Länge derselben entspricht. Hierdurch entsteht eine Sammlung von Elementen, mittelst welcher dann leicht nach einem verjüngten Maßstabe die graphische Darstellung der Figur erfolgen kann, einer Figur, welche der auf dem Felde oder sonst durch die Eckpunkte A, B, C... gedachten desto mehr ähnlich sein wird, mit je größerer Sorgfalt das Messen und Auftragen der einzelnen Stücke stattgefunden hat.

Pflegt nun schon die graphische Darstellung der Figur nebst der Angabe ihres Flächeninhaltes in der Regel gleichzeitig gefordert zu werden, so ist indessen diese ohne jene sehr wohl denkbar. Behufs der Inhaltsbestimmung selbst wird man die Inhaltszahlen entweder aller Dreiecke summiren, in welche die Figur zerlegt wurde, oder der Trapeze, wären diese den Dreiecken vorgezogen worden.

Das Vieleck ABC...F Fig. 68 erscheint in drei Trapeze und zwei Dreiecke zerlegt, deren Inhaltszahlen nur summirt werden dürfen, um den Inhalt des Vielecks zu erhalten. Offenbar aber wird diese Methode jener in §. 53 angeführten hintanzustellen sein. Denn führt man die dort angegebene Regel hinsichtlich des vorliegenden Falles weiter aus, so folgt:

$$\begin{aligned} 2I = &\ AfBb + 2Bbch + BgCh \\ &+ 2cCkd + CkDi + 2dlEe \\ &+ lEmD + eFnE \\ = &\ Bb \,.\, Ac + Cc \,.\, bd + Dd \,.\, ce + Ee \,.\, dF, \end{aligned}$$

d. i. der Summe der Produkte aus einer jeden Ordinate in die Differenz der benachbarten Abscissen.

Anmerkung. Wäre AF nur Diagonale, nicht Grenzlinie des Vieleckes, breitete sich dieses vielmehr unterhalb AF weiter aus, dann würde mit dem anderen Stück wie mit dem einen zu verfahren sein, wobei der Fall leicht eintreten kann, daß ein Bestandtheil z. B. das Dreieck KHI nicht in das System der

Trapeze aufgenommen zu werden vermag und alsdann einzeln zu berechnen ist. In Bezug auf Fig. 68 wird man daher haben:

$$2I = Bb \cdot Ac + Cc \cdot bd + Dd \cdot ce + Ee \cdot dF$$
$$+ Lr \cdot Aq + Kq \cdot rp + Hp \cdot qo + Go \cdot pF$$
$$+ KH \cdot sI$$

sobald sI ein Perpendikel auf HK vorstellt.

§. 55.

Behufs der Ausmessung im Innern unzugänglicher Figuren giebt es mehrere Verfahrungsarten, von denen hier nur die wichtigsten erwähnt werden sollen. Auch geht alsdann stets der Inhaltsbestimmung der Figur die graphische Darstellung derselben voran.

1. Methode. Sämmtliche Seiten des Vieleckes werden direct gemessen und die den erhaltenen Längen entsprechenden Zahlen an den betreffenden Seiten eines Brouillons angemerkt. Alsdann oder sogleich neben diesem ersten Geschäft verlängert man je zwei benachbarte Seiten über ihren Durchschnittspunkt hinaus, z. B. AB Fig. 69 nach b, AF nach a zu, macht diese Verlängerungen beliebig lang — gewöhnlich 10 bis 15 Fuß — und zwar der Einfachheit wegen Ab = Aa, und bestimmt die Entfernung der Endpunkte a und b durch directe Messung. Hierdurch wird das Dreieck Aab bekannt, dessen Winkel bei A als Scheitelwinkel dem Umfangswinkel bei A entspricht, so daß nun die Seiten AB und AF auf einem ebenen Blatte Papier in verjüngtem Maße gehörig aneinander gelegt werden können. Hierzu genügt es jedoch schon, nur eine Seite z. B. AB zu verlängern, vielleicht um den möglichst groß zu wählenden Betrag Bc, dann auf BC von B aus ein Stück Bd = Bc aufzutragen und cd zu messen. Selbst ein Perpendikel cn aus c auf BC kann zur Darstellung der Seite BC hinreichen, wenn nur nicht versäumt wird, dieses selbst so wie seinen Abstand nB von B zu messen.

Auf die eine oder die andere Art ist dann mit den übrigen Eckpunkten des Vieleckes zu verfahren, und als Bestätigung für die Richtigkeit der Operation der Umstand anzusehen, daß in den auf dem Blatte schon vorhandenen Endpunkt F der Seite AF der Endpunkt F der Seite EF freiwillig hineinfällt.

Nun ist wohl nicht zu leugnen, daß der Inhalt des Vieleckes berechnet werden kann, ohne solches vorher nach einem verjüngten Maßstabe aufgetragen zu haben, denn aus den vorher angesammelten Elementen folgen leicht die Umfangswinkel bei A, B, C . . . . und mittelst dieser die Inhalte der Dreiecke, in welche das Vieleck zerlegt gedacht

wird; allein nur selten wählt man diesen Weg, sondern da gewöhnlich neben der Inhaltsbestimmung auch das Bild des Vielecks gefordert wird, so wird erst nach Vollendung desselben die Flächenberechnung ausgeführt. Alsdann erscheinen alle Dimensionen zugänglich, so daß je nach Gefallen die eine oder die andere der im vorigen §. angegebenen Berechnungsmethoden in Anwendung zu bringen ist.

2. Methode. Mehr Genauigkeit gewährend und für das Winkelkreuz hauptsächlich sich eignend ist das Verfahren, wonach man zur Seite des im Innern unzugänglichen Vieleckes eine beliebige Richtung oder ein Alignement MN Fig. 70 als Abscissenlinie wählet, und in ihr einen Punkt x als Anfangspunkt der Abscissen xa, xh, xg . . . . dergestalt, daß die Endpunkte der zugehörigen Ordinaten aA, hH, gG . . . . mit jenen Eckpunkten der Figur zusammenfallen, welche auf der Seite von MN gelegen sind. Werden die genannten Abscissen und Ordinaten gemessen, so liefern sie den Bedarf zur verjüngten Darstellung des nach MN zu gelegenen Theils des Perimeters, nämlich der Seiten AH, HG, GF und FE.

Durch x hindurch ist ein zweites Alignement TS zu führen und dessen Lage zu MN vermittelst directer Messung der Seiten des Dreieckes xkm zu bestimmen, welcher Bestimmung man überhoben sein wird, sobald das Terrain es erlaubt, TS rechtwinklig zu MN zu wählen. Auf TS nun werden von allen nach ihr zu gelegenen Eckpunkten des Vieleckes Perpendikel oder Ordinaten Hh′, Aa″ und Bb′ gefällt, dieselben gemessen, so wie deren Abstände oder Abscissen von x aus, xh′, xa″ und xb′, wodurch neues Material zur Fortsetzung der Auftragung des Vieleckes gewonnen wird, auch nebenbei für den Eckpunkt A eine Bestätigung sich ergiebt, indem solcher als gemeinschaftlicher Endpunkt der beiden Ordinaten aA und a″A erscheint.

In TS wird, Behufs der Führung eines neuen Alignements QR ein geeigneter Punkt w zu finden und dessen Entfernung von x durch directe Messung anzugeben sein. Wie vorhin erfolgt die Ermittelung der Lage von QR zu TS so wie die Benutzung derselben als Abscissenlinie zur Bestimmung neuer Eckpunkte des darzustellenden Vieleckes, desgleichen die Wahl eines vierten Alignements PO.

Von selbst werden sich hierbei für mehrere Eckpunkte Bestätigungen ergeben, so wie als eine solche das Zusammenfallen des Endpunktes y der gemessenen Geraden zy mit dem Endpunkte y der gleichfalls gemessenen xy anzusehen ist. Ist man aber einmal im Besitz der verjüngten Darstellung des Vieleckes ABC . . . ., dann wird dessen Inhalt entweder durch Zerlegung in Dreiecke oder Trapeze zu erhalten sein, oder

auch dadurch, daß man ihn als Rest ansieht, welcher übrig bleibt, wenn vom Inhalte der Figur xyzw der zwischen den Grenzen derselben und denen des fraglichen Vieleckes enthaltene Flächenraum subtrahirt wird.

§. 56.

Aufgabe. Eine krummlinige, im Innern zugängliche Figur in verjüngtem Maße darzustellen und deren Flächeninhalt zu berechnen.

Auflösung. Am besten wird der Forderung entsprochen werden, wenn man ein Alignement MN Fig. 71 so wählt, daß der von ihm in das Innere der Figur hineinfallende Theil AB vollständig oder doch beinahe den größten Diameter bildet. Er dient als Abscissenlinie, deren zugehörige Ordinaten je nach der verlangten Genauigkeit der graphischen Darstellung und Inhaltsangabe mehr oder weniger weit von einander entfernt anzunehmen sind, um das zwischen den Endpunkten zweier benachbarten Ordinaten gelegene Stück der krummen Linie einer geraden gleich erachten zu können.

Auf diese Weise zerfällt die Figur in Trapeze und nach Befinden Dreiecke, deren Inhaltszahlen entweder einzeln aufzufinden und zu summiren sind, oder wofür die Regel des §. 54 leicht angewendet werden kann. Darstellung und Inhaltsbestimmung der Figur werden ungemein vereinfacht, sobald das Terrain es erlaubt, die Ordinaten der einen Seite von AB in den Verlängerungen der Ordinaten der anderen Seite zu wählen; auch kann es sich ereignen, daß die äußersten Ordinaten op und qr als Abscissenlinien für neue Ordinaten lk, aA, hi und nm, gB anzunehmen sind.

Wird von dieser letzteren Zerlegung abgesehen, d. h. sind op und qr bezüglich nahe genug an A und B errichtet worden, so daß die Krümmungen pA, Ao, rB und Bq mit geraden Linien verwechselt werden können, dann würde nach obiger Regel für den Flächeninhalt der krummlinigen Figur gefunden werden:

$$
\begin{aligned}
2I &= oa \,.\, Ab + sb \,.\, ac + tc \,.\, bd + ud \,.\, ce \\
&\quad + ve \,.\, df + wf \,.\, eg + qg \,.\, fB + pa \,.\, Ab \\
&\quad + s'b \,.\, ac + t'c \,.\, bd + u'd \,.\, ce + v'e \,.\, df \\
&\quad + w'f \,.\, eg + rg \,.\, fB \\
&= (oa + pa)\, Ab + (sb + s'b)\, ac + (tc + t'c)\, bd \\
&\quad + (ud + u'd)\, ce + (ve + v'e)\, df + (wf + w'f)\, eg \\
&\quad + (qg + rg)\, fB \\
&= op \,.\, Ab + ss' \,.\, ac + tt' \,.\, bd + uu' \,.\, ce \\
&\quad + vv' \,.\, df + ww' \,.\, eg + qr \,.\, fB.
\end{aligned}
$$

§. 57.

Gestatten es die Umstände, die Ordinaten in gleichen Entfernungen von einander zu wählen, dann theile man die Abscissenlinie AO Fig. 72 in eine gerade Anzahl, etwa in n gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten die Ordinaten AB, DC, EF .... und finde den Flächeninhalt der Figur BNOA durch folgende Betrachtung.

Angenommen, man habe die Ordinaten schon so nahe an einander gestellt, daß die zwischen ihren Endpunkten enthaltenen Bogenstücke BC, CF, FL .... von geraden Linien d. h. von ihren Sehnen BC, CF, FL .... kaum merkbar abweichen, dann leuchtet ein, daß dies noch mehr der Fall sein wird, wenn man die Ordinaten einander beträchtlicher z. B. bis auf zwei Drittheil des vorigen Abstandes nähert, d. h. $AG = GK = KE = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}DE = \frac{2}{3}h$ macht.

Der Flächeninhalt des Stückes ABFE der krummlinigen Figur ist hiernach

$$= \frac{2}{3}h\left(\frac{AB+GH}{2}\right) + \frac{2}{3}h\left(\frac{GH+IK}{2}\right) + \frac{2}{3}h\left(\frac{IK+FE}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\,[AB + 2GH + 2IK + FE]$$

$$= \frac{h}{3}[AB + 2\,(GH + IK) + FE]$$

$$= \frac{h}{3}(AB + 4CD + FE)$$

$$= \frac{h}{3}(a_1 + 4a_2 + a_3)$$

sobald a_1, a_2, a_3 die Ordinaten in ihrer Folgeordnung bezeichnen; welche Bezeichnungsweise für die ferneren Ordinaten durch a_4, a_5, a_6 .... fortgesetzt werden mag.

Auf ähnliche Art findet man das nächste Flächenstück EFNO

$= \frac{h}{3}(a_3 + 4a_4 + a_5)$, das darauf folgende

$= \frac{h}{3}(a_5 + 4a_6 + a_7)$ u. s. w.

Der Gesammtinhalt aller dieser Flächenstücke d. h. der Inhalt der krummlinigen Figur ist folglich gleich

$$I = \frac{h}{3}(a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 4a_4 + 2a_5 + 4a_6 + \ldots\ldots + a_{n+1}).$$

Gleichbedeutend hiermit ist:

$$I = \frac{h}{3}[a_1 + a_{n+1} + 4(a_2 + a_4 + a_6 + \ldots) + 2(a_3 + a_5 + a_7 + \ldots)]$$

woraus die Regel folgt:

Man addire zur Summe der äußersten Ordinaten die vierfache Summe aller geradstelligen und die doppelte Summe aller ungeradstelligen Ordinaten, und multiplicire die Totalsumme mit dem dritten Theile des Abstandes je zweier Ordinaten, welche Regel von Thomas Simpson erfunden und in dessen Mathematical dissertations. London 1743 mitgetheilt worden ist.

Für im Innern unzugängliche Figuren ist Behufs ihrer graphischen Darstellung und Inhaltsbestimmung die in §. 55 dargelegte zweite Methode anzuwenden.

Beispiel. Man habe die Simpson'sche Regel auf den durch Fig. 71 dargestellten Fall anzuwenden, in Bezug auf welchen $n = 8$, $Aa = ab = \ldots = gB = h = 2$ achtellige Ruthen. Ueberdies sei in diesen Längeneinheiten $op = 5$, $ss' = 6\frac{1}{2}$, $tt' = 7$, $uu' = 6\frac{3}{4}$, $vv' = 5\frac{3}{4}$, $ww' = 4\frac{1}{2}$, $qr = 3$.

Da hier die äußersten Ordinaten zu Null geworden sind, so folgt als Vereinigung der auf beiden Seiten von AB gelegenen Flächenstücke der fragliche Inhalt

$$I = \frac{h}{3}[4(op + tt' + vv' + qr) + 2(ss' + uu' + ww')]$$

$$= \frac{2h}{3}[2(op + tt' + vv' + qr) + ss' + uu' + ww']$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{3}[2(5 + 7 + 5\tfrac{3}{4} + 3) + 6\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{3}{4} + 4\tfrac{1}{2}]$$

$$= \frac{4}{3}(41\tfrac{1}{2} + 17\tfrac{3}{4}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{237}{4} = 79 \text{ achtellige Quadratruthen.}$$

Anmerkung. Sollte dieser Inhalt in landesüblichen Quadratruthen à $7\frac{7}{12}$ Ellen Seitenlänge ausgedrückt werden, so würde, bezeichnete man ihn durch x, stattfinden:

$$8^2 : (7\tfrac{7}{12})^2 = x : 79 \text{ d. i.}$$

$$64 : \frac{8281}{144} = x : 79 \text{ oder}$$

$$9216 : 8281 = x : 79, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{9216 \cdot 79}{8281} = 86{,}807 \text{ Landes } \square \text{ Ruthen.}$$

§. 58.

Wenn wir zurückblicken auf die mit der Kette und dem Winkelkreuze ausführbaren Operationen, so erscheint als gemeinschaftliches Merkmal derselben directe oder indirecte Messung von Linien und Winkeln. Nur diese beiden Arten von Größen kamen in Betracht, mochte es sich um die graphische Darstellung oder Inhaltsbestimmung einer Figur oder um die Ausführung geometrischer Constructionen auf dem Felde handeln. Gerade Linien und Winkel waren die Elemente, welche angesammelt werden mußten, um irgend eine den begrenzten Raum betreffende Frage zu beantworten, und auch künftig wird auf die Erwerbung nur dieser ausgegangen werden. Als Hülfsmittel hierzu dient der Apparat der praktischen Geometrie d. h. ein Inbegriff von Instrumenten und Geräthschaften, welche füglich in zwei Classen geschieden werden können, insofern die eine Linien, die andere Winkel darzustellen oder zu messen bestimmt ist. Die ersteren anlangend, so mögen dieselben hier als in dem Vorangegangenen erledigt angesehen werden, während letztere uns im Nachfolgenden beschäftigen sollen, da von diesen nur ein einziges, nämlich das im Allgemeinen nur einer beschränkten Anwendung fähige Winkelkreuz, bis jetzt betrachtet worden ist.

Drittes Capitel.

Von den Winkelmeßinstrumenten.

§. 59.

In der Benennung dieser Instrumente ist die Erklärung ihres Begriffs von selbst enthalten, daher nur deren Bestimmung, Einrichtung und Gebrauch zu besprechen übrig bleiben. Sie dienen theils zur unmittelbaren Angabe der Größe der Winkel, theils zur graphischen Darstellung derselben, öfters aber für beide Zwecke zugleich. Zur Classe der ersteren gehört der eingetheilte Kreis in seinen mancherlei Gestalten, als Gradbogen, Theodolit, Spiegelsextant u. s. w. Durch die Mensel erfolgt das graphische Darstellen der Winkel, während die Boussole geeignet ist jenen Anforderungen gleichzeitig zu entsprechen. Anlangend die Einrichtung und den Gebrauch dieser Instrumente, so wird bei der Aufzählung der wichtigsten derselben hiervon die Rede sein.

§. 60.

Die Boussole.

Bekanntlich nimmt eine im Schwerpunkte aufgehängte, sonst aber gänzlich frei schwebende Magnetnadel eine vom Erdmagnetismus abhängige Lage an. Dieselbe wird bestimmt in Bezug auf zwei untereinander normale Ebenen, nämlich die Meridianebene und die Horizontalebene des Schwerpunktes der Nadel, indem man den Winkel angiebt, welchen die durch die Mittellinie der Nadel gedachte Verticalebene d. i. der magnetische Meridian mit dem astronomischen Meridian des Schwerpunkts der Nadel bildet, und alsdann den Winkel dieser Mittellinie mit der Horizontalebene des Schwerpunktes der Nadel. Jener heißt die magnetische Abweichung oder Declination, dieser die Neigung oder Inclination der Nadel, deren Größen bekannt sein müssen, soll anders von der Magnetnadel zum Messen der Winkel Gebrauch gemacht werden.

Ein vorzügliches, ja kaum zu übertreffendes Mittel zu Winkelmessungen nicht nur, sondern auch zu deren Auftragung oder graphischer Darstellung würde in der Magnetnadel dargeboten sein, wäre deren Declination und Inclination unveränderlich. Fortwährend befindet sich jedoch die Nadel in Bewegung, indem sie aus ihrer nur für einen Augenblick geltenden Lage bald östlich bald westlich abweicht, eben so zum Horizont bald mehr bald weniger geneigt erscheint. Dabei geben diese Bewegungen sich als unregelmäßige und regelmäßige zu erkennen, indem die Nadel unaufhörlichen, öfters plötzlich verstärkten Schwankungen unterliegt, andererseits innerhalb eines Tages von einer größten östlichen zu einer größten westlichen Abweichung, oder von einer höchsten bis zu einer tiefsten Neigung zum Horizont zurückkehrt, welche Bewegung für größere Zeiträume an Regelmäßigkeit zunimmt. So war die Declination der Magnetnadel zu Paris

im Jahre	1580	11°	30′	östlich
" "	1663	0°	—	"
" "	1814	22°	34′	westlich
" "	1835	22°	4′	"
die Inclination " "	1671	75°		
" "	1835	67°	24′	

woraus hervorgeht, daß die westliche Declination abnimmt und die Richtung der Nadel dem Horizonte sich nähert.

Bei uns wird die westliche Declination der Magnetnadel gegen-

wärtig zu 16° 35′ 41″, die Inclination ungefähr zu 67° angenommen werden können.*)

Für die gewöhnliche Anwendung der Magnetnadel ist es erforderlich, die Inclination derselben durch Anbringung eines Gegengewichts oder entsprechende Vertheilung der Masse der Nadel zu beiden Seiten ihres Aufhängepunktes aufzuheben, damit sie nur horizontale Schwingungen vollbringt. Dann aber pflegt man die Nadel keineswegs an einem Faden aufzuhängen, sondern mittelst einer feinen vertical gerichteten Stahlspitze zu unterstützen, und zur Verminderung der Reibung an der Stelle der Unterstützung mit einem Hütchen aus Messing oder hartem Steine, gewöhnlich Achat, zu versehen.

In dieser Auffassung erscheint die Nadel als Declinationsnadel, als ein an und für sich schon brauchbares, in der Physik häufig angewendetes Mittel zur Darthuung magnetischer Kräfte, welcher Nadel nur noch ein eingetheilter Horizontalkreis untergebreitet zu werden braucht, dergestalt, daß dessen Mittelpunkt in die verticale Axe der Spitze hineinfällt, damit eins der nützlichsten, dem Berg- und Forstmanne so wie dem Seefahrer unentbehrlichen Instrumente zum Messen der Winkel, nämlich die Boussole oder der Compaß zu Stande kommt.

§. 61.

Die Magnetnadel der Boussole ist pfeilförmig, rhombisch, prismatisch mit Abschrägungen an den Enden, eingetheilte Bogenstücke tragend und in mancherlei anderer Gestalt ausgeführt worden; inzwischen sieht man für die gewöhnlichen Zwecke der praktischen Geometrie die prismatische Form als die geeignetste an, sowohl wegen der sichereren Ablesung der Winkel, als auch wegen der größeren magnetischen Intensität gegenüber der rhombischen, blattdünnen Nadel.

Eine Boussole dieser Art, in ein Viertel der linearen, natürlichen Größe und isometrisch projicirt, zeigt Fig. 73. In ihr stellt MTPU eine rectanguläre Messingplatte dar, welche durch drei in die Gewinde m, n und q, eindringende Schrauben auf einem Stative befestigt werden kann. In der Mitte der Platte erhebt sich normal zu dieser eine Stahlspitze von ½ Zoll Länge, welche die Magnetnadel ab trägt. Ein Hütchen t, aus dem härtesten Stahle und von einem Messingfutter einge-

*) Diese Angaben entsprechen den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1841, herausgegeben von Gauß und Weber, so wie denen über die Magnetabweichung im Jahre 1844, enthalten im Jahrbuche für den Berg- und Hüttenmann auf das Jahr 1846.

schloſſen, bewirkt die Verbindung der Magnetnadel mit der Spitze dergeſtalt, daß — zur Vermeidung allzu großer Empfindlichkeit — der Schwerpunkt der Nadel etwas unterhalb ihres Stützpunktes fällt. In die Are der Spitze fällt die Drehungsaxe der Nadel, deren Endpunkte a und b von jener gleichweit abſtehen, ſo daß dieſe ſich in der Peripherie eines und deſſelben Kreiſes bewegen, deſſen Ebene beim Gebrauch der Bouſſole horizontal gemacht wird.

Ginge die Axe der Spitze durch den Halbirungspunkt der Nadelmaſſe d. h. durch deren Schwerpunkt hindurch, dann würde die Nadel der magnetiſchen Declination und Inclination folgend eine zum Horizont ſchräge Lage gegen den magnetiſchen Nordpol der Erde einnehmen, und mit ihrem Südpole b nur dann frei über einem eingetheilten Horizontalkreiſe ſchweben können, ſobald die Entfernung der Ebene deſſelben vom Stützpunkte kleiner als $r \cdot \cos \varphi$ wäre, — wobei r und φ beziehentlich die halbe Länge und die Inclination der Magnetnadel bedeuten, — im Gegentheil aber auf dieſen ſich ſtützen und folglich zu Winkelmeſſungen unbrauchbar ſein. Der Inclination wird nun entweder durch Vermehrung der Maſſe auf der Seite des Nordpols der Nadel, oder durch Verminderung derſelben nach ihrem Südpole hin entgegengewirkt; da aber die Inclination nicht conſtant iſt, ſo ſind jene Nadeln vorzuziehen, bei welchen durch einen beweglichen Schieber aus Meſſing auf der Seite des Nordpols das Verbleiben der Nadelenden a und b in der nämlichen Horizontalebene bewerkſtelligt werden kann.

Behufs genauer und leichter Ableſung der Winkel iſt die Nadel an ihren Enden mehrfach abgeſchrägt und zu raſcher Orientirung ihr Südpol d. h. die dem magnetiſchen Nordpol der Erde zugewendete Seite durch blaue Anlaſſung bezeichnet. Sie ſpielt über einem, im Innern eines, mit der Grundplatte **MP** feſt verbundenen Gehäuſes Q, angebrachten Horizontalkreiſe, deſſen Eintheilung von 0 bis 360° fortſchreitet, wovon die ganzen Grade in Viertelgrade zerfallen, ſo daß mindeſtens Achtelgrade noch mit Sicherheit abgeleſen werden können.

Das Gehäuſe wird durch eine ſorgfältig eben abgeſchliffene, der oberen Fläche der Meſſingplatte **PUMT** ſo wie dem Horizontalkreiſe parallele Glasplatte bedeckt und ſolche im Gehäuſe mittelſt eines gut eingepaßten Ringes feſtgehalten. Während durch dieſe Glasplatte das Innere des Gehäuſes gehörig geſchützt iſt, dient dieſelbe zugleich auch weſentlich beim Horizontalſtellen des Inſtruments, indem auf dieſelbe eine Libelle — von welcher weiter unten die Rede ſein wird — aufgeſetzt wird. Von der inneren Fläche der Glasplatte iſt beim Gebrauch des Inſtrumentes das Hütchen der Nadel etwa um den Betrag einer Linie

entfernt, während sie an diese durch eine Hebelvorrichtung avsw — die Arretirung genannt — beim Nichtgebrauch fest angedrückt wird. An dem Ende des Hebels v befindet sich zu diesem Behuf ein Conus u, welcher in eine entsprechende Vertiefung des Nadelhütchens t hineinpaßt, so daß die Nadel mittelst ihrer auf dem Conus auffitzt, wenn dieser emporsteigt, d. h. ihre vorige Unterstützung mit dieser neuen vertauscht. Die Drehungsaxe des Hebels ist durch zwei Stifte gegeben, welche auf dessen unterer Seite herabgehen und auf den Grund des Nadelgehäuses sich stützen. Am Ende des kürzeren Hebelarmes ist eine Abschrägung vorhanden, auf welcher ein Stift ruht, der mit einem durch den Knopf w leicht beweglichen Schieber in Verbindung steht. Dieser Schieber ist nach der äußeren Krümmung des Gehäuses abgerundet und wird mittelst einer durch eine Führung hindurchgehenden Schraube s an der Wand Q des Gehäuses angehalten, so daß er daran hin und her geschoben werden kann. In der Figur ist die Stellung des Schiebers für den freien Stand der Nadel abgebildet.

Außerdem erleichtert die Arretirung das Ablesen der Winkel, indem von ihr, zur Fixirung des Standes der Magnetnadel, im Augenblicke der Beobachtung Gebrauch gemacht werden kann; in der Voraussetzung jedoch völliger Ruhe der Nadel während dieses Actes.

§. 62.

Mittelst zweier Schrauben h und k sind an die Platte MP Dioptern L und R befestigt, und überdies durch je drei Eingriffsstifte dergestalt mit ihr verbunden, daß ein Verrücken der Dioptern schlechterdings nicht stattfinden kann. Jedes der Dioptern zerfällt in zwei wesentlich unterschiedene Abtheilungen, nämlich in eine Reihe sehr kleiner, innerlich trichterförmig sich erweiternder Oeffnungen d, d_1, d_2 . . ., Ocularöffnungen genannt, und in eine rahmenartige Unterbrechung, worin ein dünner Faden cc, gewöhnlich ein Haar, ausgespannt ist. Den Ocularöffnungen des einen Diopters steht das Haar des anderen Diopters gegenüber et. v. v., und stets müssen bei horizontalem Stande des Instrumentes die Axen beider Haare, so wie diejenigen der Ocularöffnungen zugleich mit dem Stützpunkte der Magnetnadel in einerlei Verticalebene hineinfallen.

Diese Verticalebene wird von der Ebene des magnetischen Meridians der Nadel in einer verticalen, durch die Axe des Stiftes hindurchgehenden Linie geschnitten, welche Linie, so wie deren Fußpunkt mit der Erdoberfläche durch ein am Instrumente leicht anzubringendes Bleiloth dargestellt zu werden pflegen. Der Winkel nun, welchen jene beiden Verticalebenen mit einander einschließen, ist es, um dessen An-

gabe es sich hier handelt, und welcher offenbar durch den Stand der Magnetnadel über dem Horizontalkreise unmittelbar angezeigt erscheint.

Die Uebertragung oder das Zulegen dieses Winkels auf ein horizontal gespanntes Blatt Papier wird durch den Parallelismus der Kanten MU, TP und der Nordlinie NS der Boussole ermöglicht, deren Verlängerung bis zu den Kanten MT und UP außer zu anderem Behufe besonders zur Justirung des Instrumentes dient, d. h. zu untersuchen erlaubt, ob die mit 360 und 180 bezeichneten Theilstriche des Horizontalkreises vollständig in die Verticalebene der Nordlinie hineinfallen oder nicht, in welchem letzteren Falle eine Drehung dieses Kreises erforderlich sein würde.

§. 63.

Die Art und Weise der Verbindung der Boussole mit ihrem Träger oder dem Stative wird durch Fig. 74 vergegenwärtigt.

a, a stellen zwei von jenen oben erwähnten Schrauben dar, welchen die Oeffnungen m, n und q Fig. 73 entsprechen, vermittelst deren die Boussole mit einer Messingscheibe b verbunden ist. An dieser, mit ihr aus einem Stücke bestehend, befindet sich ein hohler cylindrischer Ansatz d, in welchen hinein ein Conus c paßt, der seinerseits aus dem Cylinderstück f hervorragt, welches wiederum durch einen Zapfen mit dem gleichfalls ausgehöhlten Cylinder h dergestalt in Verbindung steht, daß in ihm eine ungehinderte Axendrehung erfolgen kann. h geht zuletzt in eine Kugel k über, welche von einem Lager i genau umschlossen wird, das durch Schrauben als zum Hauptkörper l des Stativs gehörig angesehen werden kann. Ihm schließen die Füße r, r, r sich an, welche durch Flügelschrauben je nach Erforderniß mehr oder weniger fest angezogen und so mit den vorigen Bestandtheilen des Meßinstrumentes zu einem unverrückbaren Ganzen verbunden werden können. Die Füße endigen in geeigneten Spitzen Behufs leichterer Eindringung in den Erdboden; auch ist an der unteren Seite von l ein Ring t angebracht, durch welchen der Faden des Bleilothes gezogen wird, sobald es darauf ankommt, den Fußpunkt des durch die Instrumentsaxe gehenden Perpendikels anzugeben.

Hiernach leuchtet ein, daß die Horizontalbewegung der Boussole zunächst um den conischen Zapfen c erfolgt, welche durch das Anziehen der Preßschraube e — der sogenannten groben Stellung — erschwert oder gänzlich gehemmt werden kann. Soll dennoch die Boussole in horizontale Drehung gebracht werden, so geschieht dies vermittelst der Mikrometerschraube p, deren Lager mit h innig verbunden

ist, und deren Spindel durch eine besondere Schraube g in die entsprechenden, die Schraubenmutter bildenden Vertiefungen auf f eingedrückt wird. Sie heißt die feine Stellung, weil man sich derselben nur zur letzten Berichtigung eines mittelst der Dioptern fixirten Sehestrahles bedient.

§. 64.

Da die Kugel k Drehungen aller Art in ihrem schalenförmigen Lager — der Nuß — gestattet, so folgt, daß der Ebene des Horizontalkreises vermöge ihres oben angezeigten mittelbaren Zusammenhanges mit dieser Gelenkkugel eben so viel verschiedene Lagen zum Horizont ertheilt werden können. Unter allen diesen ist es jedoch nur eine einzige, deren Darstellung man beabsichtigt, nämlich das Zusammenfallen der Ebene dieses Kreises mit dem scheinbaren Horizonte seines Mittelpunktes. Zu diesem Endzwecke wird auf die das Gehäuse der Boussole bedeckende Glasplatte eine Libelle oder Wasserwage aufgesetzt und aus dem Stande derselben auf die Lage der Ebene des Horizontalkreises geschlossen, während der letzte Genauigkeitsgrad der horizontalen Einstellung sich mittelst dreier Stellschrauben u, u, u erzielen läßt, wovon im Bilde nur zwei dem Auge erscheinen. Je zwei davon gewähren eine Drehungsaxe, sobald nur die dritte bewegt und dadurch das Lager der Kugel entweder fester oder nach Befinden lockerer angeschlossen wird, insofern das Eine oder das Andere durch den Stand der Libelle ausgesprochen erscheint. Nach dem Allen erscheint die Libelle als Hülfswerkzeug von wesentlichem Belang, daher wird ihre Eigenthümlichkeit demnächst in Betracht zu ziehen sein.

§. 65.

Es giebt Dosen- und Röhrenlibellen, insofern die Totalgestalt jener mit derjenigen einer kreisrunden cylindrischen Dose Aehnlichkeit hat, während der Hauptbestandtheil dieser eine ringförmig gebogene Glasröhre ist.

a. Die Dosenlibelle. Fig 75 stellt sie im verticalen Durchschnitte dar und läßt zunächst die ringförmige Basis cd der Libelle erkennen, welche mit der zu untersuchenden Ebene ab genau zusammenfallen muß. Das Gehäuse der ganz aus Messing gedrehten Dose wird durch eine luftdicht sich anschließende Glasplatte e bedeckt, welche äußerlich plan, innerlich concav und zwar sphärisch abgeschliffen ist. Auf die äußere, der Auffatzfläche cd parallele Seite der Glasplatte ist ein Kreis hk von 6 bis 7 Linien im Durchmesser aufgezeichnet, dessen

Mittelpunkt in die Axenlinie xy der Libelle hineinfällt. Der innere Raum g dient zur Aufnahme einer leicht beweglichen Flüssigkeit, gewöhnlich möglichst reinen Weingeistes oder Alkohols. Das Einbringen desselben wird durch eine mittelst einer Schraube verschließbare Oeffnung m möglich gemacht, und hierdurch die vorher im Raume g befindlich gewesene Luft dergestalt verdrängt, daß nur ein ganz kleiner Theil dieses Raumes von — wenn möglich verdünnter — Luft erfüllt übrig bleibt. Nach erfolgtem Verschlusse der Libelle durch die angeführte Schraube und Umkehrung derselben wird die übrig gebliebene Luft unter der Glasplatte in Gestalt einer runden Blase n erscheinen, und — nach hydrostatischen Gesetzen — bei ruhigem Stande der Libelle die höchste Stelle einnehmen, sobald die Auffatzfläche cd mit der Horizontalebene ab zusammenfällt. Käme der eingeschlossenen Luft keine Elasticität zu, in Folge welcher sie — von ihrem Gewichte ganz abgesehen — auf die Flüssigkeitsoberfläche einen Druck ausübt, fände ferner kein Benetzen der inneren Glasfläche statt, dann würde in dem bezeichneten Stande der Libelle die Oberfläche des Spiritus eben erscheinen und die Luftblase die Gestalt eines Kugelsegments annehmen, während sie in der That unter dem Einflusse beider Kräfte linsenförmig sich ausbildet. Sie selbst ist gleich der sie umgebenden Flüssigkeit farblos und giebt ihre Gegenwart nur durch die Verschiedenheit der Strahlenbrechung an den Gränzen zu erkennen. Ihre Horizontalprojection ist ein Kreis, gewöhnlich von etwas größerer Umfänglichkeit als der auf der Glasfläche verzeichnete, und concentrisch mit diesem bei horizontaler Lage der Ebene ab.

Dem Augenmaße des Beobachters ist es überlassen zu beurtheilen, ob beide Kreise als concentrisch anzusehen sind, was mit um so größerer Sicherheit erfolgen wird, je weniger die Durchmesser derselben von einander abweichen; er wird also in dem Augenblicke, für welchen nach seinem Dafürhalten die Concentricität dieser zwei Kreise eintritt, die Ebene ab für horizontal erklären, folglich auch die Oberfläche der den Compaß bedeckenden Glasplatte, sobald diese der Libelle als Stütze dient.

§. 66.

Empfindlichkeit der Dosenlibelle. Diese hängt bei sonstiger gehöriger und oben bezeichneter Ausführung der Libelle von dem Krümmungshalbmesser der inneren Fläche der Glasdecke e ab und nimmt mit diesem zu. Fassen wir die Luftblase im Sinne der Fig. 75 auf, d. h. berücksichtigen wir ihren centralen verticalen Durchschnitt, so wird die Empfindlichkeit der Libelle von der Wegeslänge

abhängen, welche bei einer gegebenen Neigung der Axe xy ein an der inneren Glasfläche angränzender Punkt der Luftblase zurücklegt. Wird solche durch w bezeichnet, der Krümmungshalbmesser des sphärischen Glases durch r, und ist α der Neigungswinkel der Axe xy gegen ihre ursprüngliche verticale Lage, dann folgt:

$$w = 2r\pi . \frac{\alpha}{360} = 0{,}0017453\, r . \alpha.$$

Wäre gefordert, daß jener Punkt der Luftblase eine Bogenlänge von $\frac{1}{12}$ Zoll für einen Grad Axenneigung durchliefe, dann müßte der Krümmungshalbmesser der inneren Glasfläche

$$r = \frac{\frac{1}{12}}{0{,}0017453 . 1} = \frac{1}{0{,}0209436}$$
$$= 47{,}747 \text{ Zoll}$$

betragen.

Anmerkung. In diesem Falle würde die Neigung der Ebene ab von Grad zu Grad beurtheilt werden können, befänden sich auf der Glasplatte concentrische Kreise von je einer Linie Abstand.

§. 67.

Die Röhrenlibelle. Für sich allein als isolirter Hülfsapparat kommt die Röhrenlibelle weniger oft bei den praktisch geometrischen Ausführungen vor, als in bleibender Verbindung mit anderen, vorzüglich den Fernrohrinstrumenten; ersteren Falles aber vertritt sie die Stelle der Dosenlibelle, und erscheint in Gestalt der sie im Durchschnitte darstellenden Fig. 76.

Wiederum bedeutet hier ab den Durchschnitt der auf ihre horizontale Lage zu prüfenden Oberfläche, cd aber den einer rectangulären Messingplatte, deren Lagerfläche sorgfältig eben abgearbeitet sein muß. Aus der Platte ragen zwei Träger e und f hervor, welche mit einem cylindrischen, an beiden Enden durch Schrauben verschließbaren Messingrohre verbunden — gewöhnlich angelöthet — sind. Dieses Rohr ist an seiner oberen Seite durch eine längliche Oeffnung unterbrochen bis auf zwei von der verticalen Axe xy gleich weit entfernte Querstege g und h. Im Innern des Rohres befindet sich unter luftdichtem Verschlusse eine ringförmig gebogene Glasröhre, etwa von der Stärke einer weiten Barometerröhre, und sorgfältig so gestellt, daß deren Mittellinie in eine zur Basis cd normale Ebene hineinfällt. Möglichst gereinigter Weingeist füllt die Glasröhre an bis auf einen geringen Luft enthaltenden Antheil. Diese, in Gestalt einer länglichen Blase sich darstellend, wird bei ruhigem Stande der Libelle stets den höchsten Platz

im Rohre einzunehmen suchen, und ihre äußersten Gränzen werden bezüglich von den Querstegen gleichweit entfernt erscheinen, sobald ab horizontal geworden ist. Zur leichteren Beurtheilung des Standes der Luftblase in Bezug auf beide Stege g und h pflegt die Glasröhre selbst mit gleichweit von einander, etwa um den Betrag einer Linie, entfernten Theilstrichen versehen zu werden, welche überdies einen Schluß auf den Neigungswinkel zulassen, um welchen die Ebene ab von ihrer horizontalen Lage entfernt ist.

Handelt es sich darum, mittelst der Röhrenlibelle eine ebene Tafel, eine quadratische z. B., horizontal zu stellen, dann darf man, da die Lagerfläche der Libelle ein sehr längliches Rechteck bildet, nicht unterlassen, die Libelle in zwei um einen rechten Winkel verschiedenen Lagen, etwa in der Richtung beider Diagonalen, auf die Tafel aufzusetzen; außerdem der größeren Sicherheit wegen noch an beliebigen anderen Stellen derselben, welche Rücksicht auch beim Gebrauch der Dosenlibelle zu beobachten ist. Uebrigens geschieht die Beurtheilung der Empfindlichkeit der Röhrenlibelle völlig so wie bei der Dosenlibelle.

Endlich verdient bemerkt zu werden, daß beide Libellen beim Nichtgebrauch gegen äußere Verletzungen geschützt werden, die Dosenlibelle durch einen in Fig. 75 punktirt dargestellten cylindrischen Deckel, der auch wohl an seinen Seiten mit zarten Einschnitten versehen ist, um ihn bei Detailvermessungen als Winkelkreuz benutzen zu können, die Röhrenlibelle hingegen durch eine passende Kapsel.

§. 68.

Operationen mit der Boussole.

Vor dem Gebrauch der Boussole ist es unerläßlich, zuzusehen, ob sie auch wirklich zur Ansammlung derjenigen Elemente sich eignet, welche für die Lösung eines Problems erforderlich sind, hauptsächlich die Richtigkeit der Eintheilung des Horizontalkreises zu untersuchen, so wie die Lage der Drehungsaxe der Magnetnadel zum Mittelpunkte desselben, d. h. ihre Centrirung.

Fehler in der Eintheilung des Horizontalkreises werden erkannt, indem nur für einige Stellungen der Nadel die von ihrer Mittellinie mit einem beliebig angenommenen Durchmesser gebildeten Scheitelwinkel gleich groß erscheinen, während Irrungen im Centriren — bei fehlerfreier Eintheilung des Horizontalkreises — dadurch bemerkbar werden, daß für keine einzige Lage eines gegebenen Durchmessers dessen Scheitelwinkel mit der

Nadel durch einerlei Anzahl von Theilstrichen am Rande des Horizontalkreises sich darstellen.

Anlangend den ersten Fehler, so wird ihn der Geometer bald erkennen und zu würdigen im Stande sein; in Bezug aber auf den zweiten, d. h. die unrichtige Centrirung der Nadel, gilt die Regel: aus beiden Ablesungen das arithmetische Mittel zu nehmen. Denn es sei c Fig. 77 das Centrum des Horizontalkreises, d der Stützpunkt der Magnetnadel ab und deren Neigungswinkel $x = fga = bge$, mit einem beliebigen Durchmesser fe anzugeben, auch bereits fa gezogen, dann folgt:

$$2 \angle agf + 2 \angle gfa + 2 \angle fag = 360°$$

$$2x + \widehat{ea} + \widehat{fb} = 360°, \text{ ferner}$$

$$\widehat{af} + \widehat{fb} + \widehat{be} + \widehat{ea} = 360°, \text{ daher}$$

$$2x = \widehat{af} + \widehat{be}$$

$$\text{oder } x = \frac{\widehat{af} + \widehat{be}}{2}.$$

Beispiel. Man habe $af = 23° 17' 30''$ und $be = 23° 17' 45''$ gelesen, so würde der wahre Winkel der horizontalen Nadelare ab mit dem Durchmesser fe des Horizontalkreises

$$\frac{23° 17' 30'' + 23° 17' 45''}{2}$$ d. i. $23° 17' 37\frac{1}{2}''$ betragen.

§. 69.

Eine fernere nicht zu versäumende Prüfung der Boussole betrifft die Stellung ihrer Dioptern. Es wird zu untersuchen sein, ob die durch die Fäden und Ocularöffnungen derselben dargestellte Gesichtsebene — auch Visirebene, dioptrische Ebene oder Diopterebene genannt — vertical ist bei horizontaler Stellung der Boussole, alsdann aber auch, ob diese Ebene durch das Centrum des Horizontalkreises hindurch geht.

Nach erfolgter Horizontalstellung der Boussole wird mittelst der obersten Ocularöffnung d_1 Fig. 73 auf einen entfernten, jedoch deutlichen Gegenstand — einen Thurmknopf z. B. — visirt, und alsdann derselbe Gegenstand von der untersten Ocularöffnung aus betrachtet. Sind die Erscheinungen beide Male dieselben, d. h. zeigt sich das Haar des gegenüberstehenden Diopters genau in derselben Lage zum Objecte wie vorher, dann geht hieraus — wie leicht einzusehen — die Richtigkeit der Diopterstellung hervor. Entgegengesetzten Falles wird das Haar nach der Seite der Abweichung hin zu dirigiren sein, zu

welchem Behufe die Dioptern mit Stellvorrichtungen versehen sind.*) Auf dieselbe Art wird man vom anderen Diopter aus Beobachtungen nach einem entgegengesetzten Gegenstande vornehmen, und wenn hier Correctionen nöthig waren, das Verfahren mit dem ersten Diopter wiederholen, indem dieses hierdurch seine Stellung veränderte, und so abwechselnd bis zu völliger Zufriedenstellung der Beobachtungsergebnisse fortfahren.

Vorzüglich gut eignen sich zur Justirung der Dioptern frei hängende Bleilothe, deren gespannte Fäden verticale Linien vergegenwärtigen, mit welchen das Zusammenfallen der Vistrebene nur bewirkt zu werden braucht, was um so vollständiger gelingen wird, in je größerer Entfernung das Instrument von jenen Bleilothen aufgestellt werden kann, je länger die Fäden der Lothe und je dünner die Haare der Dioptern sind.

Auch kann zu diesem Behufe schon ein einziges Loth genügen, da dann zuerst für den Faden desselben eins der Dioptern zu prüfen und zu berichtigen ist. Wird hierauf das andere Diopter um zwei rechte Winkel drehend herumgeführt, und deckt dann auch das Haar des ersten Diopters den Faden des Lothes, so ist die Vistrebene der Dioptern vertical, während anderen Falles Berichtigungen vorzunehmen sind.

Zugleich können diese Beobachtungen dazu dienen, nachzuweisen, ob die Vistrebene durch den Mittelpunkt des Horizontalkreises hindurchgeht; wozu nichts weiter erforderlich ist, als für eine jede Beobachtung den Stand der Nadel anzumerken und zuzusehen, ob die ihn bezeichnenden Zahlen um 180 oder zwei rechte Winkel verschieden sind.

Die Nadel habe für die erste Beobachtung 325° 17′ 45″, für die zweite 145° 17′ 30″ auf dem Horizontalkreise gezeigt, so würde der Unterschied dieser Angaben 180° 0′ 15″ betragen und daraus folgen, daß die Vistrebene nicht durch das Centrum des Kreises ginge.

Vorrichtungen, um auch hierbei abzuhelfen, d. h. die Dioptern je nach Erforderniß zur Rechten oder Linken verschieben zu können, sind leicht denkbar, jedoch ungewöhnlich.

*) Bei dem in Fig. 73 dargestellten, der Königlichen Gewerbschule zu Chemnitz angehörigen und aus dem Atelier von C. F. Poller in Leipzig hervorgegangenen Instrumente fehlen diese Vorrichtungen, was eine sorgfältige und zugleich bleibende Justirung der Dioptern voraussetzt, wie solche in der That bis jetzt sich bewährt hat.

§. 70.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt einer geraden Linie ein Perpendikel zu derselben darzustellen.

Auflösung. Es sei c Fig. 78 der in der Geraden ab gegebene Punkt, das Centrum der Boussole genau über c eingelothet, diese selbst horizontal gestellt und die Vistrebene der Dioptern e, f in die Verticalebene durch a und b gebracht. Dann beobachte man den Winkel der Nadel sn oder vielmehr ihrer Verticalebene mit der Vistrebene, nämlich den Winkel ncf, vermehre oder vermindere denselben um 90°, lasse die Vistrebene der Dioptern um das Ergebniß dieser Vermehrung oder Verminderung sich von ihrer ersten Lage drehend entfernen, und bezeichne die neue durch Stäbe i, k, so sind diese im gesuchten Perpendikel enthalten.

Beispiel. Für die erste Lage der Vistrebene zeige die Magnetnadel am Horizontalkreis 312° 52′ 30″, dann wird die Boussole mittelst der Mikrometerschraube so lange zu bewegen sein, bis die Nadel entweder 222° 52′ 30″ oder 42° 52′ 30″ zeigt.

In wichtigen Fällen ist nach vollbrachter Aussteckung der Stäbe i und k die Boussole ferner um 90° vor- oder rückwärts zu drehen und zuzusehen, ob dadurch die Vistrebene der Dioptern wieder in ihre vorige Lage d. h. in die der gegebenen Geraden ab hineinfällt.

§. 71.

Aufgabe. Von einem außerhalb einer Geraden gegebenen Punkte aus ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

Auflösung. Sei c Fig. 79 der außerhalb der Geraden ab gegebene Punkt, so wird die Boussole in irgend einem Punkte e dieser Geraden aufgestellt, die Declination der Nadel in Bezug auf die in ab eingerichtete Vistrebene der Dioptern d. i. der Winkel neb beobachtet, hierauf das Instrument über c gebracht und daselbst der Dioptrebene eine solche Lage ertheilt, daß der von ihr mit der magnetischen Meridianebene gebildete Winkel neb $\pm$ 90° beträgt. Werden nun in der Richtung jener Ebene Stäbe wie i und k ausgesteckt, so bezeichnen diese das gesuchte Perpendikel.

§. 72.

Aufgabe. Durch einen außerhalb einer Geraden gegebenen Punkt eine Parallele zu dieser darzustellen.

Auflösung. Es stelle c Fig. 79 den außerhalb der Geraden

ab gegebenen Punkt vor, so leuchtet ein, daß ganz so wie bei der Auflösung der vorigen Aufgabe zu verfahren ist, mit dem einzigen Unterschiede, daß der Diopterebene zur magnetischen Meridianebene derselbe Winkel wie in e zu ertheilen, nämlich ∠ ncq = ∠ neb zu machen ist. Durch in der Richtung der Diopterebene auszusteckende Stäbe p und q wird zuletzt die Lage der gesuchten Parallele zu bezeichnen sein.

§. 73.

Aufgabe. Die Lage eines außerhalb einer gegebenen Geraden befindlichen Punktes zu bestimmen.

Auflösung. ab sei die gegebene und bereits gemessene Gerade, c der außerhalb derselben liegende Punkt. Nachdem die Boussole gehörig über a eingestellt und deren Diopterebene in die Richtung von ab gebracht worden ist, so wird der Winkel derselben mit dem magnetischen Meridian d. i. nab am Horizontalkreise beobachtet, hierauf die Diopterebene nach dem Object c gerichtet und der Winkel abgelesen, um welchen diese Ebene aus ihrer ersten Lage sich entfernt hat, dadurch aber der Winkel bac bekannt. Auf dieselbe Art ist vom Punkt b aus mit den Richtungen ba und bc Behufs der Ermittelung des Winkels abc zu verfahren, wodurch der Forderung Genüge geschieht.

Zusatz 1. Erlaubt das Terrain die Aufstellung der Boussole über c, so wird der Prüfung wegen diese wirklich zu vollziehen, übrigens wie von den ersten beiden Standpunkten aus zu operiren, und zuletzt zuzusehen sein, ob die Summe der drei Winkel des Dreieckes abc zweien, oder die der Außenwinkel vier rechten Winkeln gleich kommt.

Zusatz 2. Auf einem horizontal gelegenen Papiere, der Fläche eines fest ruhenden Reißbretes z. B., würde sich das Dreieck abc leicht verjüngt darstellen oder, wie man sagt, **zulegen** lassen. Die vom Stativ abgenommene Boussole wird auf einem passenden Platze der Papierfläche **orientirt**, d. h. in dieselbe Lage gebracht, die ihr in der Wirklichkeit zukam; längs des Randes derselben wird eine Gerade gh mit einem Bleistift gezogen, und in ihr ein der Länge ab entsprechendes Stück nach dem verjüngten Maßstabe aufgetragen. Alsdann ist die Boussole um den Punkt a so lange drehend zu bewegen, bis die Nadel denselben Winkel anzeigt, welcher in der That vom Standpunkte a aus beobachtet wurde, und nun längs des Boussolenrandes die Gerade ak zu ziehen. Jetzt wird die Boussole an b angelegt, ihr die demselben zukommende Lage ertheilt und bf gezogen, so zeigt der Durchschnittspunkt derselben mit ak, d. i. c die verhältnißmäßige Lage dieses Punktes zu den Punkten a und b an.

Zusatz 3. Von selbst versteht es sich, daß bei den Operationen des Aufnehmens und Zulegens mittelst der Bouffole alle auf den Stand der Nadel störend wirkende Einflüsse, z. B. Stahl- oder Eisengeräthschaften, fern zu halten sind.

§. 74.

Von einerlei Bedeutung mit der Aufgabe des vorigen Paragraphs würde die Forderung gewesen sein, ein Dreieck mittelst einer Seite und der anliegenden Winkel zu bestimmen. Offenbar wird dasselbe auch auf andere Art geschehen können, z. B. mittelst zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels u. s. w., in welchem Falle — abgesehen von den Bestätigungen — eine einzige Winkelmessung genügt.

Von der Beschaffenheit des Terrains wird die zu erwählende Bestimmungsmethode des Dreieckes abhängen, wobei stets mit der geringsten Anzahl von Beobachtungen und directen Messungen zum Ziele zu gelangen ist, eines Theils um die mit einer jeden dieser Operationen unvermeidlich verbundenen Fehler auf ein Minimum herabzubringen, anderen Theils um in kürzester Zeit dem Verlangen zu entsprechen. Leicht kann es sich hierbei ereignen, daß eine der Dreiecksseiten als unzugängliche Gerade erscheint und dann die eine oder die andere der im vorigen Capitel hierüber dargelegten Bestimmungsarten in Anwendung zu bringen oder nach Befinden für den Gebrauch der Bouffole zu modificiren ist.

Das Bestimmen unzugänglicher Geraden gestaltet sich mittelst der Bouffole zu einem weit einfacheren Geschäft im Vergleich zur bloßen Anwendung der Kette selbst unter Zuziehung des Winkelkreuzes, wie folgender Fall darthun wird.

§. 75.

Aufgabe. Eine weder in ihren Endpunkten noch in ihrer Richtung unzugängliche Gerade zu bestimmen.

Auflösung. Es sei ab Fig. 81 die unzugängliche Gerade. Man wähle zur Seite derselben irgend eine Gerade cd dergestalt, daß von deren Endpunkten diejenigen der Geraden gesehen werden können, und messe dieselbe, beobachte dann aus c die Winkel dca $= \alpha$, dcb $= \beta$, so wie aus d die Winkel cda $= \gamma$ und cdb $= \delta$. Wird überdies ab $=$ m und cd $=$ n gesetzt, dann folgt:

$$\mathrm{ad} : \mathrm{n} = \sin\alpha : \sin(\alpha + \gamma)$$

$$\mathrm{ad} = \frac{\mathrm{n}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$bc : n = \sin\delta : \sin(\beta + \delta)$$

$$bc = \frac{n \sin\delta}{\sin(\beta + \delta)}$$

$$ac : n = \sin\gamma : \sin(\alpha + \gamma)$$

$$ac = \frac{n \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$bd : n = \sin\beta : \sin(\beta + \delta)$$

$$bd = \frac{n \sin\beta}{\sin(\beta + \delta)}.$$

Ferner ist:

$$m^2 = ac^2 + bc^2 - 2ac \,.\, bc \,.\, \cos(\alpha - \beta)$$

$$m^2 = \left(\frac{n \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{n \sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}\right)^2 - 2\left(\frac{n \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\right)\left(\frac{n \sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}\right) . \cos(\alpha - \beta),$$ daher

$$m = n \sqrt{\left[\left(\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}\right)^2 - \frac{2 \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin\delta \,.\, \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\delta)}\right]}.$$

Auch hat man:

$m^2 = ad^2 + bd^2 - 2ad \,.\, bd \,.\, \cos(\delta - \gamma)$, und durch Substitution obiger Werthe

$$m = n \sqrt{\left[\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}\right)^2 - \frac{2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \cos(\delta - \gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\delta)}\right]}.$$

Beispiel. Es sei $\alpha = 98° 15'$, $\beta = 27°$, $\gamma = 47° 30'$, $\delta = 112° 45' 30''$ und $n = 550$ Fuß, dann folgt:

$$m = 878{,}5 \text{ Fuß.}$$

Denn hier ist $m = 550 \sqrt{\left[\left(\frac{\sin 47° 30'}{\sin 34° 15'}\right)^2 + \left(\frac{\sin 67° 14' 30''}{\sin 40° 14' 30''}\right)^2 - \frac{2 \,.\, \sin 47° 30' \,.\, \sin 67° 14' 30'' \,.\, \cos 71° 15'}{\sin 34° 15' \,.\, \sin 40° 14' 30''}\right]}$

$$= 550 \sqrt{(1{,}71611 + 2{,}03758 - 1{,}20212)}$$

$$= 550 \sqrt{2{,}55157} = 878{,}5.$$

Würde die Forderung dieses Falles dahin erweitert, eine Parallele zu ab durch c anzugeben, dann dürfte der Dioptereebene nur eine solche Lage ertheilt werden, daß der von ihr mit der Richtung ca gebildete Winkel d. h. fca den Winkel bei a, nämlich cab zu zwei rechten Winkeln ergänzt. Auch könnte man $\angle$ bcf $=\angle$ abc machen und die geforderte Parallele wie gewöhnlich durch Stäbe e, f bezeichnen.

Zur Bestimmung des Winkels cab bietet sich mehrfache Gelegenheit dar, wir wählen folgenden Gang:

Setzt man $\frac{1}{2}[180 - (\alpha - \beta)] = p$,

$\angle$ cab $= p + q$, dann ist nach bekannten trigonometrischen Sätzen

$$\text{tang } q = \frac{\frac{n \sin \delta}{\sin(\beta+\delta)} - \frac{n \sin \gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}}{\frac{n \cdot \sin \delta}{\sin(\beta+\delta)} + \frac{n \cdot \sin \gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}} \cdot \text{tang } p$$

$$= \frac{\sin\delta \cdot \sin(\alpha+\gamma) - \sin\gamma \cdot \sin(\beta+\delta)}{\sin\delta \cdot \sin(\alpha+\gamma) + \sin\gamma \cdot \sin(\beta+\delta)} \cdot \text{tang } p$$

$$= \left[\frac{\sin 67°\,14'\,30'' \cdot \sin 34°\,15' - \sin 47°\,30' \cdot \sin 40°\,14'\,30''}{\sin 67°\,14'\,30'' \cdot \sin 34°\,15' + \sin 47°\,30' \cdot \sin 40°\,14'\,30''}\right] \times \text{tang } 54°\,22'\,30''$$

$$= \frac{0{,}518987 - 0{,}476290}{0{,}518987 + 0{,}476290} \cdot 1{,}3954985$$

$$= \frac{42697 \cdot 1{,}3954985}{995277} = \text{tang } 3°\,25'\,30'',$$

daher $\angle$ cab $= 57°\,48'$, und mithin

$\angle$ acf $= 180° - 57°\,48' = 122°\,12'$, so wie

$\angle$ dcf $=$ acf $- \alpha = 122°\,12' - 98°\,15' = 23°\,57'$.

Daß endlich beide Fragen graphisch d. i. durch Zulegung, wenn auch nicht mit derselben Schärfe, jedoch genügend für die gewöhnlichen Fälle, zu erledigen sind, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

§. 76.

Nach diesen Vorbereitungen unterliegt die Aufnahme einer Figur mittelst der Boussole d. h. die Ansammlung derjenigen Elemente, auf deren Grund nicht nur Größenverhältnisse derselben zu beurtheilen sind, sondern auch die bildliche Darstellung der Figur möglich wird, keinerlei Schwierigkeiten.

Es mögen m, n, o und p Fig. 82 nicht allzuweit von einander entfernte und entweder durch Stäbe oder wie immer bezeichnete Punkte vorstellen, deren verhältnißmäßige Lage zu ermitteln sei.

Gestattet es das Terrain, so wird eine durch möglichst weit von einander entfernte Objecte bezeichnete Richtung xy dergestalt gewählt, daß zu beiden Seiten derselben die zu bestimmenden Punkte ziemlich gleichmäßig verbreitet vorkommen. Hierauf erfolgt die Wahl eines Standpunktes a für die Boussole in der Geraden xy, wobei zu berücksichtigen ist, daß die von a aus nach den zu bestimmenden Punkten m, n, p . . . sich ergebenden Visirebenen mit der Verticalebene durch xy weder zu spitze noch zu stumpfe Winkel einschließen, oder mit anderen Worten, daß dieser nämliche Umstand mit den Visirlinien d. h. mit den Tracen jener Ebenen in Bezug auf eine über die Gegend ausgebreitet gedachte Horizontalebene, z. B. die durch den Horizontalkreis der Boussole gehende, eintritt.

Ist die Anzahl der zu bestimmenden Punkte beträchtlich, so wird zur Vermeidung von Irrungen ein jeder der beobachteten Winkel may, nay, oay . . . . in ein besonders für diesen Zweck entworfenes Register einzutragen sein. Nun bestimmt man durch directes Messen in der Geraden xy ein beliebiges Stück ab, darauf Rücksicht nehmend, daß die vom Endpunkte b aus gedachten Visirlinien nach jenen Punkten ebenfalls gute Winkel bilden. Ueber diesen zweiten Punkt b der (Standlinie oder Basis heißenden) Geraden ab erfolgt das Aufstellen der Boussole wirklich, so wie das Eintragen der von ihm aus beobachteten Winkel xbm, xbn, xbo . . . . nach Art der ersten Beobachtungen geschieht.

Konnten von den Standlinienendpunkten aus nicht alle zu bestimmenden Punkte wahrgenommen werden, zeigte sich z. B. der Punkt p nur vom Standpunkte b aus sichtbar, so würde schon im ersten Standorte a darauf zu achten gewesen sein. Man durfte dann nur durch a eine passende Richtung zv, ein Alignement wählen, mit dem Vorbehalt, einen dritten für die Wahrnehmung von p geeigneten Standpunkt, etwa t, anzunehmen. Um dabei mit größter Sicherheit zu verfahren, würde man durch b ebenfalls ein Alignement uw geführt und in dessen Durchschnitt t mit zv das Instrument zum dritten Male aufgestellt haben.

Im Wesentlichen besteht also diese Operation darin, die zu bestimmenden Punkte als Eckpunkte von Dreiecken anzusehen, deren Mehrzahl eine gemeinschaftliche Basis besitzt, daher sie das Basiren genannt wird.

§. 77.

Handelt es sich um die Aufnahme einer im Innern unzugänglichen Figur, z. B. eines Teiches, Waldes, einer Gebäudegruppe u. dgl., dann pflegt man dieselbe durch ein dem Darzustellenden sich möglichst anschließendes Polygon zu umgränzen, dessen Seiten als Abscissenlinien anzusehen, und auf dieselben Ordinaten zu beziehen, deren Endpunkte in den Umfang der innerlich unzugänglichen Figur hineinfallen.

Auf diese Art sei das Polygon abcde Fig. 83 zu Stande gekommen, und dafür Sorge getragen worden, nicht nur von einem Eckpunkte zum nächst benachbarten ungehindert sehen, sondern auch direct messen zu können.

Größerer Zuverlässigkeit wegen wird man, wenn nur irgend thunlich, die Seiten ab, bc, cd . . . als Stücke der durch thunlichst weit entfernte Richtobjecte bezeichneten Alignements xy, zw, vu . . . darzustellen suchen und die Operation mit der Aufstellung der Bouſſole über den Eckpunkt a beginnen, hierauf, wie oben gezeigt wurde, den Winkel eab, so wie die Längen ab und ae bestimmen und die Ergebnisse im Register notiren.

Auch lassen sich Behufs der Detailangabe von a aus Abscissen auf ab und ae angeben und deren Ordinaten mittelst eines Winkelkreuzes feststellen, wodurch das Zurückkommen auf den Punkt a erspart wird. Eben so ist von dem Punkte b aus der Neigungswinkel der in ihm zusammenkommenden Seiten ba und bc, auch die Seite bc zu messen, und nun mit jedem der folgenden Eckpunkte c, d, e . . auf dieselbe Art zu verfahren. Sollte von einem Eckpunkte, z. B. von d aus einer der nicht zunächst benachbarten Eckpunkte, etwa b, sichtbar sein, dann ist der Prüfung wegen der Winkel der betreffenden Visirlinie db mit dc oder de zu beobachten.

Eine Bestätigung erfolgt, sobald im ersten Standpunkte a der Winkel der Nadel sn mit der Polygonseite ae angemerkt wurde und im letzten der Diopterebene zur Magnetebene die nämliche Lage ertheilt wird, worauf diese von selbst durch den Anfangspunkt a hindurchgehen muß. Von größerer Wichtigkeit ist es jedoch, zuzusehen, ob die Summe der äußeren Polygonwinkel vier rechten Winkeln gleichkommt, wobei bekanntlich die einspringenden Winkel als negative Größen in die Rechnung einzuführen sind.

Ist der Südpol der Magnetnadel, d. h. die nach Norden zugewendete Spitze derselben, vom Beobachter aus jenseits ihrer Drehungs-

are gelegen, so wird die Eintheilung des Horizontalkreises als eine nach der Linken oder Rechten fortschreitende unterschieden werden können, und zur Vermeidung von Subtractionen supplementärer Winkel es angemessen erscheinen, die Folgeordnung der Beobachtungen ersteren Falles von der Rechten nach der Linken, also von a nach b, c u. s. w., letzteren Falles entgegengesetzt, mithin von a nach e, d, c . . . hin, zu wählen.

Für jenen Fall sind dann die nach der linken Seite, für diesen die nach rechts gelegenen äußeren Polygonwinkel zu summiren. Hiernach ist:

ybc = dem überstumpfen Winkel sbc — sab
wcd = " " scd — sbc
edu = " " (360 — scd) + eds
aep = — (eds — aes)
tab = sab — aes,

woraus die Summe aller nach der rechten Seite zu gelegenen äußeren Polygonwinkel zu 360° sich ergiebt. Auf ähnliche Art würde mit den entgegengesetzt gelegenen äußeren Polygonwinkeln zu verfahren und deren Summe ebenfalls zu vier rechten Winkeln nachzuweisen sein.

Da hierbei Alles auf die vollständige Bestimmung des Umfanges oder der Peripherie des umschriebenen Polygones ankommt, so hat man dieses Verfahren das Peripherisiren genannt, und kaum bedarf es wohl der Erinnerung, daß hiervon auch in dem Falle Anwendung gemacht werden kann, wenn es sich um die Aufnahme einer äußerlich unzugänglichen Figur handelt, indem dann nur im Innern derselben ein Polygon festgesetzt zu werden braucht; dessen Darstellung jedoch öfters auch von einem einzigen Standpunkte aus zu ermöglichen wäre.

§. 78.

Während Behufs der Aufnahme einer einfachen Figur es hinreicht, die Beobachtungsergebnisse und gemessenen Längen in ein Brouillon einzutragen, muß diesem bei complicirten ein Winkelbuch beigefügt werden, welches geeignete Rubriken für die Standpunkte oder Stationen der Boussole, für die aus denselben beobachteten Winkel und gemessenen Längen, so wie eine Anmerkungen betreffende Rubrik enthält, welche letztere sogar das Eintragen von Detailskizzen gestattet. Ueberdies sind diese Aufschreibungen durch die Angabe des Tages, an welchem die Boussolenoperation geschah, und der für denselben geltenden magnetischen Abweichung, durch eine kurze Bezeichnung der Räumlichkeit, so wie endlich des Aufnahmezweckes und der erlangten Resultate zu vervollständigen.

Das Zulegen oder Entwerfen des Risses soll bald nach erfolgter Aufnahme geschehen, eines Theils weil dem Beobachter alle während letzterer gehabten Erscheinungen dann noch gegenwärtig sind, anderen Theils wegen der sich ändernden Declination der Magnetnadel. Riß und Winkelbuch bilden ein Ganzes, indem dieses jenen documentirt, auch stets wiederholte Erzeugung des ersteren möglich macht.

Unter günstigen Umständen gewährt die Boussole überraschend genaue Resultate, wie dies namentlich durch viele Ergebnisse bei der Aufnahme selbst sehr umfänglicher und complicirter unterirdischer Räume, z. B. der Gruben beim Bergbau, sich bestätigt hat. Unbrauchbar ist sie in der Nähe mancher Mineralien, besonders einiger Eisenerze, oder metallischer Eisenmassen selbst.

Zur Aufnahme von Tagegegenden d. h. Theilen der Erdoberfläche wird gleichwohl von der Boussole nur ein untergeordneter Gebrauch gemacht, ungeachtet sie vor so manchen anderen Meßgeräthen den Vorzug hat, sogar unter Witterungsverhältnissen noch benutzt werden zu können, wobei jene ihre Dienste versagen. Es ist dies nicht nur den erwähnten Schwankungen der Magnetnadel und dem verhältnißmäßig hohen Preise eines gut construirten Boussolenapparates, sondern hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, daß es ein einfacheres, sicherer und rascher zum Ziele führendes Instrument giebt, welches die oben angegebene Winkelregistrirung nicht erheischt, sondern sofort ein Bild der Gegend gewährt; ich meine den in den folgenden Paragraphen zu besprechenden Meßtisch.

§. 79.

Der Meßtisch.

In der Aehnlichkeit dieses Meßinstrumentes mit einem Tische ist dessen Benennung begründet. Deutlich und sogleich auf den ersten Anblick giebt sich die Uebereinstimmung desselben mit der Totalform eines dreifüßigen Tisches zu erkennen, indem sofort wie bei diesem die Tischplatte und deren Träger oder Füße als Hauptbestandtheile hervortreten.

Fig. 84 stellt einen Meßtisch im Aufriß dar; in ihr zeigt a die Tisch-, auch Menselplatte oder Planchette, eine völlig geebnete, aus trockenem Holze — gewöhnlich Lindenholz — gearbeitete quadratische Tafel, von 20 bis 24 Zoll Seitenlänge und 1 bis 1½ Zoll Dicke. Dieselbe pflegt nicht aus einem einzigen Stücke zusammengesetzt zu werden, sondern besteht zur Verhütung des Selbstkrümmens oder Wer-

fens aus mehreren nach den für Holzverbindungen geltenden Regeln solid vereinigten Stücken.

Auf ihrer oberen Fläche wird die Planchette mit Papier überspannt, dessen Ränder man an den Seitenflächen mit Tischlerleim, Buchbinderkleister oder einem anderen Bindemittel befestigt nach Art der Behandlung eines Reißbretes, mit dem einzigen Unterschiede, daß das Papier nicht mit bloßem Wasser befeuchtet, sondern diesem ein Stoff beigefügt wird, wodurch das Papier an der Planchettenoberfläche innig haftet, ohne doch sich ihr allzusehr anzuschließen, z. B. zu Schaum gerührtes Eiweiß, Gummi arabicum u. s. w. Hierdurch wird das Faltigwerden des Papiers bei feuchter Luft verhindert, ohne doch dasselbe der Gefahr des Zerreißens beim Abnehmen von der Planchette preiszugeben, zugleich aber eine bessere Bindung der Papierfasern erreicht, in Folge welcher der Papierbogen nach seiner Trennung von der Planchette minder beträchtlichen Dimensionsverkürzungen unterworfen ist. Nicht selten wird sogar der Bogen, Behufs größerer Dauer, vor dem Ausspannen über der Planchette auf Leinwand aufgezogen.

Beim Nichtgebrauch pflegt die Planchette in einer leicht transportabeln Tasche aufbewahrt zu werden, welcher überdies Etuis zur Aufnahme noch anderer Utensilien z. B. der Libelle ꝛc. beigegeben sind.

§. 80.

Mit dem Stative steht die Planchette auf ähnliche Art wie bei der Boussole in Verbindung, am häufigsten jedoch wird die durch Fig. 84 dargestellte Zusammensetzung angetroffen. Entweder befindet sich um die Mitte der unteren Planchettenfläche herum und mit dieser durch Schrauben fest verbunden eine ringförmige Messingplatte, in welche Schraubenmuttern angebracht sind, deren Lage zu einander mit den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreieckes übereinstimmt, oder es sind auf diese Art Schraubenmuttern in das Holz der Planchette selbst eingelassen. Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, die Planchette mittelst dreier Schrauben g, g, g — wovon im Bilde nur zwei erscheinen — zunächst mit einem trichterförmig ausgeschweiften Stücke b zu verbinden, welches wegen seiner Aehnlichkeit mit einer Trompetenmündung die Trompete heißt und sogar zur Benennung Trompetenmeßtisch Anlaß gegeben hat. Nach unten geht dasselbe in einen geraden conischen Zapfen über, dem eine Oeffnung entspricht, welche sich in einem Cylinderstücke vorfindet, das nach drei um $\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels verschiedenen Richtungen in Ansätze oder sogenannte Lappen

c, c, c ausgeht. Letztere sind mit Durchbohrungen versehen, zum Behufe des Durchgangs von Schraubenbolzen, die den Anschluß der aus hartem Holze — gewöhnlich Buchenholz — dargestellten Füße d, d, d des Meßtisches bewirken. Diese endigen in Spitzen von Stahl, welcher das einzige am gesammten Apparate vorkommende und den Stand der — bei den Meßtischoperationen öfters anzuwendenden — Magnetnadel alterirende Material ist, indem sonst alle Theile mit Ausnahme der Füße und Planchette aus Messing angefertigt zu werden pflegen. Kurz vor ihren Enden haben die Füße Hervorragungen oder Nasen, um sie beim Horizontalstellen des Meßtisches bequemer in den Erdboden eindrücken zu können.

Ungefähr $2\frac{1}{2}$ Ellen beträgt beim aufgestellten Meßtische für gewöhnliche Manneslänge der Abstand der Planchette von der Ebene der Fußspitzen, von denen je eine von der anderen gegen 2 Ellen weit entfernt ist. Nach ihren oberen Enden hin nimmt die Stärke der Füße allmählig zu, und zuletzt sind dieselben mit Einschnitten und Oeffnungen versehen, in welche hinein bezüglich jene Lappen und Schraubenbolzen passen, dergestalt, daß daselbst Charniere gebildet werden, um welche herum die Füße sich drehen lassen. Deutlich zeigt die Figur diese Einrichtung, und läßt besonders am vorderen Fuße den Kopf e so wie die zum besseren Angriff mit Ansätzen oder Flügeln versehene Mutter f erkennen, läßt auch ohne Mühe die Folgerung zu, daß der Anschluß der Füße an die Lappen um so bleibender sein werde, je mehr eine jede der Schraubenmuttern angezogen wird.

Damit die Planchette sich nicht willkührlich um ihre verticale Axe drehen könne, so wird die Trompete b an ihrem unteren Ende von einem federnden Spannringe umschlungen, welcher mittelst einer Schraube — der groben Stellung — der Trompete dergestalt angeschlossen werden kann, daß für gewöhnliche Kraft eine Drehung derselben in ihm schwerlich erfolgen kann. Seinerseits ist der die Trompete umspannende Ring auf dem Cylinderstücke drehend beweglich, welches die dem bereits oben erwähnten Conus nur als Führung dienende Oeffnung enthält. Durch diesen Spannring allein, wie er hier erscheint, könnte sonach keinesweges die drehende Bewegung der Trompete um ihre Axe gehindert werden. Hierzu dienen vielmehr Vertiefungen auf der Außenfläche des Spannringes, welche Erhöhungen entsprechen, die mit dem den Spannring tragenden Cylinderstücke auf folgende Art in Verbindung stehen. Die Vertiefungen sind regelmäßig und zum Eingriff einer Schraube von sehr geringer Gangweite — der Mikrometerschraube — geeignet, deren Gänge hier als Hinderniß der dre-

Staats-Bibliothek Passau

henden Bewegung der Trompete und mithin auch der mit dieser fest verbundenen Planchette anzusehen sind. Soll dennoch nach vorangegangenem Gebrauche der groben Stellung eine Drehung der Planchette geschehen, — wozu die Nothwendigkeit bei erforderlichen geringen Winkelbewegungen eintritt, — dann dient hierzu die mit einem Kopfe h versehene Mikrometerschraube, genau so wie dies bei der Mikrometerschraube der Bouſſole stattfand.

Die Lager der Mikrometerschraube sind an einen der Lappen c befestigt und so eingerichtet, daß sie je nach Bedarf der auf dem Spannringe eingeschnittenen Schraubenmutter beliebig genähert werden können, was einen verhältnißmäßig tiefen Eingriff der Schraubengewinde in die Gänge der Schraubenmutter, und in Folge dessen einen mehr oder weniger leichten Gang derselben herbeiführt.

Uebrigens wendet man zur Verminderung der Reibung der Schrauben in ihren Muttern, auch des Conus in seiner Führung entsprechende Schmiermittel an, gewöhnlich solche, die bei niederer Temperatur erst fest werden, d. h. vorwaltend ölige.

§. 81.

Zur Horizontalstellung dienen — wie schon bemerkt — bei dem als Beispiel gewählten Meßtische die Hervorragungen an den Füßen desselben, und das Erkennungsmittel für die Lage der Planchettenoberfläche ist die Dosenlibelle. Sie wird auf die Mitte der Planchette aufgestellt und diese für horizontal erklärt, sobald die Libelle den horizontalen Stand anzeigt, stillschweigend jedoch dabei vorausgesetzt, daß die Füße des Tisches fest genug in den Boden hineingetrieben worden sind, ein freiwilliges Nachsinken des Apparates also nicht erfolgen könne. Während hier das Befestigen der Füße im Boden mit dem Horizontalstellen der Planchette gleichzeitig geschieht, folgt diese Operation jener nach, sobald der Meßtisch mit einer eigentlichen, in der Hauptsache aus Stellschrauben bestehenden Horizontalstellung versehen ist, wie eine solche z. B. an der Bouſſole vorkam. Das Horizontalstellen mag nun auf die eine oder die andere Art stattfinden, nie wird der Geometer versäumen, den Stand der Libelle außer in der Mitte der Planchette auch noch an anderen Stellen derselben zu beobachten, um vorkommenden Abweichungen zu begegnen, besonders die Röhrenlibelle — falls eine solche angewendet wird — nach mehreren wesentlich verschiedenen Richtungen auf die Planchette zu bringen.

Von selbst versteht es sich, daß nach Beendigung dieser Operation Erschütterungen, einseitige augenblickliche oder andauernde Be-

lastungen u. dgl. des Meßtisches sorgfältig zu vermeiden sind; da ejdoch derselbe auch unabwendbaren Einflüssen unterliegt, wie z. B. dem Wechsel von Sonnenschein und Schatten, so ist es Pflicht des Geometers, von Zeit zu Zeit nachzusehen, ob die Planchettenoberfläche ihre ursprüngliche Lage beibehalten hat.

§. 82.

Vor dem Gebrauch des Meßtisches ist zu untersuchen, ob die Drehungsaxe seines Zapfens — hier der Trompete — eine Verticale bildet bei horizontaler Lage der Planchettenoberfläche, zu welchem Behufe diese nur drehend bewegt und beobachtet zu werden braucht, inwiefern die Libelle ihren Stand ändert. Selten besteht ein Meßtisch diese Prüfung, oder geschähe es wirklich, so wird es ein anderes Mal nicht mehr der Fall sein, eine Erscheinung, welche hauptsächlich in dem Einflusse ihren Grund hat, den die Luftfeuchtigkeit auf das Material der Planchette und der Füße des Meßtisches ausübt. Dem Uebel ist jedoch bald durch Abschleifung der fehlerhaften Stellen der Planchettenoberfläche abzuhelfen, außerdem aber die Größe des dadurch entstehenden Fehlers leicht und auf die nachher anzugebende Weise zu würdigen.

Aus dem Vorangehenden folgt, daß, wenn die Drehungsaxe der Planchette eine Verticale bildet, die Mittellinien der Füße des Meßtisches in verticalen, sich in jener Axe gemeinschaftlich durchschneidenden Ebenen enthalten sein werden, deren Neigung zu einander $\frac{4}{3}$ eines rechten Winkels beträgt. Keinesweges dürfen die Füße mit Gewalt durch seitliche Biegung genöthigt werden, eine andere Lage anzunehmen, weil vermöge ihrer Elasticität leicht ein Zurückgehen zur ursprünglichen Form und damit eine Aenderung im Stande der Planchette nothwendig herbeigeführt werden würde.

Hinsichtlich der Ebene der drei Fußspitzen ist zu bemerken, daß dieselbe je nach Beschaffenheit des Terrains horizontal oder schräg, und dann entweder so gelegen sein kann, daß alle drei durch die Spitzen gedachten Geraden geneigt sind, oder nur zwei derselben, indem die dritte eine Horizontale bildet; ein Fall, der das Horizontalstellen der Planchette wesentlich erleichtert. Von der Lage dieser Ebene zur Verticalaxe des Meßtisches hängt die Stabilität desselben zuvörderst ab, und sie ist um so größer, je mehr beide der Rechtwinkligkeit zu einander nahe kommen, außerdem aber durch die Entfernungen bedingt, welche dem Durchschnittspunkt der Tischaxe mit der Fußebene von den Fußspitzen zukommen, und zwar am größten, sobald diese Entfernungen im Verhältniß

der Gleichheit stehen. Letzteres gilt jedoch nur mit der Einschränkung, daß das Dreieck der Fußspitzen weder eine zu große noch eine zu kleine Basis gewährt, da sonst die Fußspitzen ein dem sicheren Stande des Meßtisches nachtheiliges Bestreben äußern, in horizontaler Richtung auszuweichen, während bei zu kleiner Basis, d. h. bei sehr steiler Lage der Füße, der Schwerpunkt des Tisches sich allzusehr von dieser entfernen würde. Ueberdies wird hierbei vorausgesetzt, daß der Schwerpunkt des Meßtisches in dessen Verticalaxe hineinfällt, was nur bei einer völlig gleichförmigen Massenvertheilung um dieselbe herum stattfindet; eine Voraussetzung, welche der Geometer thunlichst, besonders aber bei nachgebendem Boden möglichst annähernd zu verwirklichen bemüht sein wird.

§. 83.

Ist man der vorhin bezeichneten sicheren Aufstellung des Meßtisches gewiß, d. h. erscheint die Planchettenoberfläche — mit welcher das darüber ausgespannte Papier identisch erachtet wird — horizontal, und findet dies fortwährend statt, wie sehr auch die Planchette um ihre Verticalaxe drehend bewegt werden mag, dann bedeutet dieselbe einen Theil derjenigen Horizontalebene, auf welche die Objecte der Gegend zu projiciren sind, ja eine wirkliche Constructionsebene, insofern es nun darauf ankommt, auf ihr die verhältnißmäßige Lage jener Objecte graphisch darzustellen. Diese Darstellung selbst beruht auf den als bekannt anzunehmen Sätzen über Aehnlichkeit der Figuren überhaupt, insbesondere aber der Dreiecke, und wird sogleich zur Betrachtung kommen, wenn wir uns zuvörderst der hierzu nothwendigen Geräthschaften versichert haben werden.

§. 84.

Den ersten Platz nimmt unter diesen Geräthschaften das Dioptерlineal ein, dessen Bestimmung dahin geht, Durchschnitte verticaler Ebenen mit der Planchettenebene darzustellen. Wie schon seine Benennung besagt, ist es ein Lineal aus Holz oder Messing; aus letzterem Material besteht das in Fig. 85 abgebildete.

a zeigt das eigentliche Lineal, nahe von der Länge der Diagonale der Planchettenoberfläche. Das vorliegende ist 22 Zoll lang, 2 Zoll breit, $\frac{1}{8}$ Zoll dick und an der in Gebrauch kommenden Kante bc mit einer abgeschrägten Facette versehen. An beiden Enden erheben sich Dioptern, nämlich das Oculardiopter d und das Objectivdiopter e, ein jedes zum Behufe des Aufrichtens und Niederlegens mit Charnie-

ren versehen. Sehr oft werden jedoch auch Dioptern angewendet, wie sie bei Gelegenheit der Bouſſolenbeſchreibung erwähnt worden ſind, nämlich ſogenannte Doppeldioptern, d. h. bei welchen ein jedes zugleich Ocular- und Objectivdiopter iſt.

Vorzüglich ſind es zweierlei Erforderniſſe, auf deren genaueſte Erfüllung beim Diopterlineale zu ſehen iſt, indem zuerſt die Viſirebene durch eine der Linealkanten — beim einſeitigen der bequemen Handhabung wegen durch die rechte — hindurch gehen, und ſolche rechtwinklig auf der Lagerfläche des Lineals ſelbſt ſein muß. Letztere Eigenſchaft wird zuvörderſt nachzuweiſen und wie bei der Bouſſole zu unterſuchen ſein, ob, nachdem das Diopterlineal auf die horizontal geſtellte Planchette gebracht worden iſt, deſſen dioptriſche Ebene mit dem Faden eines ruhig hängenden Lothes zum Zuſammenfallen gebracht werden kann; entgegengeſetzten Falles aber iſt ſo lange von den aus der Figur deutlich zu erſehenden Stellſchrauben Gebrauch zu machen, bis jener Bedingung Genüge geſchieht. Auf die erſtere Eigenſchaft pflegt das Diopter in der Regel nicht geprüft zu werden, indem man ſtillſchweigend vorausſetzt, der Mechanicus habe das Inſtrument bereits dahin juſtirt, daß mit dem Eintreten der zweiten auch die erſtere, nämlich das Zuſammenfallen der dioptriſchen Ebene mit der Linealkante, von ſelbſt ſich verwirklicht. Inzwiſchen kann auch in dieſer Hinſicht die Prüfung des Diopterlineals leicht erfolgen und beſteht nur in einer Umkehrung deſſelben bei genauem Anſchluß an die vorher längs der Kante auf der Planchette mit einem feinen Stifte gezogenen Geraden, worauf die bei der erſten Beobachtung in der Viſirebene wahrgenommenen Objecte genau wiederum in derſelben erſcheinen müſſen, widrigen Falls von den auch zu dieſem Behufe vorhandenen Juſtirungsſchrauben Gebrauch zu machen iſt.

Hogrewe, Bugge und Andere haben Diopterlineale empfohlen, deren Viſirebenen in die Mitte des Lineales fallen, und den Vorzug derſelben vor dem beſchriebenen hauptſächlich in mehrerer Einfachheit und der damit verbundenen leichteren Juſtirung, ſo wie in der größeren Stabilität finden wollen, auch gemeint, daß die durch dergleichen Lineale entſtehenden Fehler in der Darſtellung der Winkel außerordentlich klein und für gewöhnliche Meßtiſchoperationen unbedenklich zu vernachläſſigen wären.

In Betreff der Handhabung des Diopterlineals merken wir nur an, daß, ſobald deſſen Viſirebene in die Richtung der durch Objecte — Baken, Thurmſpitzen u. ſ. w. — bezeichneten Verticalebene gebracht worden iſt, deren horizontale Trace, d. h. ihr Durchſchnitt mit

der Horizontalebene der Planchette blos noch dem Auge sichtbar dargestellt zu werden braucht, was gewöhnlich mittelst eines fein zugespitzten und längs der Linealkante gleitend fortzubewegenden Bleistiftes geschieht. Die hiernach auf dem Papiere sich zeigende Gerade heißt **Visirlinie.**

§. 85.

Wird das Diopterlineal in die Richtung einer zweiten Verticalebene gebracht und für diese die entsprechende Visirlinie gezogen, dann leuchtet ein, daß der durch beide Visirlinien dargestellte Winkel die Neigung der zwei Verticalebenen zu einander vergegenwärtigt. Dasselbe würde von anderen Verticalebenen gelten, überhaupt von allen, deren Kanten innerhalb der Planchettenfläche hineinfallen, welche Kanten folglich in ihren Durchschnitten mit dieser Fläche die Scheitel ebener Winkel bilden. Hieraus geht die Bedeutung des Meßtisches als Instrument zum Bestimmen eines Winkels hervor. Nicht seine Größe in Graden zeigt dasselbe an, sondern der Winkel selbst wird durch graphische Darstellung seiner Schenkel veranschaulicht.

§. 86.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Angabe des Durchschnitts der innerhalb der Planchettenfläche gelegenen Kante zweier Verticalebenen mit der Erdoberfläche, d. h. des Fußpunktes des Perpendikels aus dem Scheitel der Horizontalprojection beider Ebenen. Hierzu dient die **Lothzange** oder **Gabel** q Fig. 84, so genannt wegen der Aehnlichkeit dieses Geräthes mit einer wirklichen Zange oder Gabel. Sie wird aus Holz oder Messing dargestellt und zerfällt in zwei Schenkel qn und qm, bezüglich einen oberen und unteren, an deren Vereinigung ein Handgriff angebracht sein kann. Ihr Abstand ist der Planchettendicke angemessen, in der Art, daß die Zange leicht geführt werden kann, sobald zwischen deren Schenkeln die Planchette sich befindet. Der obere Schenkel geht in eine Spitze über, welche beim Gebrauch der Zange an den auf der Planchettenoberfläche gegebenen Punkt angelegt wird; am unteren ist ein Oehr für den Faden des Lothes angebracht, und in der Ausführung dafür Sorge getragen worden, daß jene Spitze n und die Axe des durch das Loth gespannten Fadens in einerlei Verticale hineinfallen, zugleich aber auch die den Erdboden berührende Lothspitze p, welche den durch ein Pfählchen zu bezeichnenden Fußpunkt des Perpendikels für n vorstellt.

Geht das Perpendikel durch einen der Füße des Meßtisches oder

durch dessen mittleren Körper hindurch, dann werden einfache Schlußfolgen zum geforderten Fußpunkt verhelfen. Außerdem könnte für den letzten Fall von einem dem Winkelhaken ähnlichen, die Zange völlig ersetzenden Geräth abc Fig. 86 Anwendung gemacht werden, dessen oberer Schenkel jedoch der sicheren Auflegung wegen beträchtlich größeres Gewicht haben müßte als der untere.

In den meisten Fällen ersetzt die Zange ein Steinchen, das man von jener Stelle der unteren Planchettenfläche aus frei herabfallen läßt, welche dem gegebenen Punkte am nächsten liegt, deren Auswahl jedoch dem Augenmaße des Beobachters überlassen bleibt.

§. 87.

Soll von einem gegebenen Punkte der Planchettenoberfläche aus eine Anzahl Visirlinien angegeben werden, 30, 40, ja noch mehrere, dann pflegt man diesen Punkt durch eine Visirnadel d. i. eine Nadel von feinster Sorte zu bezeichnen, welche zu bequemerer Fassung mit einem abgerundeten Siegellackkopfe versehen ist. Zu Visirnadeln eignen sich besonders sogenannte Perlennadeln, wie sie bei der Perlenstrickerei zum Anreihen sehr kleiner Perlen gebraucht werden. Von der Nadel wird ungefähr $\frac{1}{3}$ ihrer Länge vom Oehre aus abgebrochen — weil sie sonst zu lang sein und dann leicht brechen würde — und das Bruchende des Spitzenstückes durch Umhüllen desselben mit schmelzendem Siegellacke mit dem bemerkten Kopfe versehen.

Der Vortheil der Visirnadel besteht hauptsächlich in Zeitersparniß, weil der Beobachter während des Visirens stets nur — dem Tastvermögen folgend — darauf zu achten hat, daß die Kante des Diopterlineals die Visirnadel berührt, derjenige Zeitaufwand sonach in Wegfall kommt, welcher beim Ziehen jeder einzelnen Visirlinie zum Anlegen der Linealkante an den bezeichneten Punkt erforderlich sein würde. Dieser Vortheil wird für dergestalt erheblich erachtet, daß der Nachtheil der Visirnadel gewöhnlich ganz außer Betracht kommt, obschon bei einer nur einigermaßen starken Visirnadel beträchtliche Fehler hervorgehen, besonders für Visirlinien auf verhältnißmäßig nahe Objecte. Wäre die Nadel aber auch äußerst dünn, so geht die Visirlinie gleichwohl nicht mehr durch den gegebenen Punkt hindurch, sondern weicht von diesem bei lothrechtem Stande um die halbe Nadelstärke ab.

Praktiker wissen zwar diese Fehler durch Schiefstellung der Nadel fast unmerklich zu machen, allein gar zu leicht bildet sich dann um den gegebenen Punkt herum eine trichterförmige, andere Fehler herbei-

führende Vertiefung, daher die meisten Autoritäten der praktischen Geometrie den Gebrauch der Visirnadel gänzlich verwerfen.

§. 88.

Schon früher (§. 80) wurde angeführt, daß bei den Meßtischoperationen von der Magnetnadel Anwendung geschähe.

Die hier gebräuchliche ist von geringerer Größe als die der eigentlichen Boussole, in Folge dessen auch ihr Gehäuse und übriger Zubehör von kleineren Dimensionen, sonst aber und im Wesentlichen mit dieser übereinstimmend. Sie heißt Orientirungsboussole, indem dieselbe dazu dient, die Planchette während einer Messung — wenn auch nur möglichst annähernd — in dieselbe Lage zu den Weltgegenden zu bringen, die ihr beim Beginn derselben ertheilt wurde, wozu sie desto mehr geeignet ist, mit je größerer Sorgfalt bei ihrer Anfertigung verfahren wurde.

Entweder wird die Orientirungsboussole mit der Planchette fest verbunden oder frei auf dieselbe aufgesetzt. Die Befestigung kann auf mancherlei Weise stattfinden, z. B. mittelst Schrauben, welche durch die Grundplatte der Boussole hindurch in die untere Seite der Planchettenfläche eindringen, auch durch daselbst angebrachte Leisten mit schrägen Führungsflächen, nach Art der sogenannten in Fig. 87 abgebildeten Schwalbenschwanzverbindung. a zeigt den Durchschnitt der Boussolenplatte, b und c stellen die an die Planchette angeschraubten Leisten dar, zwischen welchen jene fest gehalten wird. Fig. 88 läßt die Verbindung der Boussole mit der Planchette weiter erkennen, besonders auch daß solche in der Mitte einer Seite geschieht. Fig. 89 giebt genauere Auskunft über die Construction der Orientirungsboussole selbst, auf deren beinahe völliger Uebereinstimmung mit der durch Fig. 73 vergegenwärtigten kaum aufmerksam gemacht zu werden braucht. Wie diese, ist auch die Orientirungsboussole, um Beschädigungen ihrer wesentlichen Theile zu verhüten, mit einer Arretirung versehen, ähnlich der von Fig. 73.

Von der Orientirungsboussole wird hauptsächlich bei einer erst später zu erörternden, jetzt nur zu nennenden Operation, dem Rückwärtseinschneiden, sodann bei Meßtischaufnahmen in Wäldern und engen Thälern, so wie endlich zur annähernden Bestimmung der Mittagslinie auf dem Menselblatte Gebrauch gemacht.

§. 89.

Obschon mehrere der vorher beschriebenen Hülfswerkzeuge für entbehrlich erachtet werden können, — was in Bezug auf Zange, Loth

und Orientirungsbouſſole auch wirklich von vielen Geometern geſchieht, — ſo gilt dies keinesweges von einem noch übrigen Erforderniß, nämlich dem Maßſtabe, deſſen Conſtruction zwar vermöge der §§. 14 bis 16 zur Genüge erörtert ſein dürfte, über deſſen Material und ſonſtige techniſche Ausführung jedoch noch einige Bemerkungen geſtattet werden mögen.

Der Maßſtab, ſei derſelbe ein vorgeſchriebener oder willkührlicher, erſcheint gewöhnlich auf rectangulären Platten aus Meſſing, Holz, Elfenbein u. dgl. dargeſtellt, und es werden von demſelben die betreffenden Dimenſionen entweder mittelſt eines Zirkels abgenommen, oder der Maßſtab geſtattet ein unmittelbares Anlegen an die auf der Planchettenoberfläche gezogene Gerade, welche letztere Meſſungsart von Vielen der erſteren wegen der leicht veränderlichen Zirkelſtellung vorgezogen wird. Gewähren nun allerdings metallene Maßſtäbe den Vortheil größerer Dauer, ſo nützen ſich leider an denſelben bei anhaltendem Gebrauche die Zirkelſpitzen allzu bald ab. Vorzüglich aus dieſem Grunde, ganz abgeſehen von der nicht unerheblichen Längenänderung metallener Maßſtäbe bei eintretendem Temperaturwechſel, daß ferner nicht in allen Gegenden paſſende Maßſtäbe dieſer Art ſogleich zu erlangen ſind, und wegen noch anderen Mängeln derſelben pflegen hölzerne Maßſtäbe vorgezogen zu werden. Die Auftragung der verjüngten Längeneinheiten erfolgt aber in der Regel nicht auf die bloße Holzfläche, ſondern dieſe wird zuvor mit Papier überzogen. Fig. 90 ſtellt einen ſolchen Maßſtab dar. Das Holz muß völlig ausgetrocknet und in Geſtalt eines Bretchens von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke zugerichtet ſein. Länge und Breite hängen von der Umfänglichkeit des beabſichtigten Maßſtabes ab, auch iſt es für ſich klar, daß beide größere Flächen — welche auf das Sorgfältigſte geebnet vorausgeſetzt werden — mit Papier überzogen und darauf Maßſtäbe gezeichnet werden können.

Maßſtäbe dieſer Art nützen ſich zwar früher ab als metallene, ſind jedoch leichter zu erſetzen und — was beſonders wichtig iſt — befinden ſich nahe in einerlei Zuſtand wie das Papier auf der Planchette ſelbſt, daher alle äußeren Einflüſſe wie Feuchtigkeit, Wärme u. ſ. w. auf beide Papierflächen völlig gleiche Wirkungen hervorbringen.

Bei kleinen Meßtiſchaufnahmen zeichnet man auch wohl den Maßſtab auf die Planchettenoberfläche ſelbſt, bei größeren hingegen faſt niemals, überhaupt nur ungern, da hierdurch — indem die Hand alsdann zu oft auf dieſer Fläche ruhet — ſehr leicht Störungen in der Planchettenſtellung herbeigeführt werden können.

§. 90.

Im Wesentlichen ist der hier beschriebene Meßtischapparat als der Lehmann'sche bekannt, so genannt, weil sich desselben der um den Gebrauch des Meßtisches und das Situations-Zeichnen hoch verdiente, im Jahre 1811 verstorbene K. S. Major Lehmann zu bedienen pflegte.*) Noch mancherlei Stücke gehören zu diesem Apparate, z. B. eine Loupe zum Abnehmen der Dimensionen vom Maßstabe, Reserve-planchetten u. dgl. Selbst das Diopterlineal erscheint an ihm weiter vervollständigt, und namentlich zum Höhenmessen eingerichtet. Oder anstatt des Haardiopters dient — besonders für weit entfernte Objecte — ein Fernrohr, dessen optische Axe mit der Kante des Lineals in einerlei Ebene fällt und darin eine drehende Bewegung zuläßt, ich meine die Kippregel. Da jedoch letztere Zuthaten künftig bei den Verticalmessungen zur Sprache kommen werden, so übergehen wir solche gegenwärtig. Aehnliches gilt von noch einigen anderen Utensilien, wovon erst bei deren Bedarf die Rede sein wird. Nur einer, leider nicht genügend beachteten Vervollständigung der Planchette möge noch gedacht werden.

Ist an irgend einem Standorte die Aufstellung des Meßtisches erfolgt, d. h. die Planchette desselben horizontal gestellt, auch auf ihr der Standpunkt bezeichnet worden, und sollen nun von diesem aus Operationen vollzogen werden, dann darf während der Dauer derselben selbst nicht die geringste Drehung der Planchette erfolgen. Unerläßliche Pflicht des Geometers ist es daher, von Zeit zu Zeit den Stand derselben zu untersuchen, was am einfachsten durch das Anlegen des Diopterlineals an eine feste, bestimmten Richtobjecten entsprechende Visirlinie geschieht. Ohne einigen Zeitaufwand läßt sich diese Prüfung jedoch nicht bewerkstelligen, auch ist man keinesweges sicher, das Diopterlineal ein anderes Mal völlig wie das erste Mal an die Visirlinie angelegt zu haben. Jenen Zeitaufwand beträchtlich mindernd und dieser Unsicherheit vorbeugend erscheint ein mit der Planchette fest verbundenes Diopter, Versicherungsdiopter genannt. Dasselbe

---

*) Man sehe dessen Nachlaß: die Lehre der Situation-Zeichnung oder Anweisung zum richtigen Erkennen und genauen Abbilden der Erd-Oberfläche in Charten und Planen, von Johann George Lehmann, Königl. Sächs. Major von der Infanterie, Adjoint des Generalstabes Seiner Majestät des Königs und Plankammer-Director. Herausgegeben von K. A. Becker, Königl. Sächs. Major, und G. A. Fischer, Professor u. s. w. Zwei Theile. Vierte sehr verbesserte und vermehrte Auflage. Dresden und Leipzig, in der Arnoldi'schen Buchhandlung 1828.

ist ganz so wie die Orientirungsbouſſole an der unteren Planchettenfläche angebracht und — am paſſendſten — doppelt wirkend. In Fig. 84 zeigt t die eine Hälfte deſſelben, während die andere von der erſten in der gewählten Stellung bedeckt wird. Der Gebrauch des Verſicherungsdiopters bedarf der Anleitung wohl kaum; für ſich leuchtet ein, daß, wenn deſſen Viſirebene zwei gegebenen Objecten entſpricht, dies auch der Fall ſein muß im Verlaufe der von dem betreffenden Standpunkte aus zu vollziehenden Operationen, und man nur nöthig hat, zuweilen die Richtigkeit der Viſirebene dieſes Diopters zu unterſuchen, was ein Werk weniger Augenblicke iſt.

§. 91.

Meßtiſchoperationen.

Die Operationen mit dem Meßtiſche können in einfache und zuſammengeſetzte eingetheilt werden, inſofern unter jenen die Beſtimmung einzelner Punkte und Linien auf der Erdoberfläche, unter dieſen die Angabe aller Stücke verſtanden wird, welche zur graphiſchen Darſtellung einer Gegend in verjüngtem Maße d. i. eines Planes erforderlich ſind. Abſteckungen gerader Linien, Perpendikel- und Parallelenausführungen, Längenbeſtimmungen unzugänglicher Geraden u. dgl. gehören zu erſteren, zu letzteren aber die Darſtellung eines Syſtems von Dreiecken, deren Eckpunkte wirkliche d. h. auf dem Felde vorhandene Objecte ſind,*) oder eines ſogenannten geometriſchen Netzes nebſt den hierzu nöthigen Vorbereitungen, ſo wie deſſen ſpäterer Benutzung Behufs der Detailangabe einer Gegend.

Vor dem Eingehen in die wichtigſten dieſer nicht erſt nach obiger doppelten Auffaſſung zu ſondernden, ſondern vielmehr in ununterbrochener Folge aufzuzählenden Operationen werde an §. 9 erinnert und zur Vermeidung von Begriffsverwirrungen bemerkt, daß ſchlechthin ein Punkt oder eine Linie auf dem Felde nicht in der gewöhnlichen iſolirten Auffaſſung, ſondern ſtets bezüglich als Durchſchnitt einer Verticale oder einer Verticalfläche — im beſonderen Falle der Geraden einer Verticalebene — mit der Erdoberfläche zu deuten ſei.

§. 92.

Aufgabe. Es iſt eine Gerade und in ihr ein Punkt gegeben, um durch dieſen hindurch ein Perpendikel auf jene zu führen.

---

*) Der Ausdruck auf dem Felde iſt in der niederen Feldmeßkunſt üblich und mit Erdoberfläche gleichbedeutend, welche letztere Benennung mehr bei höheren geodätiſchen Operationen gebraucht wird.

Auflösung. MN Fig. 91 sei die gegebene d. h. durch zwei Objecte M und N bezeichnete Gerade auf dem Felde und A der in ihr bestimmte Punkt. Dann ist der Meßtisch über A horizontal zu stellen, die Vistrebene des Diopterlineales in die Richtung von MN zu bringen und längs der Kante desselben eine Gerade mn zu ziehen. Diese enthält den Durchschnitt der Verticallinie durch A, nämlich a, dessen Angabe unter Benutzung des Lothes erfolgt. Wird hierauf in a zu mn das Perpendikel qp construirt und an solches das Diopter=lineal angelegt, dann bedarf es offenbar nur noch der Aussteckung zweier Stäbe P und Q in der Richtung der durch mn gedachten Vi=strebene, um der Forderung zu genügen.

§. 93.

Aufgabe. Von einem außerhalb einer Geraden gegebenen Punkte ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

Auflösung 1. MN Fig. 92 sei die gegebene Gerade, A der außerhalb derselben gegebene Punkt. Nachdem wie in voriger Auf=gabe der Meßtisch gehörig über A aufgestellt und a auf der Plan=chette in der Verticale durch den gegebenen Punkt ermittelt worden ist, dann sind von a aus Vistrlinien nach zwei Punkten B und C der Geraden MN zu ziehen, die Entfernungen AB und AC zu messen und nach verjüngtem Maße aufzutragen, so daß man hat:

$$ab : ac = AB : AC.$$

Hierauf ist bc zu ziehen und zu dieser durch a das Perpendikel pq zu construiren, welches in der Richtung des verlangten Perpendikels PQ gelegen sein wird, dessen Absteckung so wie die Angabe seines Durch=schnitts D mit MN der Anleitung nicht weiter bedarf.

Auflösung 2. Vor der Aufstellung des Meßtisches können auf dessen Planchette zwei zu einander perpendiculäre Linien mn und pq Fig. 93 gezogen werden. Nun wird der Meßtisch dergestalt auf=zustellen sein, daß die eine, etwa mn, mit MN zusammenfällt, während die andere pq durch A geht; eine Operation, welche gewöhnlich meh=rere Versuche erheischt. Nach ihrem Gelingen erfolgt das Abstecken des gesuchten Perpendikels PQ wie vorhin, nämlich unter Anlegung des Diopterlineals an pq. Mittelst des Lothes ist der Fußpunkt D der Verticale durch d zu bemerken, d. h. der Durchschnitt von MN mit PQ.

Von selbst leuchtet ein, daß diese zweite Methode als Prüfung für das Resultat der ersten angesehen werden kann.

§. 94.

Aufgabe. Eine Gerade und ein Punkt sind gegeben, damit durch diesen zu jener eine Parallele geführt werde.

Auflösung 1. Es bedeute MN Fig. 94 die Gerade, A den Punkt, so wird verfahren, als handele es sich um die Lösung der Aufgabe des vorigen §., nämlich man giebt durch a ein Perpendikel pq auf MN an und construirt zu pq durch a das Perpendikel rs, welches in der gesuchten Parallele liegt, daher diese, nämlich RS, sogleich abgesteckt werden kann.

Zur Bestätigung messe man AD, d. h. die Entfernung des Punktes A von der gegebenen Geraden MN, stelle den Meßtisch in zwei thunlichst weit von D entfernten Punkten dieser Geraden auf, errichte nach §. 92 aus denselben Perpendikel und mache solche dem Abstande AD gleich, worauf deren Endpunkte mit A in einerlei Richtung enthalten sein müssen.

Auflösung 2. Auch kann man den Meßtisch irgendwo in der gegebenen Geraden MN Fig. 95 aufstellen und damit mn auf der Planchette zusammenfallend machen, in mn den Punkt b beliebig wählen, durch diesen so wie den gegebenen Punkt A ein passendes Alignement PQ führen und darin pq ziehen. Wird hierauf der Meßtisch gehörig über A aufgestellt, d. h. in das Alignement PQ eingerichtet, auch a lothrecht über A in pq bezeichnet und nun der Winkel sap = nbp construirt, dann ist der Schenkel sa oder dessen Verlängerung ar in der Richtung der geforderten Parallele RS gelegen, welche folglich nur unter Anlegung des Diopters an rs abgesteckt zu werden braucht.

Behufs der Bestätigung ist AB zu messen, der Meßtisch wie bei der ersten Auflösungsmethode in zwei anderen von B thunlichst entfernten Punkten der Geraden MN aufzustellen und in dieselbe mn einzurichten, sodann aber in der Richtung von qp jene Länge AB aufzutragen, wodurch, wenn anders richtig verfahren worden war, zwei Punkte sich ergeben werden, welche mit A in der gesuchten Parallele RS enthalten sind.

§. 95.

Aufgabe. Von einem einzigen Standpunkte aus die Länge einer Geraden zu bestimmen.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn die Gerade an beiden Endpunkten zugänglich ist.

Es sei AB Fig. 96 die zu messende Gerade, C der außerhalb derselben gewählte und bereits auf der Planchette durch c bezeichnete Standpunkt; dann sind aus diesem die Visirlinien ca und cb bezüglich nach den durch Stäbe oder sonst bemerkbar gemachten Endpunkten A und B zu ziehen, die Längen CA und CB zu messen, und solche im verjüngten Maße auf die betreffenden Visirlinien aufzutragen. Hierauf stellt ab die zu messende Gerade im verjüngten Maße dar, wodurch der Forderung Genüge geschieht.

Zweiter Fall. Die zu messende Gerade sei nur an einem ihrer Endpunkte zugänglich.

Mögen AB Fig. 97 neuerdings die zu bestimmende Gerade und C den auf der Planchette durch c vergegenwärtigten Standpunkt vorstellen. Hier werden zuvörderst nach A und B Visirlinien aus c gezogen, sodann nach zwei beliebigen Punkten D und E, von welchem letzteren nur bedungen wird, daß derselbe in der Richtung DB liege, alsdann die Längen CA, CD und CE gemessen und auf die entsprechenden Visirlinien nach einem verjüngten Maßstabe aufgetragen. Nun zieht man de bis zum Durchschnitt mit der Visirlinie nach B, d. i. bis b, so zeigt ab die gesuchte Länge im verjüngten Maße.

Dritter Fall. Die Gerade sei an keinem ihrer Endpunkte zugänglich.

Haben AB, C und c die Bedeutung der vorigen Fälle, dann wähle man einen Punkt D und in den Richtungen DA und DB beziehentlich die Punkte E und F, ziehe nach diesen Punkten hin so wie nach A und B Visirlinien, messe die Längen CD, CE und CF und trage dieselben verjüngt von c aus auf die betreffenden Visirlinien. Hierauf werden durch d und e so wie durch d und f gerade Linien gezogen, bis solche die Visirlinien nach A und B je in den Punkten a und b schneiden, dann zeigt ab wiederum die gesuchte Gerade in verjüngtem Maße.

Ein Leichtes wird es sein, diese Auflösungen zu beweisen, so wie die beinahe völlige Uebereinstimmung des dritten Falles mit dem zweiten des §. 49 zu erkennen, desgleichen einzusehen, daß hiervon zur Auflösung der Aufgabe des §. 94 Gebrauch gemacht werden könne, da ab parallel zu AB, und daher nur durch c eine Parallele hierzu zu construiren ist. Behufs der Praxis werde nur noch bemerkt, daß die Punkte C, E, F und D mit Rücksicht auf die Erlangung guter d. h. weder zu stumpfer noch zu spitzer Schnitte der Geraden auszuwählen sind, so wie es sich von selbst versteht, daß das Messen der Linien und deren Auftragung im verjüngten Maße, nicht minder eine jede der

sonst hierbei vorkommenden Operationen äußerst sorgfältig zu vollziehen ist, wenn anders Resultate von nur einiger Genauigkeit erreicht werden sollen. Denn blos in Ermangelung besserer, aus den ferneren Betrachtungen über den Gebrauch des Meßtisches sich ergebender Auflösungsmethoden der Aufgabe dieses Paragraphs wird man die angeführten ausüben, dann aber bei wichtiger Veranlassung stets mindestens noch einen passenden Standpunkt außerhalb AB annehmen, und von diesem aus die vorigen Operationen wiederholen.

§. 96.

Bei einer jeden der so eben erledigten Auflösungsmethoden ist auf der Planchette ein dem Dreiecke ABC ähnliches und gleich gelegenes Dreieck abc entstanden, welches folglich in seinen Eckpunkten die verhältnißmäßige Lage der drei Punkte A, B und C darstellt, daher diese Verfahrungsarten auch der Forderung, die Lage zweier Punkte in Bezug auf einander und zu einem dritten darzustellen, entsprechen. Offenbar läßt diese Forderung jede Erweiterung zu, indem nach der verhältnißmäßigen Lage von vier, fünf u. s. w., kurz beliebig vielen auf dem Felde bezeichneten Punkten gefragt werden kann. Diesem Verlangen in der kürzesten Zeit zu genügen, dazu eignet sich der Meßtisch vor allen anderen Instrumenten am meisten, ja es ist dies dessen vornehmste Bestimmung. Behufs leichterer Uebersicht der hierbei einschlagenden Operationsmethoden möge eine nicht allzu große Anzahl auf dem Felde durch Stäbe bemerklich gemachter Punkte gedacht werden, auch wollen wir je zwei benachbarte mittelst gerader Linien verbunden voraussetzen, in der Art, daß eine Figur zu Stande kommt, deren graphische Darstellung im verjüngten Maße nunmehr die Aufgabe bildet.

ABCDEF Fig. 99 sei eine solche Figur, G irgend ein Standpunkt des Meßtisches, und auf dessen horizontaler Planchette der Punkt g dem Punkte G entsprechend angemerkt worden. Dann wird es darauf ankommen, Visirlinien aus g nach den Objecten A, B, C .... zu ziehen, die Längen GA, GB, GC .... zu messen und selbige nach verjüngtem Maße von g aus aufzutragen, wodurch die Eckpunkte a, b, c .... der fraglichen Figur gewonnen werden, welche zuletzt nur noch unter sich mittelst gerader Linien zu verbinden sind.

Diese Methode, welche füglich das Centralisiren genannt werden kann, eignet sich zur Aufnahme freier Bauplätze, Felder u. dgl. und führt bei flachem Boden, so wie unbeträchtlichen Längen der zu messenden Linien zu brauchbaren Ergebnissen.

§. 97.

Wäre ein Polygon z. B. ABCDE Fig. 100 nur längs seines Perimeters zugänglich, — ein Fall, der sich bei der Aufnahme eines Waldes, einer von engen Straßen durchzogenen Häusergruppe oder sonst leicht zutragen kann, — dann pflegt zur Aufnahme desselben folgendes Verfahren bisweilen ausgeübt zu werden.

Der Meßtisch wird über einen der Eckpunkte, etwa A aufgestellt, berücksichtigend, daß auf der Planchette des Standpunktes Bild a eine den ferner zu erwartenden Polygonecken Raum übrig lassende Lage erhält. Nun folgt das Ziehen von Visirlinien nach den benachbarten Eckpunkten B und E, wenn irgend möglich unter Festsetzung thunlichst weit entfernter natürlicher oder künstlicher Richtobjecte Z, Y, R und Q, damit die betreffenden Polygonseiten AB, AE als verhältnißmäßig kleine Theile der Alignements ZY und RQ erscheinen. Jetzt werden diese Seiten gemessen, nach verjüngtem Maße auf die entsprechenden Visirlinien aufgetragen und dadurch die Eckpunkte b und e gewonnen. Sollte von A aus ein ferneres Polygoneck wahrnehmbar sein, vielleicht D, dann ist eine Visirlinie nach demselben nicht zu versäumen.

Hierauf ist der Meßtisch über einen der benachbarten Eckpunkte, etwa über B aufzustellen, so daß b lothrecht über B und die Visirlinie ab in das Alignement ZY fällt, dann eine Visirlinie zum nächsten Eckpunkt C zu ziehen, die Seite BC zu messen und verjüngt aufzutragen, wodurch auf der Planchette ein neuer Punkt c ermittelt wird. Auch hier trachte man nach der Erlangung eines Alignements von möglichst weit entfernten Richtobjecten X, W, damit die Seite BC als kleines Stück desselben erscheint. Auf dieselbe Art wird vom nächsten Eckpunkt C, so wie später von D aus verfahren, und die vollzogene Operation dadurch bestätigt, daß die von D aus nach E gezogene Visirlinie freiwillig durch den auf der Planchette bereits vorhandenen Punkt e hindurch geht.

Für d ergiebt sich bei vorausgesetzter Wahrnehmbarkeit des Punktes D aus A schon vorher im Standpunkte C eine Bestätigung, indem die Entfernung des Durchschnitts d der Visirlinien ad und cd von c der verjüngten Seitenlänge CD entsprechen muß.

Die Uebereinstimmung dieser Methode mit der beim Boussolengebrauche angegebenen und dort durch das Peripherisiren bezeichneten leuchtet für sich ein. Wegen der Umständlichkeit jedoch und selbst Unzuverlässigkeit des Einlothens der Polygonecken wird nur bei dringender, jedem anderen Verfahren schlechterdings hinderlicher Ver-

anlassung von dieser Methode Gebrauch gemacht, und solche dann dadurch einigermaßen verbessert, daß man die Meßtischstandpunkte nicht unmittelbar über den Polygonecken, sondern in der Verlängerung der Seiten wählt.

§. 98.

Jene beiden Verfahrungsweisen aus mehr als einem Grunde weit hinter sich lassend erscheint die Methode des Basirens. Für die Aufnahme größerer oder kleinerer Gegenden gleich gut geeignet, überhebt sie uns des mühevollen, unsicheren und dabei zeitraubenden Einlothungsgeschäfts und läßt jeden beliebigen mit dem Meßtische nur immer erreichbaren Genauigkeitsgrad zu, daher nach ihr fast alle Meßtischaufnahmen von nur einigem Belange vollzogen werden. Der Grund für die Benennung so wie die sonstigen Eigenthümlichkeiten dieser Methode wurden schon bei den Boussolenoperationen angeführt, nur daß dort die Winkel wirklich gemessen wurden, während es sich hier um die graphische Darstellung ihrer Schenkel handelt.

Es möge ABCDE Fig. 101 das darzustellende Polygon bedeuten und zu diesem Behufe dessen Eckpunktsbezeichnung schon vorangegangen sein.

Zuvörderst ist in der Gegend des Polygons entweder zur Seite desselben oder solches durchschneidend eine durch möglichst weit entfernte Objecte X und Y bezeichnete Gerade, die Basis, wohl auch Standlinie genannt, auszuwählen, alsdann in solcher ein Standpunkt, etwa M, für den Meßtisch, jedoch so, daß von ihm aus die Mehrzahl der Polygonecken, im günstigsten Falle sämmtliche, gesehen werden können; setzen wir hier alle. Von der vorläufig nach dem Augenmaße beurtheilten Größe, Gestalt und der beabsichtigten Verjüngung des Polygons hängt die Lage der auf der Planchette zu ziehenden und in die Standlinie XY einzurichtenden Geraden xy ab, auch welcher Punkt — hier m — derselben den Standpunkt bedeuten soll, dessen Auswahl mit dem Vorbehalt geschieht, ihn erforderlichen Falles durch Herablothung auf dem Felde anzugeben, was inzwischen sofort erfolgen kann.

Nach dieser Vorbereitung findet das Ziehen sämmtlicher, die Polygonecken A, B, C . . . betreffenden Visirlinien statt, welche übrigens bei großer Anzahl auf passende Art durch Ziffern oder sonst zu bezeichnen sind. Darnach wird von M aus eine thunlichst beträchtliche Länge MF in runder Zahl abgemessen und nach deren Endpunkt F gleichfalls eine Visirlinie, nämlich mf, gezogen, außerdem aus Vorsicht nach einer

anderen Seite hinaus, vielleicht in der Richtung ME, eine zweite Länge MG, welche beide Linien Maßstabslinien heißen. Ist nun der Maßstab ein vorgeschriebener, so wird von demselben eine jede der gemessenen Längen abgenommen und auf die betreffenden Visirlinien aufgetragen, wodurch sich die Punkte f und g ergeben. Wäre derselbe willkührlich, dann wird man nur zu beurtheilen haben, welches Stück einer der Visirlinien der in ihrer Richtung gemessenen Länge entsprechen kann, worauf solches in die erforderliche Anzahl gleicher Theile einzutheilen ist, um die Einheit eines hiernach anzufertigenden Maßstabes zu erhalten, z. B. in 10, 20, 30 u. s. w., je nachdem 10, 20 oder 30 Längeneinheiten des wirklichen Maßes verwendet wurden. In der Regel erfolgt aber dann die Festsetzung des Maßstabes erst vom zweiten Standpunkte aus, besonders wenn das verjüngte Bild des Polygones die Grenzen einer Planchette nicht überschreiten soll.

Bei der Auswahl dieses zweiten, ebenfalls in die Standlinie XY hineinfallenden Standpunktes N ist eine doppelte Rücksicht zu beachten, insofern von ihm aus wiederum möglichst alle Polygonecken gesehen werden, desgleichen Visirlinien nach denselben die vom ersten Standpunkte aus gezogenen gleichbedeutenden gut durchschneiden sollen.

Die Aufstellung des Meßtisches erfolgt übrigens wie im ersten Standpunkte und kann von diesem aus durch vorläufiges, von einem Gehülfen zu vollziehendes Einsetzen eines Stabes in dem für passend angesehenen zweiten Standpunkte N wesentlich gefördert werden, dergestalt, daß es bei nur einiger Uebung nach zwei bis drei Versuchen gelingt, xy in XY einzurichten. Für einen bedungenen Maßstab kann über die Bestimmung des zweiten Standpunktes n in der Standlinie xy kein Zweifel entstehen, denn alsdann bedarf es nur des Ziehens einer Visirlinie durch f nach F bis zum Durchschnitt n mit xy, welcher Punkt seine Bestätigung dadurch erhält, daß eine durch g nach G gehende Visirlinie ebenfalls in n einkommt, während bei willkührlichem Maßstabe n beliebig, jedoch mit der oben bemerkten Rücksicht in xy auszuwählen ist.

Aus n endlich sind Visirlinien nach den Polygonecken A, B, C... zu ziehen und die gleichbedeutenden des ersten Standpunktes zu durchschneiden, was zur Erlangung der Eckpunkte a, b, c... führt, welche nur noch der Vereinigung bedürfen, damit — wie leicht erweislich — ein dem Polygone ABCDE in der Natur ähnliches abcde auf der Planchettenoberfläche zu Stande kommt.

§. 99.

Ungeachtet des Zusammenfallens der Vistrlinien fF und gG in einem einzigen Punkte n der Standlinie xy könnte dennoch über die richtige Lage der Polygonecken a, b, c . . . Zweifel entstehen, indem diese Punkte als Durchschnitte von Vistrlinien erscheinen, welche leicht fehlerhaft gezogen sein könnten. In diesem Falle ist das nochmalige Aufstellen des Meßtisches unerläßlich, was am einfachsten wiederum in der Standlinie erfolgt, entweder zwischen den beiden ersten Standpunkten oder außerhalb derselben. In Bezug auf Fig. 102 sei wie vorher auf der Planchette ein dem Polygone ABCD muthmaßlich ähnliches abcd erlangt worden, dessen Bestätigung erübrigen möge. Hierzu habe man einen dritten Standort P in der Standlinie ausgewählt und bereits xy in dieselbe eingerichtet, dann bedarf es nur noch des Ziehens der die Maßstabsendpunkte F und G betreffenden Vistrlinien bis zu ihrem Durchschnitte p, welcher bei richtigem Verfahren ein Punkt der Standlinie xy selbst sein wird. Werden aus diesem Punkte Vistrlinien nach den Polygonecken A, B . . . geführt, dann müssen diese, wenn anders richtig gearbeitet wurde, von selbst durch die schon vorhandenen Eckpunkte a, b . . . hindurch gehen.

Ist das wiederholte Aufstellen des Meßtisches in der Standlinie unmöglich oder erst in weiter Ferne ausführbar, dann geschieht die Prüfung unter Anwendung eines durch n zu legenden, XY schneidenden Alignements VZ, indem an einer geeigneten Stelle P desselben der Meßtisch aufgestellt und die dasselbe bezeichnende Gerade vz auf der Planchette in solches gehörig eingerichtet wird. Wäre nun zuvor der Lothpunkt M für m durch einen Stab bemerkbar gemacht worden, so ziehe man jetzt durch m nach demselben hin eine Vistrlinie, welche zv in p d. i. in dem zu allen übrigen Punkten verhältnißmäßig liegenden Standpunkte schneidet. Vistrlinien endlich aus p nach den Polygonecken A, B . . . werden entweder, indem solche durch die gleichbedeutenden Punkte a, b . . . hindurch gehen, also die aus den ersten Standpunkten gezogenen zum zweiten Mal durchschneiden, die Richtigkeit dieser Punkte darthun, oder zeigen, welche derselben einer Correction bedürfen.

Ebenso könnte durch p ein neues Alignement RS geführt, in demselben ein abermaliger Standpunkt Q gewählt und dessen Lage durch Zurückziehung der Vistrlinien aus m und n nach den in M und N zurückgelassenen Stäben bestimmt werden, wozu sogar die Nothwendigkeit eintritt, falls von einem der früheren Standpunkte aus dieser oder jener Polygoneckpunkt nicht zu sehen war.

§. 100.

Oefters kann die Maßstabslinie mit der Standlinie zusammenfallend gewählt, d. h. ein Stück derselben, vielleicht der Abstand der zwei ersten Standpunkte, nämlich der Lothpunkte M und N der auf der Planchette angenommenen Punkte m und n, gemessen werden. Dann bedarf es zur Darstellung der Einheit des verjüngten Maßstabes der aus der Elementargeometrie bekannten Eintheilung der Geraden mn in die jener Länge entsprechende Anzahl gleicher und ungleicher Theile, was auf dem Felde, besonders wenn schon irgend ein anderer Maßstab zur Hand ist, leicht ausgeführt werden kann. Hätte man z. B. nach diesem Maßstabe mn zu 72,54 befunden, so würde die Größe x einer Einheit auf mn, wenn MN 35,37 betrug, durch folgende Proportion erhalten:

$$72{,}54 : 35{,}37 = x : 1 \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{72{,}54}{35{,}37} = 2{,}05089.$$

Behufs der Anfertigung des für die vorliegende Messung geltenden Maßstabes hätte man auf eine Gerade nicht den Werth der Einheit desselben in Theilen des vorhandenen Maßstabes aufeinanderfolgend aufzutragen, sondern Gruppen von 10 oder 100, welche in diesem Falle bezüglich die Werthe 20,5089 und 205,089 haben würden, und darauf die Absonderung in Einheiten vorzunehmen, weil sonst durch zu oft wiederholtes Umsetzen des Zirkels bedeutende Fehler entstehen könnten. Einfacher und selbst zuverlässiger, dem vorigen Verfahren zugleich als Controle dienend, ergäbe sich die Einheit für den Maßstab durch Bezeichnung einer runden Anzahl wirklicher, beim Messen von M aus zurückgelegter Einheiten durch einen Stab F, nach welchem hin vom Standpunkte p aus nur eine Visirlinie gezogen und deren Durchschnitt f mit xy bemerkt zu werden brauchte, um in mf jene Einheitenmenge verjüngt dargestellt zu haben. Ueberdies leuchtet von selbst ein, daß irgend eine andere Linie, etwa AD oder BC, zur Begründung des verjüngten Maßstabes gleich vortheilhaft geeignet erscheinen und daher gemessen, sonst aber genau so wie mit MN verfahren werden könne.

§. 101.

Wäre auf dem Felde eine Gerade gegeben, — vielleicht, wie bei Landesvermessungen, durch vollkommenere Instrumente vorher trigonometrisch bestimmt worden, — dann kann diese Linie auf mancherlei Art als Basis oder Standlinie für die zu vollziehende Meßtischaufnahme

benutzt werden, sobald ihr nur sonst die hierzu erforderlichen Eigenschaften nicht abgehen, d. h. wenn sie namentlich genügend lang ist in Betracht der gesammten Ausdehnung der Gegend, innerhalb welcher die darzustellenden Punkte vorkommen, und wenn ferner deren Endpunkte fast überall wahrnehmbar sind, was eine entweder von Natur schon vorhandene oder künstlich angebrachte Bezeichnung derselben voraussetzt. Je nach Umständen wird dann die Aufstellung des Meßtisches über beiden Endpunkten der gegebenen Standlinie denkbar sein, nur über einem derselben, über keinem von beiden, jedoch noch in deren Richtung, oder endlich zur Seite derselben. Da die ersteren beiden Fälle vermöge des Vorangegangenen als erledigt angesehen werden können, so würden nur noch die letzteren erübrigen.

Es sei zu dem Ende MN Fig. 104 die auf dem Felde gegebene Gerade oder Standlinie, mn ihre entweder angenommene oder nach irgend einem Maßstabe dargestellte Verjüngung und solche bereits zwischen M und N, etwa über P in MN, eingerichtet. Dann taxire man nach dem Augenmaße das Verhältniß von MP : PN und nehme diesem gemäß mp : pn, visire aus p nach A, B . . . ., ziehe pa′, pb′. . . ., lege hierauf durch p ein passendes Alignement ST, wähle — nachdem zuvor der Lothpunkt p, nämlich P durch einen Stab bezeichnet worden ist — in demselben eine zweite Aufstellung und richte st gehörig in ST ein, wodurch zunächst an dieser Stelle die verjüngte Standlinie mn parallel zu MN wird. Werden nunmehr durch m und n Visirlinien nach M und N bis zu ihrem Durchschnitt q verlängert, so zeigt dieser den zweiten Standpunkt auf der Planchette an. Die ferneren Operationen sind wie vorher auszuführen, damit aber die erste Aufstellung zugleich für die Darstellung der Punkte A, B . . . . keine vergebliche gewesen sei, so zog man eben von da aus Visirlinien nach den Punkten hin, welche jetzt nur noch einer Correction bedürfen, indem ja das Verhältniß mp : pn = MP : PN nur geschätzt wurde. Von q aus erfolgt diese Eintheilung der verjüngten Standlinie mn sofort mittelst einer Visirlinie nach dem in P zurückgelassenen Stabe, welche mn in p_1 d. h. in jenem Punkte schneidet, von welchem aus bei der ersten Aufstellung jene Visirlinien nach A, B . . . zu ziehen gewesen wären. Führt man daher durch p_1 Parallelen zu denselben, so können diese schon zur Darstellung von A, B . . . dienen, insofern sie blos der Durchschneidung neuer aus q zu vollführender Visirlinien bedürfen, um a, b . . . auf der Planchette zu gewinnen. Durch q kann ein neues Alignement gelegt und in diesem verfahren werden, wie solches die Figur deutlich erkennen läßt.

Da das Ziehen paralleler Linien zu den Vistrlinien aus dem ersten Standpunkte nach erfolgter zweiter Aufstellung nur allzu leicht Störungen im Stande des Meßtisches herbeiführt, so wird es vielmals rathsamer erscheinen, dieselben entweder gänzlich hinwegzulassen, oder doch nur auf eine geringe Anzahl zu beschränken, und sonach den Anfang der Messung ausschließlich auf die einfache Forderung der parallelen Aufstellung der verjüngten Standlinie mn zur wirklichen MN zu beschränken.

§. 102.

Könnte endlich der Meßtisch nur seitlich der Standlinie MN Fig. 105 aufgestellt werden, etwa über P, und bedeutet wie vorhin mn deren Verjüngung, alsdann ist zunächst diese ungefähr in eine parallele Lage zu jener zu bringen, entweder nach dem Augenmaße oder besser unter Anwendung der Orientirungsboussole, was freilich voraussetzt, daß durch irgend einen günstigen Umstand der Winkel von MN mit der Magnetnadel bekannt sei. Von diesem, allerdings zu schärferen Resultaten der sogleich zu besprechenden Operationen führenden Falle möge jedoch seines selteneren Eintretens wegen abgesehen und nur der erstere beachtet werden. Nachdem die Aufstellung des Meßtisches im angeführten Sinne vollendet ist, werden entweder aus den Endpunkten der verjüngten Standlinie oder ohne alle Rücksicht auf dieselbe Vistrlinien nach M und N bis zu ihrem Durchschnitte p gezogen. Gingen diese Linien durch m und n hindurch, und wäre überdies mn parallel zu MN, dann würde p die verhältnißmäßige Lage des lothrecht darunter gedachten Standpunktes P darstellen, während jetzt p nichts anderes als einen Eckpunkt des verjüngten Dreieckes MNP bezeichnet. Inzwischen ist durch diesen Schritt schon der Anfang gemacht worden zur Darstellung einer Parallele zu MN auf der Planchette, worauf in diesem Falle Alles ankommt, und es bedarf hierzu nur noch der Führung eines Alignements UZ durch p, der Wahl eines neuen Standpunktes q in demselben, so wie zuletzt des Ziehens zweier Vistrlinien, nämlich von q aus nach M und N. Die Durchschnittspunkte a, b derselben beziehentlich mit jenen aus p hervorgegangenen Vistrlinien sind in einer Parallele zu MN enthalten, deren graphische Darstellung nunmehr ungehindert erfolgen kann.

Der Parallelismus von ab und MN und mit diesem die Aehnlichkeit der Polygone QPNM und qpba — wobei Q als Lothpunkt für q vorausgesetzt wird — bedürfen kaum des Beweises.

Den geschehenen Operationen gemäß findet statt:

$$pb \fallingdotseq PN$$
$$pa \fallingdotseq PM, \text{ daher}$$
$$\triangle qpb \backsim \triangle QPN$$
$$\triangle qpa \backsim \triangle QPM, \text{ mithin}$$
$$NQ : bq = PQ : pq$$
$$MQ : aq = PQ : pq, \text{ auch}$$
$$NQ : bq = MQ : aq, \text{ woraus}$$
$$ab \fallingdotseq MN \text{ hervorgeht.}$$

Hieraus folgt mittelst einiger leicht einzuschaltender Zwischenschlüsse die Aehnlichkeit der Figuren qpba und QPNM, nicht minder daß dieselben gleich gelegen sind, so wie endlich, daß q zu a, b, p dieselbe Lage wie Q zu M, N, P einnimmt. Wäre daher ab die verjüngte Standlinie, dann würde q den dafür geltenden Standpunkt bezeichnen und die Bestimmung von Punkten auf dem Felde könnte fortan nach einem geringen Aufenthalte beginnen, sobald die Uebertragung von mn auf ab zulässig erscheinen sollte. Denn alsdann bedürfte es blos neuer Visirlinien aus den Endpunkten der nunmehr einen anderen Platz auf der Planchette einnehmenden verjüngten Standlinie nach den Endpunkten M und N der wirklichen, was einen neuen Standpunkt herbeiführen würde, welcher offenbar von dem vorigen q um so weniger verschieden sein würde, je sorgfältiger die vorläufige Orientirung von mn in Bezug auf MN erfolgte, und wenn außerdem die Visirlinien im ersten Standpunkte anstatt irgendwie vielmehr durch m, n nach M und N gezogen worden wären.

Dürfte jedoch eine derartige Uebertragung nicht geschehen, wäre vielmehr die Lage der verjüngten Standlinie mn auf der Planchette eine unabänderlich feste, dann hat man mn′ durch m parallel zu ab zu ziehen und in der Richtung dieser Parallele ein möglichst entferntes Object zu bemerken, das Diopterlineal an mn anzulegen und nun mittelst der Mikrometerschraube die Planchette so lange zu drehen, bis die Visirebene durch das Object V hindurch geht. Jetzt würde die verjüngte Standlinie mn parallel zur wirklichen sein, befände sie sich in einer Verticalebene der Meßtischare und gehörte der Punkt m zu ihr. Da jedoch dieser günstige Umstand nur selten eintritt, gewöhnlich mn mehr oder weniger entfernt von dieser Axe gelegen ist, so wird während der Planchettendrehung der Punkt m seinen Ort nicht beibehalten, sondern einen Bogen beschreiben, daher die Visirebene im Augenblicke des Zusammenfallens mit V keineswegs parallel zu der vorher durch mV gedachten Verticalebene sein, sondern mit dieser im Per-

pendikel durch V zum Durchschnitt kommen, der Winkel beider Ebenen aber um so kleiner sein, in je größerer Entfernung V gewählt wurde und je sorgfältiger die vorläufige Orientirung der verjüngten Standlinie geschah. Hieraus folgt, daß mn in seiner neuen Lage zwar mit der zu MN parallelen Linie mv convergirt, allein so außerordentlich gering, daß so kurze Stücke der Convergirenden, wie mn und mn' sind, ohne merklichen Fehler für parallel erachtet werden können. Die Angabe des neuen Standpunktes q' geschieht nun wie vorhin durch Zurückziehung der zwei Visirlinien aus den Endpunkten der verjüngten Standlinie nach den entsprechenden Endpunkten der wirklichen; eben so sind von jetzt an die zur Bestimmung der Lage mehrerer Punkte in der Gegend dienlichen Operationen von den oben betrachteten nicht verschieden.

Sollte die erste Aufstellung des Meßtisches Behufs der Darstellung von Punkten in der Gegend nicht unbenutzt bleiben, wäre z. B. die Visirlinie pc nach C gezogen worden, dann würde eine Visirlinie nach demselben Punkte aus q im Durchschnitt c mit jener die verhältnißmäßige Lage dieses Punktes zu den beiden Standpunkten und den Standlinienendpunkten anzeigen, unter der Voraussetzung jedoch, daß ab die verjüngte Standlinie bedeutet. Dürfte mn auf ab übertragen werden, dann käme es blos auf die Construction eines dem Polygone abpcq ähnlichen Polygones an, um c für die neue Standlinie zu berichtigen. Die Correction des Punktes c bei unveränderlicher Lage der verjüngten Standlinie mn zu den Grenzen der Planchette ist, wie die parallele Stellung von mn zu MN, nur annähernd möglich. Sie erheischt mehrmaliges Drehen der Planchette aus der parallelen Lage von mn zu MN in die ursprüngliche convergirende und umgekehrt, was leicht Störungen im Stande des Meßtisches veranlaßt, daher der durch Nichtbeachtung fester Punkte bei der ersten Aufstellung entstehende Zeitverlust nur als ein scheinbarer anzusehen ist. Uebrigens wird die Correction für c um so erträglicher ausfallen, je weniger die Planchette gedreht zu werden brauchte, um die mit MN convergirende mn in eine parallele Lage zu versetzen, d. h. je mehr die vorläufige Orientirung der verjüngten Standlinie gelang.

Für den Standpunkt q, d. h. bevor mn in die zu MN parallele Lage mn' gebracht worden ist, gebe man in der Richtung von mn ein möglichst entferntes Object W an, so auch S in der Richtung von pb, desgleichen T in der von pc. Wird nun mn in die parallele Lage mn' geführt, dann werden sich pb und pc um so weniger aus ihren früheren, bezüglich zu PN und PC parallelen Lagen entfernen, mit je

geringerer Planchettendrehung dies geschah, daher neue Visirlinien aus b und c nach jenen Objecten S und T auch um so mehr als parallel zu den vorigen anzusehen sind. Aus q', dem corrigirten zweiten Standpunkte, ist jetzt eine Visirlinie nach C, so wie nach einem im ersten Standpunkte P zurückgelassenen Stabe zu ziehen und in dieser die Correction für p dadurch zu bewerkstelligen, daß man den Meßtisch in die zu MN convergirende Lage zurückbringt, aus n eine Visirlinie nach S zieht und diese rückwärts bis zum Durchschnitt p' mit q'P verlängert. Daß der Punkt p' nur als eine annähernde Correction für p zu erachten ist, leuchtet für sich ein, eben so die Correction für c, nämlich c', wenn jetzt aus p' eine Visirlinie nach T gezogen würde.*)

§. 103.

Zur leichteren Auffassung der im Vorangehenden beschriebenen Meßtischoperationen wurden die darzustellenden Punkte als Polygonecken gedacht. Sieht man jedoch von dieser Bedeutung ab, setzt diese Punkte vielmehr als über eine Gegend mehr oder weniger gleichmäßig verbreitet voraus und unter einander dergestalt durch gerade Linien verbunden, daß eine ununterbrochene Folge von Dreiecken entsteht, dann heißt diese ein *Netz*, so wie dessen Darstellung auf der Planchette ein *geometrisches Netz*, zum Unterschiede vom *trigonometrischen*, dem gewöhnlich eine weit beträchtlichere, z. B. über ein ganzes Land sich ausbreitende, für die gemeinen Meßtischoperationen nicht mehr geeignete Umfänglichkeit zukommt.

Die Darstellung des geometrischen Netzes bildet die Grundlage der zu vollziehenden Aufnahme einer Gegend, welche um so leichter von statten gehen wird, mit je mehr Sorgfalt jene ausgeführt wurde, d. h. je passender man die Netzpunkte auswählte, und mit je strengerer Consequenz man darauf sah, keinen auf der Planchette dargestellten Netzpunkt in der That für einen solchen zu halten, bevor derselbe nicht Proben seiner Richtigkeit bestanden hatte, nämlich sich als den gemeinschaftlichen Durchschnitt beliebig vieler aus nahen wie entfernten Standpunkten geführter Visirlinien bewährte. Entweder bietet eine Gegend natürliche Netzpunkte in Thurmspitzen, Schornsteinen, auffallenden geradstämmigen Bäumen und anderen Hervorragungen dar, oder es sind

*) Ausführlicher behandelt diese Orientirungsmethode der §. 16 des vielfältig verbreiteten Buches: Die vorzüglichsten Elementar-Aufgaben für den zweckmäßigen Gebrauch des Meßtisches von G. A. Fischer, Professor der Mathematik. Leipzig 1824, bei Leopold Voß.

dieselben durch künstliche zu ersetzen, in welchem Falle man gewöhnlich thunlichst lange, an ihren oberen Enden mit Strohwischen versehene Stangen anwendet, dieselben tief genug in den Erdboden einläßt und zur Erhaltung eines lothrechten Standes mittelst Streben stützt, bei Aufnahme von Waldungen aber dergestalt an hohe Bäume befestigt, daß sie in möglichst weitem Umkreise wahrgenommen werden können. Zur Abwendung möglicher Verirrungen werden die jenen Netzpunkten entsprechenden Punkte auf der Planchette durch Ziffern bezeichnet und deren Bedeutung in einem Notizenbuche eingetragen, zugleich auch mit angemerkt, welche von diesen Punkten als besonders richtig dargethan wurden, so wie über welche einiger Zweifel obwaltet.

Hiermit ist der erste und wichtigste Abschnitt der Aufnahme einer Gegend seinem Ende schon sehr nahe gebracht. Ihm folgt der zweite, bestehend in der Ausführung des Details d. h. der Aufzeichnung derjenigen Gegenstände, welche für den Aufnahmezweck von Interesse sind, wohin die Angabe von Bergformen, Begrenzungen von Feldern und Fluren, Uferkrümmungen, einzelne Gebäude und Gebäudegruppen, der Lauf von Straßen u. s. w. gehören. Vor dem Beginne desselben sind aber alle überflüssigen Linien von der Planchette zu beseitigen, jedoch dabei die wichtigen Alignements entsprechenden entweder in ihrer ganzen Ausdehnung oder nur an ihren Enden zu erhalten. Inzwischen dürfen die Vorarbeiten der Aufnahme nicht unvollendet bleiben, und man zählt namentlich noch dazu die Angabe der Mittagslinie, nicht minder diejenigen Operationen, welche den Anschluß neuer Planchetten an die erste betreffen, falls diese allein den Plan der Gegend nicht zu fassen vermag.

§. 104.

Die Bedeutung der Mittagslinie dürfen wir aus der Physik als bekannt voraussetzen, und erinnern daher nur, daß eine durch die Erdaxe gedachte Ebene *Meridian*- oder *Mittagsebene* heißt, weil — nach dem gemeinen Sprachgebrauche — die Sonne zur Zeit des Mittags in ihr sich befindet, daß ferner der Durchschnitt dieser Ebene mit der Erdoberfläche *Meridian* und eine an demselben, jedoch in der Meridianebene liegende Tangente die *Mittagslinie* des Berührungspunktes genannt wird.

Für Gegenden von der hier gedachten geringen, höchstens eine Quadratmeile betragenden Ausbreitung ist es einerlei, auf welche Punkte derselben die Mittagslinie bezogen wird, indem dann selbst die Mittagslinien derjenigen Punkte, welche hinsichtlich ihrer geographischen

Länge als am weitesten entfernt erscheinen, bei uns d. h. in einer nördlichen Breite von 50° 50′ 30″*) füglich Parallelen gleich erachtet werden könnten.

Eine blos annähernde Bestimmung der Mittagslinie kann schon mittelst der Orientirungsbouſſole, besser jedoch unter Gebrauch der Bouſſole eines wirklichen Bouſſolenapparates erfolgen, indem diese bei festem Stande des Meßtisches auf die Planchette aufgesetzt und so lange drehend bewegt wird, bis die Magnetnadel am Horizontalkreis die magnetische Abweichung zeigt, worauf es nur des Ziehens einer Linie längs derjenigen Kante der Bouſſolenplatte bedarf, welche zur Nordlinie parallel ist. Genauer erfolgt die Darstellung der Mittagslinie vermittelst der Sonnenstrahlen. Hierzu kann ein feiner Stift z. B. eine gerade gerichtete Stricknadel ab Fig. 106 dienen, welche in jenem Punkte der Planchette vertical errichtet wird, für welchen die Mittagslinie gezogen werden soll, und deren zum Eindringen in die Papierfläche bestimmtes Ende zur Vermeidung einer unangemessenen Durchbohrung vorher gehörig zuzuschärfen ist. Das Verticalstellen der Nadel erfolgt mittelst eines Winkelhakens durch Anlegung einer seiner beiden Schenkel an die Nadel nach drei möglichst verschiedenen Richtungen unter Anschließung des anderen Schenkels an die Planchettenfläche. Vor der Aufstellung der Nadel sind um deren Fußpunkt b herum mehrere concentrische Kreise aufzuzeichnen mit Halbmessern, von denen der kleinste die Nadellänge übertrifft, da in unseren Gegenden selbst beim höchsten Stande der Sonne die Sonnenstrahlen noch nicht unter einem halben rechten Winkel gegen eine Horizontalebene einfallen. Alsdann werden zwei bis drei Stunden vor und nach der Tagesmitte diejenigen Stellen der concentrischen Kreise beobachtet und angemerkt, woselbst sie der Schatten des oberen Nadelendes erreicht. Gesetzt um 9 Uhr habe der Schatten dem äußersten Kreise im Punkte c begegnet, um 10 Uhr dem zweiten in d, um 11 dem dritten in e, während des Nachmittags die nämlichen Kreise bezüglich in f, g und h vom Schatten getroffen werden mögen, dann bedarf es nur der Halbirung der Bogen dieser Kreise und der Verbindung ihrer Mitten k, m und o mit dem Centrum b aller Kreise durch eine Gerade NS, um in dieser die gesuchte Mittagslinie dargestellt zu haben. Offenbar würde hierzu schon ein einziger Kreis genügen, der Prüfung wegen wählt man jedoch mehrere, da dann sämmtliche Bogenmitten mit dem gegebenen Punkte

*) Diese Angabe entspricht der nördlichen Breite des Hauptstadtthurmes in Chemnitz.

b in der nämlichen Geraden enthalten sein müssen. Streng genommen würde dieses Verfahren nur unter der Voraussetzung völliger Ruhe der Sonne gelten, inzwischen ist der aus der Sonnenbewegung hervorgehende Fehler der Mittagslinie so äußerst gering, daß derselbe für die gewöhnlichen Meßtischoperationen ganz vernachlässigt werden kann, vorzüglich dann, wenn die Bestimmung um die Zeit des längsten Tages d. h. während der größten Entfernung der Erde von der Sonne geschieht. Wesentlich ändert dieses Verfahren sich nicht, sobald anstatt des bloßen Stiftes eine andere Hervorragung, ein Kegel oder ein Stift angewendet wird, welcher in einem Grundgestell befestigt und an seinem oberen Ende mit einem schief angesetzten Blättchen versehen ist, das eine feine Oeffnung zum Durchlassen des Sonnenlichtes enthält, für welche mittelst eines Lothes der Fußpunkt ihres Perpendikels auf der Planchettenfläche, nämlich der Punkt b leicht anzugeben sein würde*).

Steht eine Kippregel zur Verfügung, dann kann die Mittagslinie auf der Planchette durch Beobachtung correspondirender Stern- oder Sonnenhöhen zuverlässig dargestellt werden, indem das — natürlich mit einem Fadenkreuze versehene — Fernrohr desselben nur vor der Culmination d. h. vor dem Durchgange jener Himmelskörper durch die Meridianebene des Beobachtungsortes, auf einen derselben eingestellt und längs des Linealrandes eine Linie gezogen zu werden braucht, von welcher wir voraussetzen, daß sie durch den auf der Planchette gegebenen Punkt b hindurch geht. Wäre die Culminationszeit des gewählten Himmelskörpers bekannt, dann würde hieraus diejenige Zeit folgen, nach Verlauf welcher demselben die nämliche Höhe zukäme, die derselbe im Augenblicke der ersten Beobachtung gehabt hat. Vor dem Eintritte derselben hätte man in diesem Falle dem Fernrohr genau die vorige Lage zum Horizont zu ertheilen und nun, während der Rand des Lineals an den Punkt b anschließt, mit dem Fernrohr der Bewegung des Sternes oder der Sonne so lange zu folgen, bis dieselben im Gesichtsfelde des Fernrohrs vollständig so erschienen, wie bei der ersten Beobachtung, nachher aber unverweilt längs des Linealrandes wiederum eine Gerade aufzuzeichnen. Jetzt bedürfte es nur der Halbirung des Winkels beider Geraden, um auch sofort die fragliche Mittagslinie dargestellt zu haben. Entgegengesetzten Falles, d. h. wenn die Culminationszeit des Himmelskörpers nicht bekannt wäre, würde dem Fernrohre die im Augenblicke der ersten Beobachtung ge-

*) Mittelst dieser Apparate läßt sich auch durch eine einzige Beobachtung die Mittagslinie finden, unter Gebrauch jedoch von, die Abweichung der Sonne enthaltenden Tafeln.

habte Lage unverändert zu erhalten, sonst aber auf die nämliche Art zu verfahren sein.

Unter den Sternen dienen zu diesem Behufe gewöhnlich der Polarstern oder ein anderer nicht allzu weit von diesem entfernter, auch wohl der letzte Stern im Schwanze des großen Bärs, bei deren Benutzung jedoch die Möglichkeit vorausgesetzt wird, des Nachts den Meßtisch in der aufzunehmenden Gegend orientiren zu können, etwa unter Gebrauch einiger besonders hellen Leuchtfeuer. Hinsichtlich endlich der für den Zweck der Darstellung einer Mittagslinie zu beobachtenden correspondirenden Sonnenhöhen ist zu bemerken, daß — unter Gebrauch eines die Intensität der Sonnenstrahlen schwächenden farbigen Glases — für beide Beobachtungen entweder der höchste Punkt des oberen oder der tiefste Punkt des unteren Sonnenrandes zu wählen ist.

§. 105.

Wir kommen nun zur letzten der Detaillirung eines Planes vorangehenden Operationen, welche, wie bereits angeführt wurde, den Anschluß neuer Menselblätter an das erste betreffen und wofür in der Praxis die Benennung Anbinden üblich ist. Der Einfachheit wegen möge es nur auf die Anbindung eines einzigen über einer zweiten Planchette ausgespannten Menselblattes b Fig. 107 an das erste a ankommen, in der Art, wie beide Menselblätter neben einander abgebildet erscheinen, demnach nicht nach der Richtung ihrer Diagonalen oder sonst einer schrägen Richtung, sondern nach derjenigen ihrer Seiten. Dann ist nach der Anbindungsseite hin ein Streifen von 1 bis 2 Zoll Breite als nicht zum ersten Menselblatte gehörig anzusehen und durch eine Gerade pq abzusondern, welche die Bindelinie heißt. Im Verlaufe der Darstellung des geometrischen Netzes hat man nun darauf zu sehen, daß einige Netzpunkte wie z. B. m und n — Bindepunkte genannt — über die Bindelinie hinausfallen, zugleich auch für ein oder zwei Alignements xy und vz, welche im Bereiche des zweiten Menselblattes sich durchschneiden, so wie es überdies zur Richtigkeit der zu vollziehenden Anbindung wesentlich beitragen würde, die Gerade durch m und n als zu einem Alignement für möglichst weit entfernte Richtobjecte E und G aufzufassen. Auf dem zweiten Menselblatte b wird jetzt eine Gerade p′q′ gezogen, — die Bindelinie desselben — nahe an der Grenze desselben, sobald zu erwarten steht, daß das fortzusetzende Netz über einen beträchtlichen Theil des zweiten Blattes sich ausbreiten werde. Nun folgt die Uebertragung der Netzpunkte, was am zuverlässigsten mittelst der Perpendikel mr und nt auf die Bindelinie pq gelingt, indem es dann blos darauf ankommt, auf p′q′

r′t′ = rt zu nehmen, in r′, t′ Perpendikel zu errichten und diese bezüglich den Perpendikeln rm, tm gleich zu machen. Wenn schon diese beiden Punkte für sich allein zur Fortsetzung der Aufnahme hinreichen, besonders sobald sie in möglichst großer Entfernung von einander gewählt wurden, so gelingt das Anbindungsgeschäft doch bei weitem sicherer, falls auf dem ersten Menselblatte ein Alignement, etwa xy dergestalt angenommen worden ist, daß solches durch das zweite sich hindurchzieht. Denn alsdann kommt es nur darauf an, den mit der zweiten Planchette versehenen Meßtisch in dieses Alignement einzurichten, aus m′ und n′ nach den entsprechenden Netzpunkten Visirlinien zu ziehen und diese bis zu ihrem Durchschnittspunkt zu verlängern, welcher Punkt bei richtigem Verfahren ein Punkt des Alignements x′y′ sein muß. Was die Verpflanzung des Alignements xy auf das zweite Menselblatt betrifft, so reichen hierzu die ersten Sätze der Elementargeometrie schon hin, insofern der nun als Scheitel des Winkels pgx geltende Punkt g nach g′ versetzt und daselbst ∠ qg′y′ = ∠ pqx gemacht wird. Hiernach wäre schon Gelegenheit geboten, den Meßtisch in der Richtung zweier Alignements d. h. in ihrem Durchschnitte k′ aufzustellen, worauf es zur Fortsetzung des Netzentwurfes kaum fernerer Vorbereitungen bedürfte. Die Sicherheit der Anbindung wird jedoch noch mehr gesteigert unter Benutzung eines neuen, wie das vorige zu übertragenden Alignements vz, besonders wenn der Durchschnittspunkt s beider d. i. von x′y′ und v′z′ möglichst in das Innere des zweiten Blattes hineinfällt.

Für sich leuchtet ein, daß auf dieselbe Art die Anbindung anderer Menselblätter geschieht, zugleich aber auch, wie bei der Uebertragung der Netzpunkte und Alignements mit aller nur denkbaren Genauigkeit verfahren werden müsse, da selbst kaum beachtenswerthe Fehler als Quellen bedeutender Verirrungen im weiteren Verlaufe der Messung sich darstellen, so wie es endlich der Erinnerung kaum bedarf, daß, durch je mehr Menselblätter hindurch ein und dasselbe Alignement geführt wird, desto zuverlässiger die Anbindung dieser Blätter erfolgen könne.

§. 106.

Das Detailliren einer Gegend erheischt fortwährend die Nothwendigkeit, den Meßtisch an beliebigen Punkten derselben zu orientiren, da von diesen aus zur Erlangung des Details entweder mittelst directer Messung oder Durchschneidung von Visirlinien — schlechtweg durch Schnitte — weiter verfahren wird. Die Orientirung geht um so leichter von statten, je mehr Netzpunkte überhaupt dargestellt wurden und je günstiger dieselben für jeden einzelnen Fall gelegen erscheinen,

daher bei der Wahl derselben dieser ihr eigentlicher Zweck stets zu berücksichtigen ist. Immer aber beschränkt sich das Orientirungsgeschäft auf Erfüllung der beiden Forderungen: zu zwei oder drei gegebenen Punkten die verhältnißmäßige Lage bezüglich eines dritten oder vierten Punktes darzustellen, deren erste bereits im Vorangegangenen erledigt worden ist, daher wir sogleich zur zweiten, welche das Rückwärtseinschneiden genannt wird, übergehen können. Man kennt sie unter der Benennung des Problems der drei Punkte, auch des Pothenot'schen Problems, nach dem französischen Geometer Pothenot, welcher im Jahre 1692 zuerst die Behandlung derselben zeigte, woran später und bis auf die neueste Zeit bedeutende Männer des Faches, mehr oder weniger verschiedenen Wegen folgend, gearbeitet haben.

Den Sinn erschöpfender, wenn auch umständlicher, lautet diese Forderung folgendermaßen: es sind drei Netzpunkte in der Gegend nebst ihren Darstellungen auf der Planchette gegeben, damit auf dieser ein vierter, den Standort des Meßtisches bezeichnender gefunden werde, welcher zu den drei Planchettenpunkten eben so gelegen ist, wie der Lothpunkt des fraglichen Punktes zu jenen drei Netzpunkten der Gegend. Werden diese drei gegebenen Punkte als durch gerade Linien verbunden vorausgesetzt, dann lassen sich in Bezug auf die Lage des gesuchten vierten Punktes zu dem dadurch entstandenen Dreiecke mehrere Fälle unterscheiden, indem solcher entweder inner- oder außerhalb der Richtungen einer der Dreiecksseiten enthalten sein kann. Ersteren Falls kann man ihn sich in einer dieser Seiten oder deren Verlängerung liegend denken, sogar im Durchschnitte zweier Seiten, d. h. in der Verticalen durch einen der Netzpunkte selbst, anderen Falls wird der gesuchte Punkt im Innern des Netzdreieckes oder außerhalb desselben vorkommen können, und alsdann in Bezug auf den umschriebenen Kreis dieses Dreieckes inner- oder außerhalb desselben, einer Seite oder Ecke gegenüber, ja mit der Peripherie dieses Kreises zusammenfallend.

ABC Fig. 108 bezeichne das Netzdreieck, abc dessen verjüngte Darstellung auf der Planchette, und eine Seite der letzteren, etwa ab, möge bereits im Alignement der homologen Seite AB enthalten, überdies abc mit ABC ähnlich gelegen sein. Wird jetzt aus b eine Visirlinie nach B gezogen, dann stellt offenbar deren Durchschnitt x mit ac einen zu abc eben so, wie dessen Lothpunkt zu ABC gelegenen, demnach den gesuchten vierten, den Standort des Meßtisches zugleich vergegenwärtigenden Punkt dar. Fig. 109 zeigt das Verfahren der Auffindung des Standpunktes x, falls der Meßtisch nicht in der Dreiecksseite selbst,

sondern in deren Verlängerung aufgestellt worden ist, so wie Fig. 110 das Zusammenfallen dieses Punktes mit einem der Netzpunkte darthut. Die Richtigkeit der Auffindung des Meßtischstandpunktes x erhellt für sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke abc und ABC, und wir bemerken hierüber nur noch, daß, sobald irgend thunlich, einer dieser drei Fälle, besonders aber der erste herbeizuführen sei, selbst auf die Gefahr eines Zeitverlustes hin, welcher durch das Einrichten einer Seite des verjüngten Dreieckes in das Alignement der betreffenden Seite des Netzdreieckes allerdings entstehen könnte. Dieser Verlust ist jedoch blos ein scheinbarer und wird durch größere Genauigkeit der Vermessungsresultate, welche aus einem auf solche Art gefundenen Standpunkte hervorgehen, mehr als hinreichend aufgewogen. Nur erst, wenn die Beschaffenheit des Terrains oder andere Umstände eine oder die andere dieser Orientirungsmethoden hindern sollten, mache man Gebrauch von den übrigen sogleich zu besprechenden.

§. 107.

Nach dem Begriffe der Figurenähnlichkeit sind Dreiecke wie hier ABC und abc Fig. 111 ähnlich, wenn sie dergestalt zwischen den Convergenten Mx, Nx und Px eines Punktes x liegen, daß solche durch die Dreieckseckpunkte proportionirt getheilt werden, d. h.

$$Ax : ax = Bx : bx = Cx : cx$$

stattfindet. Da dies aber den Parallelismus der homologen Seiten beider Dreiecke bedingt, so kann man umgekehrt sagen: sind die homologen Seiten zweier Dreiecke parallel, dann schneiden sich die ihre homologen Eckpunkte verbindenden Geraden in einem einzigen Punkte. Derselbe hat zu den Eckpunkten des einen Dreieckes die nämliche Lage wie zu denen des andern, und ist folglich der gesuchte vierte Punkt, der Standpunkt des Meßtisches, falls abc das auf der Planchette desselben verzeichnete, dem Netzdreiecke ABC ähnliche und mit diesem in eine parallele Lage gebrachte Dreieck vorstellt. Wofern jedoch beide Dreiecke eine andere Lage haben, dann werden im Allgemeinen die ihre homologen Ecken verbindenden Geraden sich nicht in einem einzigen Punkte schneiden, sondern Stücke derselben ein Dreieck mnp Fig. 112 bilden, daher umgekehrt aus der Entstehung eines solchen Dreieckes auf den Nichtparallelismus der homologen Dreiecksseiten zu schließen ist. Es zeigt dieses Dreieck die fehlerhafte Stellung des einen Dreiecks zum andern an, eine um so größere, je größer solches selbst ausfällt und umgekehrt, und wird aus diesem Grunde das fehlerzeigende

Dreieck genannt. Weiter unten werden wir sehen, wie aus der Lage desselben zum Dreiecke abc zur Bestimmung des fraglichen vierten Punktes x zu gelangen sei, zuvor aber zeigen, auf welche Art ohne fehlerzeigendes Dreieck dieser Punkt bestimmt werden könne.

1. Methode. Eine der ältesten Orientirungsmethoden besteht darin, das auf der Planchette dargestellte Dreieck abc Fig. 113 ungefähr in eine parallele Lage zum wirklichen Netzdreiecke ABC zu versetzen, einstweilen einen Punkt q als den gesuchten vierten Punkt anzunehmen, von diesem aus Vistrlinien nach den Netzpunkten A, B, C zu ziehen, und an ab einen Winkel bak = AqB, so wie an bc einen Winkel cbh = BqC aufzutragen. Alsdann soll man an perpendikulär zu ak machen, eben so mn zu ab, im Halbirungspunkte m dieser Dreiecksseite und aus dem Durchschnittspunkte n beider Perpendikel einen durch a und b hindurch gehenden Kreis führen, desgleichen bo und po bezüglich perpendikulär zu bh und bc darstellen, letztere durch den Halbirungspunkt p von bc gehend, zuletzt auch aus o einen Kreis zeichnen, in dessen Peripherie die Punkte b, c hineinfallen. Der Durchschnitt g beider Kreise sei dann ein Orientirungspunkt d. h. an diesen und an b das Diopterlineal anzulegen, dessen Vistrebene mittelst der Mikrometerschraube auf den Netzpunkt B einzustellen und die betreffende Vistrlinie zu ziehen. Es würde nun diese von, aus a und b nach A und B gezogenen Vistrlinien in einem einzigen Punkte, d. i. dem gesuchten vierten durchschnitten werden.

Eine nähere Betrachtung dieses Verfahrens zeigt, daß hierdurch der fragliche Punkt um so genauer bestimmt wird, je annähernder sein Stellvertreter q gewählt, und je weiter die Netzpunkte A, B, C entfernt sind, da dann die Winkeldifferenz der von diesem Punkte und dem gesuchten richtigen nach A, B, C gehenden Vistrlinien so außerordentlich gering ausfällt, daß er im Bereiche der Planchette nicht mehr nachzuweisen ist. Denn vermöge dieser Construction hat man, sobald ag und cg gezogen werden, nach Gründen der Elementargeometrie:

$$\angle agb = \angle kab = \angle AqB,$$

$$\text{desgleichen } \angle bgc = \angle hbc = \angle BqC.$$

Ungeachtet es der vollen Ausführung beider Kreise auf der Planchette nicht bedarf, vielmehr schon ihr bloßer Durchschnittspunkt g zur Orientirung hinreicht, so wird von dieser Methode ihrer mancherlei praktischen Unzuträglichkeiten wegen, indem die Kreise sehr große Halbmesser erhalten, oder deren Mittelpunkte über die Planchette hinaus fallen können u. dgl. m., wenig oder gar kein Gebrauch gemacht.

Verschiedene Mittel zur Umgehung dieser Construction sind zwar in Vorschlag gekommen, auch zuweilen in neuerer Zeit, jedoch immer seltener, angewendet worden, und wenn wir dennoch einiger derselben gedenken, so geschieht dies nur Behufs gehöriger Würdigung besserer Orientirungsmethoden. Unter Anderm soll man sich eines dreifüßigen Zirkels bedienen, damit das Dreieck abc erfassen und nun die Zirkelspitzen dergestalt auf die Visirlinien qA, qB, qC zu setzen suchen, bis diese ihre entsprechenden Dreieckseckpunkte in sich enthalten, hierauf aber durch Copirung einen Punkt finden, welcher zu den Eckpunkten des Dreieckes in seiner neuen Lage genau so gelegen ist, als es q zu diesem Dreiecke in seiner ursprünglichen Lage, nämlich zu abc war; endlich soll man das Diopterlineal an den gefundenen Punkt und den mittleren Eckpunkt b des Dreieckes abc anlegen, auf B einstellen und eine Visirlinie ziehen, worin die von a, b nach A, B geführten Visirlinien sich in einem einzigen Punkte d. i. dem gesuchten durchschneiden würden.

Durchscheinendes, sogenanntes Wachspapier ist zu gleichem Zwecke angewendet und hierzu vorgeschrieben worden, ein Stück solchen Papieres über der betreffenden Stelle der bereits annähernd orientirten Planchette gehörig auszubreiten, auf dasselbe die Visirlinien qA, qB, qC zu ziehen, alsdann das Papier auf der Planchette so lange hin und her zu verrücken, bis diese Visirlinien mit ihren entsprechenden Eckpunkten a, b, c des gegebenen Dreieckes abc zusammenfallen, in diesem Augenblicke aber soll das Papier mittelst einer Nadel im Punkte q durchstochen und so dessen Uebertragung auf das Papier der Planchette bewerkstelligt werden. Endlich ist das Diopterlineal an diesen Punkt und an den Dreiecksteckpunkt b anzulegen, wie vorhin die Visirebene unter Benutzung der Mikrometerschraube auf B einzustellen, und hierdurch die Orientirung des Meßtisches zu vollenden. Die Angabe des Meßtischstandpunktes d. h. des gesuchten vierten Punktes erfolgt wie vorher.

Das Gelingen dieser hier beschriebenen Orientirungsmethode wird hauptsächlich durch eine möglichst annähernde, vorläufige Orientirung nach dem Augenmaße bedingt; ein Gleiches findet bei allen übrigen Methoden statt, daher bei diesem Geschäft die Orientirungsboussole mit besonderem Vortheil anzuwenden ist, während sie sonst bei den meisten Meßtischoperationen entbehrt werden kann.

§. 108.

2. Methode. Wiederum sei abc Fig. 114 das auf der Planchette dargestellte, dem Netzdreiecke ABC ähnliche, vorerst innerhalb des-

selben und bereits hierzu parallel gelegene Dreieck, und q der zu beiden Dreiecken einerlei Lage habende, den Standpunkt des Meßtisches bezeichnende Punkt; auch mögen von ihm aus durch a, b, c Vistirlinien nach A, B, C gezogen worden sein. Dann führe man durch je zwei der Eckpunkte des verjüngten Dreieckes, etwa durch a, c und den vierten Punkt q, einen Kreis, verlängere die Vistirlinie nach B bis zum Durchschnitt g mit demselben und ziehe von ihm aus die Geraden gm, gn bezüglich durch die Eckpunkte a und c.

Hiernach ist $\angle$ mac $=$ $\angle$ bqc, und $\angle$ nca $=$ $\angle$ aqb, denn

$$\angle \text{ gac} = \angle \text{ gqc},$$

$$\angle \text{ acg} = \angle \text{ aqg}$$

wegen der Gleichheit der zu einerlei Bogen im nämlichen Kreise gehörigen Peripheriewinkel, und da zu den einander gleichen Winkeln auch gleiche Nebenwinkel gehören, so folgt hieraus die Richtigkeit obiger Behauptung.

Wäre anstatt des richtigen Standpunktes q ein anderer, nach dem Augenmaße gewählter Punkt z. B. q′ dafür gehalten worden, dann würden die von ihm aus nach den Objecten A, B, C gezogenen Vistirlinien andere Winkel mit einander eingeschlossen haben, offenbar von den vorigen um so weniger verschiedene, ein je kleinerer Fehler dabei begangen d. h. je näher q′ dem richtigen Punkte q angenommen worden ist. Diese Winkeldifferenz kann bei nur einiger Uebung im Taxiren der Lage des Punktes q so gering werden, daß ihre Angabe bei der hier gebräuchlichen graphischen Darstellungsweise nicht mehr ausführbar sein würde. Darauf nun beruht folgendes praktisches Verfahren des Rückwärtseinschneidens.

Nachdem der Meßtisch vorläufig annähernd orientirt worden ist, wähle man den fraglichen Punkt q nach dem Augenmaße, ziehe von ihm aus gerade Linien nach a, b, c, trage an ac den Winkel mac $=$ bqc, so wie den Winkel nca $=$ aqb, verlängere deren Schenkel ma und nc bis zu ihrem Durchschnitt g, lege das Diopterlineal an g und b, ziehe die Gerade gb, führe die Vistrebene auf das Object B und ziehe endlich aus a und c Vistirlinien nach A und B und bis zu ihrem Durchschnitt q, der bei richtigem Verfahren mit bg zusammenfallen wird.

Schulz Montanus giebt ein Verfahren an, wie man ohne Uebertragung der Winkel bqc und bqa durch wechselseitiges Anlegen des Diopterlineals an ac und durch Drehung der Planchette in dieser Lage des Lineals, bis dessen Vistrebene auf C und A einsteht, mg und ng ziehen und so den Punkt g bestimmen könne. Inzwischen ist es

auch nur ein annäherndes, daher wir uns an diesem Orte mit dessen bloßer Andeutung begnügen wollen.

Käme der gesuchte Standpunkt q außerhalb des Dreieckes abc Fig. 115 vor, einer Seite desselben, etwa ac gegenüber, dann werde wieder angenommen, daß sich dieses Dreieck zu dem ihm ähnlichen Netzdreiecke ABC in paralleler Lage befinde, mithin q der Convergenzpunkt der, die homologen Eckpunkte beider Dreiecke verbindenden Visirlinien sei. Führt man jetzt durch a, c und q einen Kreis und zieht aus dessen Durchschnitt mit qb d. i. aus g gerade Linien nach a und c, dann folgt wegen der Gleichheit der auf einerlei Bogen im nämlichen Kreise stehenden Peripheriewinkel

$$\angle\, gac = \angle\, gqc$$
$$\angle\, gca = \angle\, aqg$$

und hieraus ein Verfahren zum Rückwärtseinscheiden für den vorliegenden Fall.

Nachdem wie früher der Meßtisch thunlichst annähernd orientirt worden ist, nehme man den fraglichen Punkt mittelst des Augenmaßes an, vielleicht in q′, ziehe von ihm aus durch a, b, c Visirlinien nach A, B, C, trage in a an ac den Winkel $gac = gq'c$, desgleichen in c den Winkel $acg = aq'g$, lege das Diopterlineal an den Durchschnitt g der Schenkel und an b, drehe die Planchette, bis die dioptrische Ebene durch B hindurch geht, dann werden die Dreiecke abc und ABC um so näher zu einander parallel sein, je näher q′ dem richtigen Punkte q angenommen wurde. Die Prüfung der Orientirung erfolgt wie vorher dadurch, daß man zusieht, ob die drei Visirlinien aus a, b, c bezüglich nach A, B, C sich in einem einzigen Punkte schneiden, welches der gesuchte vierte Punkt sein würde.

Fällt dieser Punkt zwar auch außerhalb des Dreieckes, jedoch einer Spitze etwa b Fig. 116 gegenüber, d. h. in den Winkelraum der Verlängerungen der Seiten ab und bc, so sei q schon der fragliche Punkt, das Dreieck abc mithin in paralleler Lage zu ABC. Sobald von q aus nach A, B, C Visirlinien durch a, b, c gezogen worden sind, lege man durch a, c, q einen Kreis, vereinige dessen Durchschnittspunkt g mit der Visirlinie Bq durch gerade Linien mit a, c, und hat nun als Peripheriewinkel auf einerlei Bogen:

$$\angle\, gac = \angle\, gqc,$$
$$\angle\, gca = \angle\, gqa.$$

Diesmal würde sonach die Orientirung des Meßtisches folgendermaßen geschehen. Nachdem neuerdings der Meßtisch annähernd

orientirt und für den fraglichen Punkt q ein diesem nahe liegender q' gewählt worden ist, so ziehe man aus diesem die drei Visirlinien, mache ∠ gac = ∠ gq'c, ∠ gca = ∠ gq'a, lege das Diopterlineal an den Schenkeldurchschnitt g und an b, ziehe gb, drehe die Planchette bis zum Zusammenfallen der Visirebene mit dem Objecte B, und sehe hierauf zu, ob, wenn aus a und b Visirlinien nach A und B geführt werden, diese die Verlängerung von gb in einem einzigen Punkte durchschneiden.

Im ersten und dritten dieser Fälle kann leicht der Durchschnittspunkt g der Schenkel ag und cg über das Menselblatt hinaus fallen, dadurch aber der zweite Punkt der Orientirungslinie bg verloren gehen. Dann würde es darauf ankommen, durch Construction die von b aus nach dem Convergenzpunkte führende Gerade zu ermitteln, was nach dem Zusatz des §. 13 oder auf andere Art, z. B. so zu bewerkstelligen wäre, daß man aus b Fig. 117 eine, beide Convergenten schneidende Gerade wp zöge, hierauf durch b und w Parallelen zu hn, nämlich br und wv, ferner br = bp, wv = wb machte, die Punkte v und r durch eine Gerade verbände, deren Durchschnitt t mit wp mit s vereinigte und zuletzt bg parallel zu ts führte. Dann würde bg, wie leicht erweislich, durch den Convergenzpunkt der beiden Geraden ak und ck hindurchgehen und somit der Forderung entsprochen werden.

§. 109.

3. Methode. Eine der interessantesten Orientirungsmethoden besteht nach Bessel in Folgendem. abc Fig. 118 zeige wie früher ein auf der Planchette dargestelltes, dem Netzdreiecke ABC ähnliches und bereits hierzu in paralleler Lage befindliches Dreieck, und weil wir doch einen Fall annehmen müssen, so sei abc im Innern von ABC gelegen. Ferner habe man aus a, b, c Visirlinien beziehungsweise nach A, B, C gezogen, und in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte q den fraglichen vierten Punkt d. i. den Meßtischstandpunkt erlangt. Sei nun der Winkel, unter welchem von q aus die Seite AB erschienen ist, nämlich ∠ aqb = m, so wie ∠ bqc = n, überdies in der Richtung von bc, be = ab genommen, durch e eine Parallele zu qc bis zur Verlängerung von bq d. i. bis d gezogen, und dadurch ein dem Dreiecke bqc ähnliches Dreieck bde zu Stande gekommen. Man habe dieses Dreieck dergestalt an ab angelegt, daß der Eckpunkt d nach f gefallen ist, darauf den Winkel bak = n, ∠ bck = m gemacht und hierdurch ein Viereck abck erhalten, von welchem behauptet wird, daß es dem Vierecke fbqa ähnlich sei.

Vor Allem sind die Winkel beider Vierecke einzeln genommen einander gleich und in gleicher Folgeordnung vorhanden, denn es ist:

$$\angle \text{fba} = \angle \text{dbe}$$

$$\angle \text{fba} + \angle \text{abq} = \angle \text{dbe} + \angle \text{abq}$$

$$\angle \text{fbq} = \angle \text{abc}$$

$$\angle \text{aqb} = \angle \text{bck} = \text{m}$$

$$\angle \text{afb} = \angle \text{bde} = \angle \text{bqc} = \text{n};$$

$$\text{ferner } \text{fb} : \text{bq} = \text{bd} : \text{bq} = \text{be} : \text{bc}$$

$$= \text{ab} : \text{bc},$$

was die Aehnlichkeit beider Vierecke begründet. Daraus folgt die Gleichheit der Winkel abq, cbk, und nun die Nutzanwendung für das Rückwärtseinschneiden.

Wenn zuvor wie immer der Meßtisch nach dem Augenmaße oder besser mittelst der Orientirungsboussole seine gehörige Aufstellung erhalten hat, und für den gesuchten Punkt q annähernd etwa in q′ ein Punkt gewählt worden ist, dann ziehe man von ihm aus durch a, b, c nach den entsprechenden Netzpunkten A, B und C hin Visirlinien, deren Neigungswinkel zu einander von den aus dem richtigen Punkte q gedachten um so weniger verschieden sein werden, je näher q′ an q liegt, und je weiter die wirklichen Netzpunkte entfernt sind, d. h. die Winkel, unter welchen AB und BC aus q′ betrachtet erscheinen, können von jenen, die sich auf die Betrachtung der nämlichen Linien aus dem richtigen Punkte q beziehen, um ein nicht Darstellbares abweichen. Trägt man daher an bc den Winkel, unter welchem AB aus q′ betrachtet erschienen ist, nämlich m, und an ab den auf BC aus q′ Bezug habenden Winkel n, so wird im Durchschnitt der außer bc und ab vorhandenen Schenkel beider Winkel ein Punkt k erhalten, welcher blos mit b durch eine Gerade verbunden zu werden braucht, um einen mit abq übereinstimmenden Winkel kbc dargestellt vorzufinden. Wird dieser Winkel kbc an ab aufgetragen, dann geht der nicht mit ab zusammenfallende Schenkel desselben durch den gesuchten Punkt q hindurch. Folglich bedarf es zur Orientirung des Meßtisches nur der Anlegung des Diopterlineals an diesen Schenkel und der Drehung der Planchette, bis die dioptrische Ebene durch den Netzpunkt B hindurchgeht. Wie gewöhnlich ist als Prüfung für die Richtigkeit des Verfahrens das Zusammenkommen aller drei Visirlinien in einem einzigen Punkte anzusehen.

Indem wir uns hier mit der Darstellung der Bessel'schen Orien-

tirungsmethode an einem einzigen Falle begnügen, bemerken wir, daß auf ähnliche Art zu verfahren ist, sobald der fragliche vierte Punkt q nicht wie vorhin innerhalb des gegebenen Dreieckes abc, sondern außerhalb desselben, sei es einer Seite oder Spitze gegenüber zu liegen kommt. Auch läßt diese Methode einige Vereinfachung zu, dadurch, daß man das Viereck abck in entgegengesetzter Folgeordnung seiner Umfangswinkel an die Dreiecksseiten ab und bc anschließt, wodurch sofort bk in die Richtung von bd zu liegen kommt und das Copiren des Winkels kbc entbehrlich gemacht wird.*)

§. 110.

Außer diesen Orientirungsmethoden giebt es noch andere, ebenfalls directe geometrische Constructionen erheischende, welche jedoch hier übergangen werden mögen, da solche auf dem Felde unter allen Umständen keineswegs gleich gut ausführbar sind, mindestens aber einen im Verhältniß zu den übrigen Meßtischoperationen beträchtlichen Aufenthalt verursachen; vielmehr wenden wir uns nun zu dem mit eben so großer Sicherheit und in weit kürzerer Zeit ausführbaren Rückwärtseinschneiden mittelst des fehlerzeigenden Dreiecks.

Als die gebräuchlichste steht hierbei oben an die von Lehmann, in seinem früher schon genannten Werke über die Lehre der Situationszeichnung, beschriebene Methode, nach ihm selbst im Wesentlichen ein bloßes Versuchsverfahren, indem der Meßtisch vorerst annähernd orientirt wird, worauf man aus den Eckpunkten des auf der Planchette dargestellten Dreieckes nach den entsprechenden Netzpunkten der Gegend Visirlinien bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten zieht und aus der Größe des entstehenden fehlerzeigenden Dreieckes auf die des begangenen Fehlers schließt, alsdann aber die Planchette nach der einen oder anderen Seite hin dreht, bis endlich das fehlerzeigende Dreieck gänzlich verschwunden ist d. h. die drei Visirlinien einen einzigen Convergenzpunkt zeigen, welches der gesuchte vierte, den Standort des Meßtisches bezeichnende Punkt sein wird. Offenbar gehört zur Ausübung dieses Verfahrens Uebung, dann aber kann sie allerdings in verhältnißmäßig kurzer Zeit vollzogen werden, und namentlich besaß Lehmann selbst hierin außergewöhnliche Fertigkeit. Seine eigenen Worte besagen zwar, der fragliche Punkt könne, wenn anders derselbe nicht in

---

*) Weitere Belehrung hierüber gewähren Schumacher's astronomische Nachrichten Bd. 3. S. 194, nicht minder Ulrich's Lehrbuch der praktischen Geometrie Bd. 2. S. 236.

die Peripherie des umschriebenen Kreises hineinfalle, dadurch gefunden werden, daß man einstweilen einen nach dem Augenmaße gewählten Punkt für ihn hielte, dessen Entfernungen von den Eckpunkten des gegebenen Dreieckes bestimmte, und nun auf den Vistrlinien Perpendikel errichtete, deren Längen in dem Verhältnisse der Entfernungen jenes Punktes von den drei Eckpunkten des Dreieckes selbst ständen; oder daß dieser Punkt der Durchschnitt dreier durch je zwei Dreieckspunkte und den Durchschnittspunkt der denselben entsprechenden Vistrlinien beschriebenen Kreise sei. Allein dem Leser des Lehmann'schen Werkes würde die Begründung dieses Satzes überlassen bleiben, wäre nicht eine Erläuterung desselben durch den Herausgeber Prof. Fischer beigegeben worden.

Es möge wie bisher abc Fig. 119 das verjüngte, dem Dreiecke ABC ähnliche Dreieck bedeuten, q den Convergenzpunkt der ihre homologen Ecken verbindenden Vistrlinien für parallele Lage der homologen Seiten derselben, dann stellen aqb, bqc, aqc die Winkel dar, unter welchen beziehungsweise die Seiten AB, BC und AC von q aus erscheinen. Für eine andere Lage beider Dreiecke werden diese drei Vistrlinien keinen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt haben, sondern ein Dreieck, etwa mnp bilden, welches, wie schon bemerkt, das fehlerzeigende heißt. Weicht jedoch die neue Lage des Dreieckes abc von der vorigen unbedeutend ab, sind überdies die Netzpunkte A, B, C weit entfernt, dann werden auch die Winkel, unter welchen nunmehr die Seiten AB, BC und AC erscheinen, von den vorigen um so weniger verschieden sein, so daß ohne bemerkbaren Fehler $\angle$ amb = $\angle$ aqb, $\angle$ bpc = $\angle$ bqc und $\angle$ anc = $\angle$ aqc gesetzt werden kann. Hieraus erhellt zunächst der Grund obiger Behauptung, dem gemäß der wahre fragliche Punkt q im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt dreier Kreise enthalten ist, welche bezüglich durch

a, b, m
b, c, p und
a, c, n

geführt werden können, daher es nur der Construction dieser Kreise bedurfte, um im Durchschnitt q derselben den gesuchten vierten Punkt zu erhalten. An ihn und an b, a oder c brauchte man jetzt nur das Diopterlineal anzulegen und die Planchette drehend zu bewegen bis zum Zusammenfallen der Vistrebene mit dem wirklichen Punkte in der Gegend, damit der Meßtisch orientirt wäre. Denn wegen Gleichheit der Peripheriewinkel des nämlichen Kreises für einerlei Bogen folgt:

$$\angle \text{amb} = \angle \text{aqb}$$

$$\angle bpc = \angle bqc$$
$$\angle anc = \angle aqc.$$

Obgleich diese Orientirungsmethode Einiges für sich hat, auch schon zwei Kreise zur Lagenbestimmung des Punktes q hinreichen, so steht sie gleichwohl, in Betreff des zu ihrer Ausführung erforderlichen Zeitaufwandes, den vorigen Methoden nach, ganz abgesehen davon, daß die Halbmesser der Kreise sehr groß werden, ja die Kreismittelpunkte über die Planchette hinaus fallen können. Daher bedient man sich dieses Verfahrens in der Regel nicht, vielmehr eines anderen, durch fortgesetzte Betrachtung der hier vorliegenden Linien und Winkel hervorgehenden. Fügt man den schon vorhandenen Linien noch drei andere, nämlich die Perpendikel qt, qs, qu aus q beziehentlich auf die Visirlinien durch a, b und c bei, dann entstehen drei rechtwinklige Dreiecke atq, bsq und cuq, von welchen behauptet wird, daß sie ähnlich sind. Denn es ist:

$$\angle taq = \angle naq = \angle ucq = \angle pcq = \angle pbq$$
$$= \angle sbq, \text{ und folglich}$$
$$tq : sq : uq = at : bs : cu$$

d. h. die Perpendikel aus dem gesuchten vierten Punkte q stehen im Verhältniß der Entfernungen dieses Punktes von den Eckpunkten a, b und c des gegebenen Dreieckes.

Wäre daher der Meßtisch annähernd orientirt, so wähle man einstweilen nach dem Augenmaße einen Punkt q′ für den gesuchten, messe direct mit dem Zirkel von q′ aus nach c d. i. dem nächsten Dreieckseckpunkt, setze diese Entfernung als Einheit, untersuche, wie oft solche in den Entfernungen qa und qb enthalten ist, und errichte bezüglich auf den Visirlinien Perpendikel, welche im Verhältnisse dieser Entfernungen zu einander stehen. Der Durchschnittspunkt dieser Perpendikel wird je nach erlangter Uebung im Taxiren der Lage des gesuchten Punktes mehr oder weniger von q′ abweichen. An diesen Punkt und an b ist jetzt das Diopterlineal anzulegen und die Planchette zu drehen, bis wiederum in der Visirebene das Object B erscheint. Werden hierauf aus a und c Visirlinien nach A und C gezogen, so bestätigen diese durch ihre Zusammenkunft in einem einzigen Punkte der ersten die Richtigkeit der erfolgten Orientirung, oder es entsteht neuerdings ein — muthmaßlich kleineres — fehlerzeigendes Dreieck, mit welchem wie vorher zu verfahren ist. Praktiker begnügen sich mit einer Beurtheilung des Verhältnisses der Entfernungen des fraglichen

Punktes von den Eckpunkten des Dreieckes abc nach dem Augenmaße, und würden im vorliegenden Falle

$$aq : bq : cq = 1\tfrac{1}{2} : 2 : 1$$

setzen, sodann ebenfalls blos nach dem Augenmaße die in einem einzigen Punkte zusammenkommenden Perpendikel tq, sq und uq darstellen, nicht einmal unter Benutzung eines Winkels und Lineals, sondern mit freier Hand.

Einiger Zweifel könnte bei der Ausführung dieser Orientirungsmethode hinsichtlich der Lage des auszuwählenden Punktes zu den Seiten des fehlerzeigenden Dreieckes entstehen; inzwischen verschwindet derselbe bald, wenn nur bei seiner Auffuchung der oben ausgesprochene Satz berücksichtigt wird, nämlich daß dieser Punkt stets in einem der Kreise enkhalten sein müsse, welche durch je zwei Eckpunkte des Dreieckes abc und den Durchschnittspunkt der auf dieselben Bezug habenden Vistrlinien beschrieben werden. Dem Anfänger ist die Ausführung dieser Construction für alle denkbaren Lagen des gegebenen Dreieckes abc zu dem in Wirklichkeit vorhandenen ABC darum sehr zu empfehlen, weil er dadurch nicht nur im Aufsuchen des vierten Punktes q Fertigkeit erlangt, sondern auch Auffuchungsregeln entdecken wird, die ihm bleibender sein werden im Vergleich zur bloßen Ueberlieferung, sei es durch Schriften oder auf andere Art. Die Ergebnisse einer solchen Construction treffen wir in Fig. 120 an, und entnehmen daraus, daß der fragliche Punkt q innerhalb des fehlerzeigenden Dreieckes mnp vorkommt, sobald das Dreieck abc vom Dreiecke ABC umschlossen wird; außerhalb desselben an der Seite der mittleren, d. h. nach b führenden Vistrlinie, wenn abc zwar außerhalb ABC, jedoch noch innerhalb des um dieses Dreieck gedachten Kreises gelegen ist. Ferner zeigt die nämliche Figur, woselbst der Punkt q anzutreffen sei, wenn das Dreieck abc außerhalb des umschriebenen Kreises für ABC, einer Seite oder Spitze desselben gegenüber enthalten sein sollte. In beiden Fällen ist es die mittlere d. h. den Eckpunkt c betreffende Vistrlinie, hinsichtlich welcher die Lage des Punktes q am einfachsten bezeichnet werden kann, da für den ersteren das fehlerzeigende Dreieck zwischen dem Punkte q und der mittleren Vistrlinie sich befindet, während diese für den anderen Fall zwischen dem Punkte q und dem fehlerzeigenden Dreiecke inne liegt.

Werden die Dreiecke abc und ABC Fig. 121 zwar in paralleler Lage ihrer homologen Seiten, jedoch dergestalt zu einander liegend vorausgesetzt, daß die umschriebenen Kreise beider Dreiecke sich innerlich berühren, dann hat der Berührungspunkt q zu beiden Dreiecken einerlei

Lage und ist folglich der gesuchte vierte, den Standort des Meßtisches bezeichnende Punkt, für welchen die Seiten AB, BC, AC bezüglich unter den Winkeln aqb, bqc und aqc erscheinen. Leicht ist es aber einzusehen, daß diese Winkel noch als dieselben sich darstellen werden, falls dem Dreiecke abc durch Drehung der Planchette eine convergirende Lage zum Dreiecke ABC ertheilt wird, und daß man dann keineswegs aus der Vereinigung der Visirlinien in einem einzigen Punkte, d. h. aus dem Nichtentstehen eines fehlerzeigenden Dreieckes, auf den Parallelismus beider Dreiecke zu schließen berechtigt sei, also in völliger Ungewißheit über die Lage des gesuchten Punktes verbleibt. Denn ein jeder Punkt des durch die Dreiecksteckpunkte a, b, c gehenden Kreises kann für den richtigen gelten, z. B. auch q′, indem die Schenkel der ihm zugehörigen Peripheriewinkel mit denen in q auf einerlei Bogen sich stützen. Hieraus folgt, daß zur Angabe des Meßtischstandortes nicht solche Netzpunkte zum Rückwärtseinschneiden gewählt werden dürfen, deren umschriebener Kreis durch den fraglichen Punkt hindurch geht; ja selbst die Nähe dieses Kreises ist zu vermeiden, indem sonst wie z. B. aus q″ die Winkel, unter welchen die Dreiecksseiten erscheinen, von den aus q beobachteten nicht genügende Verschiedenheit zeigen, um mit Sicherheit auf die Lage des gesuchten Punktes schließen zu können.

§. 111.

Wie schon bemerkt, läßt das Rückwärtseinschneiden mittelst fehlerzeigender Dreiecke eine völlig empirische Ausführung zu, insofern nach Erlangung eines solchen, etwa des Dreieckes No. 1 Fig. 122, hervorgeht, nach welcher Seite hin die Drehung der Planchette erfolgen müsse, um das Dreieck abc in eine zum Dreiecke ABC parallele Lage zu versetzen. Gelingt dies nicht nach dem ersten Versuche, dann wird ein zweites, — wie leicht erweislich — dem vorigen ähnliches, jedoch kleineres Dreieck No. 2 entstehen, hierauf ein drittes No. 3 u. s. w., welche alle, falls die Orientirungslinie bq d. h. die für den Parallelismus beider Dreiecke durch deren homologe Eckpunkte b und B gehende Gerade nicht überschritten würde, einerlei Lage haben werden. Auf diese Weise fortfahrend, tritt endlich der Augenblick der Orientirung, nämlich des Zusammenfallens der drei Visirlinien in einen einzigen, den gesuchten darstellenden Punkt q selbst ein.

Nach Ueberschreitung dieser Grenze nimmt abc zum Dreiecke ABC eine der früheren entgegengesetzt convergirende Lage ein; alsdann werden die nunmehr entstehenden, unter sich so wie den vorigen ähnlichen

fehlerzeigenden Dreiecke gleichfalls eine entgegengesetzte Lage zur ersten Dreiecksgruppe zeigen. Hieraus folgt, daß, wenn nach zwei ersten Versuchen fehlerzeigende Dreiecke wie etwa No. 1 und No. 4 entstanden wären, die Orientirungslinie bq zwischen beiden aufzusuchen sei und dafür durch Fortsetzung dieses Verfahrens die Grenzen immer enger und enger gezogen werden können; ein Weg, der offenbar zuletzt auch zur geforderten Orientirung der Planchette führt.

Dieser nothwendig aufhältlichen Versuche überhebt das Verfahren Netto's*), wonach schon zwei fehlerzeigende Dreiecke die gewünschte Orientirung gewähren. Sind mnp, m′n′p′ Fig. 123 entgegengesetzte fehlerzeigende Dreiecke, dann werden deren correspondirende Eckpunkte n, n′ durch eine Gerade verbunden, an den Enden derselben Perpendikel ng, n′t errichtet, und solche bezüglich den Abschnitten nh, n′k gleich gemacht. Darauf ist durch g und t eine Gerade zu führen, welche die vorige nn′ in einem der verlangten Orientirungslinie bq angehörigen Punkte e schneidet, weshalb Behufs der Orientirung an e und an den Punkt b das Diopterlineal anzulegen und die Planchette drehend zu bewegen ist, bis die Vistrebene durch das Object B hindurchgeht.

Zur Begründung dieser Orientirungsmethode sind sämmtliche Kreise auszuführen, welche durch je zwei Eckpunkte des Dreieckes abc und durch den Durchschnittspunkt der dieselben betreffenden Vistrlinien gehen, desgleichen von n und n′ aus Gerade zu ziehen zum Durchschnitt d der Orientirungslinie qb mit dem um das Viereck nn′ac beschriebenen Kreise, auch qa und qc. Nun ist $\angle$ n′dq = $\angle$ n′aq, wegen Gleichheit der zu einerlei Bogen im nämlichen Kreise gehörigen Peripheriewinkel, ferner:

$$\angle \text{ n'aq} = \angle \text{ m'aq} = \angle \text{ m'bq}$$

$$\angle \text{ n'dq} = \angle \text{ m'bq}$$

$$\triangle \text{ n'de} \sim \triangle \text{ kbe}$$

$$\text{n'e} : \text{n'k} = \text{de} : \text{db}.$$

Auf gleiche Art folgt:

$$\angle \text{ ndq} = \angle \text{ ncq}$$

$$\angle \text{ ncq} = \angle \text{ pcq} = \angle \text{ pbq}$$

$$\angle \text{ ndq} = \angle \text{ pbq}$$

$$\triangle \text{ nde} \sim \triangle \text{ hbe}$$

---

*) Man sehe dessen Vermessungskunde.

ne : nh = de : db, demnach ist

n'e : n'k = ne : nh,

womit obige Construction übereinstimmt.

Wir fügen hinzu, daß, wären zwei einseitige fehlerzeigende Dreiecke erhalten worden, etwa mnp, m'n'p' Fig. 124, alsdann ganz auf dieselbe Weise zu verfahren und das Verfahren vollständig so wie vorhin zu begründen gewesen sein würde, und bemerken schließlich nur noch, wie beide letzteren Figuren besonders geeignet sind, die zu Anfange des gegenwärtigen Paragraphs ausgesprochene Aehnlichkeit der fehlerzeigenden Dreiecke darzuthun.

§. 112.

Was immer für eine von den hier beschriebenen Orientirungsmethoden angewendet werden mag, stets wird auf das Gelingen der Orientirung selbst die Auswahl der drei Netzpunkte von wesentlichem Einflusse sein, indem es für die Sicherheit der Angabe des gesuchten Punktes keinesweges gleichgültig ist, unter welchen Winkeln die drei Visirlinien zu einander geneigt, und ob die Netzpunkte in größerer oder geringerer Entfernung von diesem Punkte gelegen sind. Netzpunkte, deren Visirlinien unter sehr spitzen Winkeln einander schneiden, gewähren für die Angabe des geforderten Punktes keine genügende Sicherheit, ebensowenig nahe liegende, da bei diesen durch das Diopterhaar ein verhältnißmäßig zu großer Theil des den Netzpunkt bezeichnenden Objectes bedeckt wird. Wie günstig aber auch die Umstände gewesen sein mögen, nie wird der vorsichtige Geometer versäumen, den erhaltenen Punkt dadurch zu prüfen, daß er zusieht, ob auch Visirlinien nach anderen Netzpunkten durch diesen Punkt hindurch gehen. Steht ein sonst geeignetes Netzdreieck zur Verfügung, für welches der gewählte Standort des Meßtisches in dessen Inneres, vielleicht nahe der Mitte desselben hineinfällt, so wird dadurch das Rückwärtseinschneiden ungemein erleichtert, indem, war nur die erste Orientirung einigermaßen gelungen, das fehlerzeigende Dreieck klein ausfallen wird und der innerhalb, alsdann auch in der Gegend der Mitte desselben liegende fragliche Punkt bei nur einiger Uebung alsbald sich ergiebt, weswegen man bei vorhandener Wahl diesem Falle gewöhnlich den Vorzug ertheilt.

§. 113.

Je größer die Anzahl der bestimmten Netzpunkte ist und je gleichmäßiger ihr Vorkommen in der aufzunehmenden Gegend, desto leichter

wird für jeden beliebigen Standort des Meßtisches die Orientirung desselben, also auch die Angabe des fraglichen vierten Punktes und nun die Aufnahme des Details vollzogen werden können. Dieselbst geschieht unter Anwendung von einander durchschneidenden Visirlinien, schlechtweg durch Schnitte oder vermittelst directer Messung in der Richtung der Visirlinien; zuweilen werden auch andere Hülfsmittel, namentlich das Winkelkreuz, mit hinzugezogen. Bauplätze, freie Felder oder andere in flachem Terrain liegende Grundstücke von sehr geringer Ausbreitung können öfters von einem einzigen Standpunkte aus mittelst directer Messung derjenigen Visirlinien dargestellt werden, welche auf Begrenzungspunkte solcher Gegenstände Bezug haben. So zeigt Fig. 125, auf welche Art durch vereinigte Anwendung des Meßtisches und Winkelkreuzes eine krummlinige Begrenzung dargestellt werden könne, indem, wie aus ihr hervorgeht, vom gewählten Standpunkte q aus Visirlinien nach Grenzpunkten A, B, C . . . . zu ziehen, die Entfernungen qA, qB, qC . . . . zu messen, nach verjüngtem Maße auf die Planchette aufzutragen, und alsdann die jenen Punkten entsprechenden Punkte a, b, c . . . durch einen der krummlinigen Begrenzung angemessenen Zug zu verbinden sind. Auch übersieht man, daß es von der beabsichtigten Genauigkeit der graphischen Darstellung abhängt, ob mehr oder weniger solcher Punkte anzunehmen sein werden, so wie überdies aus Fig. 125 hervorgeht, inwiefern hierbei vom Winkelkreuze Gebrauch zu machen ist, da dieserhalb nur eine bestimmte Linie, etwa CD oder AF als Abscissenlinie gewählt zu werden braucht, auf welche Ordinaten MN, PQ . . . zu beziehen, endlich diese selbst nebst ihren Abständen zu messen und gehörigen Ortes auf der Planchette d. h. an cd oder af aufzutragen sind.

Gegenstände wie z. B. ein Straßenzug, der Lauf eines Baches oder Flusses können öfters ausschließlich durch Schnitte dargestellt werden, indem es hierzu nur solcher Aufstellungen M, N . . . Fig. 126 des Meßtisches bedarf, daß stets eine möglichst große Anzahl von Grenzpunkten a, b, c . . . zu übersehen ist, und die auf solche Bezug habenden Visirlinien einander unter guten Winkeln schneiden, nachher aber entweder der Prüfung aller hierdurch erhaltener Schnitte oder doch wenigstens jener, vielleicht a, d, f, deren Richtigkeit zweifelhaft erscheint. Zur Vermeidung von Irrungen pflegt man die zu bestimmenden Punkte mittelst numerirter Pfählchen zu bezeichnen und hierauf deren Nummern den bezüglichen Visirlinien beizuschreiben.

Complicirter gestaltet sich die Aufnahme von Ortschaften, Dörfern und Städten, welche jedoch dadurch sehr zu erleichtern und hin-

sichtlich ihrer Zuverlässigkeit wesentlich zu fördern ist, daß, vor dem Eingehen in das Detail, eine der Ausdehnung der Gebäudegruppen entsprechende Anzahl thunlichst hervorragender Netzpunkte auf der Planchette angesammelt wird, zu deren Erwerbung, besonders bei muldenförmiger Lage des Ortes, Meßtischaufstellungen in der Umgegend desselben genügen können. In dessen Inneres erfolgt der Eintritt erst, wenn zuvor Alles von außen Bestimmbare erledigt worden ist, wohin die Angabe der Umfassungsmauern, Gartenbegrenzungen u. dgl. gehören, und dann gewöhnlich an einer offenen, ein Alignement XY Fig. 127 von möglichst entfernten Richtobjecten gewährenden Stelle, etwa bei M. Von diesem Punkte aus werden nach den Hausecken, so wie nach ausgezeichneten Punkten anderer Gegenstände, Visirlinien gezogen, diese gehörig bezeichnet und die Bedeutung der Bezeichnungen im Vermessungsjournale angemerkt. Hierauf wird im nämlichen Alignement ein zweiter, für die Durchschneidung der vorigen Visirlinien, so wie zur Ansammlung neuer, geeigneter Standpunkt gewählt, dessen Bestimmung unter Benutzung der vorhandenen Netzpunkte oder, stünde keiner derselben zu Gebote, mittelst directer Messung vom ersten Standpunkte aus geschieht. Nach vollbrachter, erschöpfender Benutzung des zweiten Standpunktes erfolgt die Wahl eines dritten, später eines vierten u. s. f. dieses Alignements, bis zur gänzlichen Erledigung sämmtlicher von ihm aus zu erlangenden Details, wobei mittelst bloßer Schnitte und wirklicher Messungen unter Gebrauch des Winkelkreuzes abwechselnd und je nach Umständen zu verfahren ist. Auch wird nicht versäumt werden, andere zur Aufstellung des Meßtisches in Seitenstraßen geeignete Alignements zu führen, in so fern dies während der Operationen außerhalb des Ortes unthunlich war; die Orientirung der Planchette aber soll so oft als möglich auf die vorhandenen Netzpunkte bezogen werden. Hinsichtlich der Angabe von Hintergebäuden und Hofräumen bemerken wir, daß Aufnahmezweck und Maßstab darüber entscheiden, ob durch wirkliche Aufstellungen des Meßtisches in diesen Räumen zu operiren sei, oder die durch Erlangung der Vordergebäude bereits erworbenen festen Linien genügen, um mittelst an dieselben anzuknüpfender directer Messungen jene Räume darzustellen, in welchem letzteren Falle der Gebrauch von Brouillons unerläßlich ist.

§. 114.

Da die Ausführung des Planes einer Gegend in der graphischen Darstellung aller darin enthaltenen Räumlichkeiten besteht, so bedingt

dieselbe Fertigkeit im Zeichnen überhaupt, insbesondere aber im Plan- oder Situationszeichnen. Princip ist es in dieser Kunst, die Gegenstände so abzubilden, wie sie von oben herab betrachtet erscheinen würden, oder strenger als Horizontalprojectionen, und die Beschaffenheit des Falles entscheidet darüber, bis zu welchem Grade der Vollendung in der Ausführung dieser bildlichen Darstellungen zu verschreiten, d. h., ob bei der bloßen Angabe der Contouren stehen zu bleiben oder auch das von denselben Eingeschlossene zu berücksichtigen sei. Wird dennoch hiergegen zuweilen verstoßen, werden z. B. Sträucher, Bäume, Wegweiser u. dgl. so dargestellt, als wären sie von der Seite betrachtet worden, dann geschieht dies nur aus altem Herkommen und zur Unterstützung des im Deuten eines Planes weniger Kundigen. Möge nun der Plan in bunter Manier ausgeführt, nämlich den Bodengegenständen die diesen eigenthümliche Farbe ertheilt werden, oder schon allein Tuschumrisse genügen, stets ist mit Sorgfalt darauf zu achten, daß durch die gewählten Bezeichnungen eine Verwechselung ihrer Bedeutung nicht geschehen könne.

Obschon nach diesen Bemerkungen eine Unterweisung im Situationszeichnen selbst nicht am unrechten Orte sein würde, so müssen wir gleichwohl, da hierdurch die Umfänglichkeit gegenwärtiger Schrift allzu sehr erweitert werden würde, darauf verzichten, und auf die über diesen Gegenstand in beträchtlicher Anzahl vorhandenen Sammlungen von Musterblättern Bezug nehmen, mit dem Vorbehalt jedoch, auf die Darstellung der Bergformen bei Gelegenheit der Verticalmessungen zurückzukommen.

§. 115.

Die bloße Darstellung des Planes einer Gegend ist in der Regel nicht endlicher Zweck der Meßtischoperationen, vielmehr dient der Plan als Grundlage zur Beantwortung von mancherlei, die dargestellten Räumlichkeiten betreffenden Fragen, deren eine der gewöhnlichsten das Areal oder den Inhalt, sei es nun der gesammten aufgenommenen Bodenfläche oder von Theilen derselben, betrifft, wegen dessen Erlangung die §§. 51 bis 59 das Nöthige enthalten. Nicht minder häufig soll auf Grund des Planes eine gegebene Bodenfläche nach vorgeschriebenem Verhältniß eingetheilt werden, in Folge dessen das Abstecken von auf der Planchette dargestellten Figuren auf dem Felde nöthig wird. Dem Baue einer Straße geht die Aufnahme des Terrains, durch welches dieselbe sich hinziehen soll, voran; desgleichen Projecten anderer Art, so daß ein Ende nicht abzusehen wäre, wollten wir alle Nutzanwendungen eines Planes anführen. Nur bei

einem der wichtigeren, nämlich beim Theilen der Figuren, wollen wir noch verweilen.

§. 116.

Theilung der Figuren.

Die Theilung der Figuren zerfällt in die geometrische und ökonomische, je nachdem die Qualität des Bodens außer Acht gelassen, also nur darauf gesehen wird, daß die Inhaltszahlen der Figurentheile dem bedungenen Theilungsverhältnisse entsprechen, oder auf die Bodenbeschaffenheit mit Rücksicht zu nehmen ist. Letztere setzt Kenntniß der Güte des Bodens voraus, d. h. der Ertragsfähigkeit oder Bonität desselben; da jedoch bei Beurtheilung der Bonität mehrerer Bodenarten von einer als Einheit geltenden ausgegangen wird, so folgt, daß die ökonomische Theilung der Figuren auf die geometrische zurückzuführen sei. Verhielten sich z. B. die Bonitäten einer in zwei gleiche Theile einzutheilenden Bodenfläche wie 1 zu 2, dann sieht man ein, daß auf jeden Theil entweder gleiches Areal einer jeden Bodenart kommt, oder die Areale beider Theile im Verhältniß wie 1 zu 2 stehen werden, dergestalt, daß der Theil von geringerer Bonität doppelt so groß als der andere sein müsse. Zuletzt kommt es sonach bei der ökonomischen Theilung immer auf die geometrische hinaus, daher wir auch vorzugsweise nur diese zu betrachten haben werden. Diese selbst nun läßt eine zweifache Auffassung zu, in so fern die Theilgrenzen willkürliche oder solche Linien sein können, welche vorgeschriebenen Bedingungen entsprechen, z. B. durch gegebene Punkte hindurchgehen, gegebenen Linien parallel sind u. s. w. Besonders häufig hat man es mit Theilungen der zweiten Kategorie zu thun, weswegen uns hier nur diese in einer Reihe der merkwürdigsten Aufgaben beschäftigen mögen, um so mehr, da Theilungen der ersteren Art stillschweigend mit denen der letzteren übereinstimmen, in so fern bei diesen ja auch Bedingungen zu erfüllen sind, nämlich willkürlich gewählte.

§. 117.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC Fig. 128 dergestalt in zwei dem Verhältniß m : n entsprechende Theile zu theilen, daß die Theilungslinie einer gegeben Geraden PQ parallel ist.

Auflösung. Man mache AE : EC = m : n, ziehe BD parallel zu PQ, construire über DC einen Kreis, errichte in E auf AC das

Perpendikel EF, nehme CG = CF, und lege durch G die Parallele GH zu PQ, so ist sie die gesuchte Theilungslinie.

Beweis. Wird FD gezogen, so findet statt:

$$FC : EC = DC : FC$$
$$GC : EC = DC : GC$$
$$\overline{GC}^2 = EC \,.\, DC.$$

Ferner ist:

$$\triangle CDB : \triangle CGH = \overline{CD}^2 : \overline{CG}^2$$
$$= \overline{CD}^2 : EC \,.\, CD$$
$$= CD : EC$$
$$\triangle CDB : \triangle ABC = CD : AC$$
$$\triangle ABC : \triangle CGH = AC : EC$$
$$= m + n : n$$
$$\triangle ABC - \triangle CGH : \triangle CGH = m + n - n : n, \text{ folglich}$$
$$\text{Viereck } ABHG : \triangle CGH = m : n.$$

Zusatz. Es leuchtet ein, daß noch eine zweite Theilungslinie derselben Forderung entspricht, in so fern die Aufeinanderfolge der Theile AE und EC eine andere sein kann.

§. 118.

Aufgabe. Das Dreieck ABC Fig. 129 mittelst einer gegebenen Geraden PQ paralleler Theilungslinien in drei sich wie m:n:o verhaltende Theile einzutheilen.

Auflösung. Nachdem AC dergestalt getheilt worden ist, daß man hat AD : DE : EC = m : n : o, so wird BF parallel zu PQ gezogen und über AF ein Kreis beschrieben; hierauf errichtet man bis zum Durchschnitt mit demselben aus D und E bezüglich die Perpendikel DH, EG auf AC, nimmt AL = AH, AI = AG und führt durch L und I Parallelen zu PQ, nämlich LM, IK, so theilen diese das Dreieck ABC in drei dem bedungenen Verhältnisse entsprechende Theile.

Beweis. Vermöge der Construction ist:

$$\triangle AIK : \triangle AFB = \overline{AI}^2 : \overline{AF}^2$$
$$= AE \,.\, AF : \overline{AF}^2$$
$$= AE : AF$$
$$\triangle AFB : \triangle ABC = AF : AC, \text{ mithin}$$
$$\triangle AIK : \triangle ABC = AE : AC, \text{ ferner}$$
$$\triangle AFB ; \triangle ALM = \overline{AF}^2 : \overline{AL}^2$$
$$= \overline{AF}^2 : AF \,.\, AD$$
$$= AF : AD$$

$$\triangle ABC : \triangle AFB = AC : AF, \text{ daher}$$
$$\triangle ABC : \triangle ALM = AC : AD.$$

Hieraus folgt:

$$\triangle ALM = \frac{\triangle ABC \,.\, AD}{AC}$$

$$\triangle AIK = \frac{\triangle ABC \,.\, AE}{AC}, \text{ demnach}$$

$$\triangle ALM : \triangle AIK : \triangle ABC = \frac{\triangle ABC \,.\, AD}{AC} : \frac{\triangle ABC \,.\, AE}{AC} : \triangle ABC$$
$$= AD : AE : AC = m : (m+n) : (m+n+o), \text{ oder}$$
$$\triangle ALM : \triangle AIK - \triangle ALM : \triangle ABC - \triangle AIK = m : (m+n-m)$$
$$: [m+n+o-(m+n)], \text{ d. i.}$$
$$\triangle ALM : \text{Viereck } LMKI : \text{Viereck } IKBC = m : n : o,$$

wie verlangt wurde.

Zusatz. Fällt BF nicht außerhalb der beiden Theilungslinien ML und IK, sondern, wie Fig. 130 zeigt, zwischen dieselben hinein, dann sind — nachdem zuvor wiederum AC im Verhältniß m : n : o getheilt worden ist — über AF und FC Kreise zu beschreiben; desgleichen Perpendikel aus D, E zu AC zu errichten, nämlich DH und EG; darauf hat man AD = AH, CI = CG zu nehmen, endlich durch L, I bezüglich die Parallelen LM und IK zu PQ zu führen, so stellen diese die gesuchten Theilungslinien dar. Denn es ist:

$$\triangle CFB : \triangle ABC = CF : AC$$

$$\triangle CFB = \frac{\triangle ABC \,.\, CF}{AC}, \text{ ferner}$$

$$\triangle CIK : \triangle CFB = \overline{CI}^2 : \overline{CF}^2$$
$$= CF \,.\, CE : CF$$
$$= CE : CF$$

$$\triangle CIK : \frac{\triangle ABC \,.\, CF}{AC} = CE : CF$$

$$\triangle CIK : \triangle ABC = CE : AC = o : (m+n+o)$$

$$\triangle CIK = \frac{\triangle ABC \,.\, o}{m+n+o}, \text{ so auch}$$

$$\triangle ALM : \triangle ABC = AD : AC = m : (m+n+o)$$

$$\triangle ALM = \frac{\triangle ABC \,.\, m}{m+n+o}, \text{ daher}$$

$$\triangle ABC - (\triangle CIK + \triangle ALM) = \triangle ABC - \left(\frac{\triangle ABC \cdot o + \triangle ABC \cdot m}{m+n+o}\right)$$

$$= \frac{\triangle ABC \cdot n}{m+n+o}, \text{ folglich}$$

$$\triangle ALM : \text{Fünfeck } LMBKI : \triangle CIK = m : n : o.$$

Da die Theile auf HC in sechserlei verschiedener Folgeordnung vorkommen können, so entsprechen gegenwärtige Aufgaben gleichzeitig eben so vielen Lösungen, daher, soll sie anders eine bestimmte sein, die Folgeordnung dieser Theile nothwendig gegeben sein muß; auch bedarf es wohl kaum der Erwähnung, daß für vier oder noch mehrere Theile auf ähnliche Weise zu verfahren sein würde.

§. 119.

Nicht zu läugnen ist es, daß obige, ausschließlich im Wege der Construction vollzogenen Theilungen in der Praxis Umständlichkeiten mancherlei Art darbieten, und man darf gegen die Richtigkeit derselben um so eher Bedenken hegen, als die Theilungsergebnisse auf mehreren nach einander auszuführenden Constructionen beruhen, welche nur allzu leicht Fehler von Belang veranlassen können. Daher sucht man das Theilungsgeschäft entweder von derartigen geometrischen Constructionen gänzlich unabhängig zu machen, oder deren Anzahl doch möglichst zu beschränken, höchstens auf einige directe Messungen zurückzuführen, was nur allein unter Zuziehung der hierbei einschlagenden Rechnungen gelingt. Wird zu diesem Behufe in der Forderung des §. 117 Fig. 128 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, ferner $CH = x$, $CG = y$, so wie das von BD auf AC abgeschnittene, entweder zu messende oder mittelst Kenntniß der Lage von PQ zu einer der Dreiecksseiten zu berechnende Stück $DC = d$ gesetzt, dann folgt, wenn überdies für $m : n$ die Bedeutung jenes Paragraphen gilt, nach dem aus der Elementargeometrie bekannten Satze, daß die Inhalte zweier, einen gemeinschaftlichen Winkel enthaltenden Dreiecke sich wie die Producte aus den diesen Winkel einschließenden Seiten verhalten:

$$\triangle ABC : \triangle GHC = AC \cdot BC : GC \cdot HC$$

$$\triangle ABC : \triangle GHC = a \cdot b : x \cdot y$$

$$\triangle ABC - \triangle GHC : \triangle GHC = ab - xy : xy$$

$$\text{Viereck } ABHG : \triangle GHC = ab - xy : xy, \text{ oder}$$

$$1) \quad m : n = ab - xy : xy$$

$$BC : DC = HC : GC$$

$$2) \quad a : d = x : y.$$

Aus 1 und 2 ergiebt sich:

$$x = a\sqrt{\frac{bn}{d\,(m+n)}}$$

$$y = \sqrt{\frac{nbd}{m+n}}.$$

Beispiel. Es sei $AC = 62$, $AB = 45$, $BC = 36$, $DC = 35$, $m : n = 3 : 2$, dann ist:

$$CH = x = 36\sqrt{\frac{62 \,.\, \frac{2}{3}\,m}{35\,(m+\frac{2}{3}\,m)}}$$

$$= 36\sqrt{\frac{124}{175}} = 30{,}303\ldots$$

$$CG = y = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\,m \,.\, 62 \,.\, 35}{m+\frac{2}{3}\,m}} = \sqrt{868}$$

$$= 29{,}461\ldots$$

Zur Bestätigung kann GH, hierauf der Inhalt des $\triangle$ GHC berechnet und zugesehen werden, ob solcher sich zum Inhalte des gegebenen $\triangle$ ABC wie $n : m+n$ verhält.

Ein ähnlicher Rechnungsgang würde zur Erledigung der folgenden in §. 118 enthaltenen Aufgabe einzuschlagen sein.

§. 120.

Aufgabe. Das Dreieck ABC Fig. 130 dergestalt in zwei, sich wie $m : n$ verhaltende Theile zu theilen, daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punkt D der Seite AB hindurchgeht.

Auflösung. Zuvörderst wird AC, dem bedungenen Verhältnisse gemäß, in die beiden Stücke AF und FC zerlegt, alsdann durch F, FE parallel zu der den gegebenen Punkt D mit dem gegenüberliegenden Scheitel verbindenden Geraden DB gezogen, so ist E ein Punkt der gesuchten Theilungslinie, folglich diese bestimmt.

Beweis. Zieht man FB, dann findet statt:

$$\triangle AFB : \triangle FBC = AF : FC = m : n$$

$$\triangle AFB = \triangle AFE + \triangle EFB = \triangle AFE + \triangle EFD = \triangle AED,$$

so auch

$$\triangle FBC = \triangle CDB + \triangle FDB = \triangle CDB + \triangle DEB$$

$$= \text{Viereck DEBC, daher}$$

$$\triangle AED : \text{Viereck DEBC} = m : n.$$

Zusatz 1. Da, wenn von einem bestimmten Endpunkte, etwa

A, der Seite AC ausgegangen wird, die Aufeinanderfolge der Theile AF und FC eine zweifache sein kann, so läßt diese Aufgabe gleichzeitig zwei Lösungen zu. Wäre

$$AH : HC = n : m$$

gemacht worden, dann würde nach denselben Schlußfolgen wie vorhin DG die gesuchte Theilungslinie sein.

Zusatz 2. Um dieser Forderung durch Rechnung zu entsprechen, so bedarf es der Bestimmung von AE oder GC; und wenn man hierzu $AE = x$, $CG = y$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = d$ setzt, dann folgt:

$$\triangle ABC : \triangle AED = AB \,.\, AC : AD \,.\, AE$$
$$= b \,.\, c : d \,.\, x$$
$$= m + n : m$$
$$x = \frac{bcm}{d\,(m+n)}.$$

Desgleichen

$$\triangle ABC : \triangle DCG = AC \,.\, BC : DC \,.\, CG$$
$$= a \,.\, b : (b - d)\, y$$
$$= m + n : n$$
$$y = \frac{abn}{(b - d)\,(m+n)}.$$

Zusatz 3. Hätte man $AF = FH = HC$ genommen, so würden, wie leicht erweislich, die Linien DE und DG das gegebene Dreieck ABC in drei gleiche Theile absondern, oder in Theile, welche sich zu einander verhielten, wie m:n:o, wären jene Stücke auf AC diesem Verhältnisse gemäß gewählt worden; auch könnten auf ähnliche Weise, wie vorhin, die Längen AE und CG durch Rechnung gefunden werden. Endlich leuchtet ein, daß dieses Verfahren für beliebig viele in irgend einem Verhältniß zu einander stehende Theile zulässig sei.

§. 121.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC Fig. 131 ist gegeben und in dessen Innern ein Punkt D, damit von ihm aus Theilungslinien gezogen werden, wodurch das Dreieck in drei sich wie m:n:o verhaltende Theile zerfällt, unter der Bedingung, daß eine der Theilungslinien durch einen der Eckpunkte, etwa B, gehe.

Auflösung. Man theile die dem Eckpunkte B gegenüberliegende Dreiecksseite AC in drei, dem vorgeschriebenen Verhältniß m:n:o entsprechende Theile AF, FK und KC, ziehe DF und hierzu parallel BE,

hierauf DE, so ist letztere eine der gesuchten Theilungslinien. Nun mache man EH : HB = FK : KC, ziehe DC und dazu parallel HG, dann zeigt G einen Punkt der dritten Theilungslinie DG an.

Beweis. Zieht man BF, so findet statt:

$$\triangle ABF : \triangle ABC = AF : AC = m : m + n + o, \text{ oder}$$

$$\triangle ABE + \triangle BEF : \triangle ABC = m : m + n + o,$$

und weil vermöge der Construction $\triangle BEF = \triangle BED$,

$$\triangle ABE + \triangle BED : \triangle ABC = m : m + n + o,$$

d. i. Viereck $ABDE : \triangle ABC = m : m + n + o$, folglich

$$1)\quad \text{Viereck } ABDE = \frac{\triangle ABC \cdot m}{m + n + o}.$$

Werden ferner DH und HC gezogen, dann ist:

$$\triangle EDG = \triangle EDC - \triangle DGC$$
$$= \triangle EDC - \triangle HDC$$
$$= \text{Viereck } EHDC - \triangle EHD - \triangle HDC$$
$$= \triangle EHC - \triangle EHD$$
$$\triangle EHC : \triangle EBC = n : n + o$$
$$\triangle EHD : \triangle EBD = n : n + o$$
$$\triangle EBC = \frac{\triangle EHC\,(n + o)}{n}$$
$$\triangle EBD = \frac{\triangle EHD\,(n + o)}{n}$$
$$\triangle EBC - \triangle EBD = \text{Viereck } EDBC$$
$$= \frac{(\triangle EHC - \triangle EHD)\,(n + o)}{n}$$
$$= \frac{\triangle EDG\,(n + o)}{n}$$
$$\triangle EDG = \frac{\text{Viereck } EDBC \cdot n}{n + o}.$$

Ferner hat man:

$$\triangle ABC - \text{Viereck } ABDE = \text{Viereck } EDBC =$$
$$\triangle ABC - \frac{\triangle ABC \cdot m}{m + n + o} = \frac{\triangle ABC\,(n + o)}{m + n + o},$$

woraus

$$2)\quad \triangle EDG = \frac{\triangle ABC\,(n + o)}{m + n + o} \cdot \frac{n}{n + o} = \frac{\triangle ABC \cdot n}{m + n + o}$$

hervorgeht.

Auf ähnliche Art oder schon durch Subtraction beider Theile von $\triangle ABC$ ergiebt sich:

3) Viereck $BDGC = \frac{\triangle ABC \cdot o}{m+n+o}$, folglich ist

$$ABDE : EDG : BDGC = m : n : o$$

der Forderung gemäß.

Zusatz 1. Wenig nur ist dieses Verfahren von der Ausführung des Falles verschieden, für welchen eine der Theilungslinien anstatt durch einen Eckpunkt vielmehr durch irgend einen gegebenen Punkt einer Seite des Dreiecks hindurch geht. Auch ergiebt sich hiernach leicht die Construction Behufs der Theilung des Dreiecks ABC in mehr als drei Theile, nicht minder die Einschränkung dieser Forderung auf besondere Fälle.

Zusatz 2. Um das Problem durch Rechnung zu lösen, ist es erforderlich, aus dem gegebenen Punkte D Perpendikel auf die Dreiecksseiten zu fällen, nämlich DL, DN, DM, und deren Länge zu bestimmen, sei es nun durch directes Messen oder durch Berechnung, welcher letztere Weg freilich den von DB mit AB oder BC eingeschlossenen Winkel als gegeben voraussetzt. Alsdann bedarf es nur der Inhaltsbestimmung des Dreieckes BDA und der Vergleichung desselben mit dem Inhalte des gegebenen Dreieckes ABC. Wird obiges Theilungsverhältniß beibehalten, und zeigt sich nun $\triangle BDA < \frac{\triangle ABC \cdot m}{m+n+o}$, so folgt hieraus, daß die Theilungslinie DE die Seite AB nicht schneidet. Man hat in diesem Falle zum $\triangle BDA$ das $\triangle DAE$ hinzuzufügen, dessen Höhe DN und Inhalt bekannt sind, daher es nur auf die Bestimmung der Basis AE dieses Dreieckes ankommt, deren Endpunkt E ein Punkt der gesuchten Theilungslinie ist, wozu die Formel

$$AE = \left(\frac{\triangle ABC \cdot m}{m+n+o} - \triangle BDA\right) \cdot \frac{2}{DN}$$

dient. Ebenso ergiebt sich die dritte Theilungslinie DG, zu deren Controle man nicht versäumen wird, den Theil BDGC des Dreieckes ABC, unabhängig von den vorigen beiden bereits erhaltenen Theilen ABDE und EDG, zu berechnen.

§. 122.

Aufgabe. Das Trapez ABCD Fig. 132 dergestalt in drei sich wie m : n : o verhaltende Theile zu theilen, daß die Theilungslinien den parallelen Seiten des Trapezes parallel sind.

Auflösung. Durch Construction ist dieser Forderung folgendermaßen zu entsprechen:

Ueber DC, d. i. der größeren Parallele des Trapezes, beschreibe man einen Halbkreis, ziehe durch einen der Endpunkte, etwa B, der kleineren Parallele AB eine Linie BE parallel zu AD bis zum Durchschnitt E mit DC, beschreibe mit DE den Bogen EF, welcher jenen Halbkreis in F schneidet, fälle aus F auf DC das Perpendikel GF, nehme auf GC

$$GH : HI : IC = m : n : o,$$

errichte aus H und I bezüglich die Perpendikel HK, IL bis zum Halbkreis, mache $DN = DK$, $DO = DL$, ziehe NP und OQ parallel zu AD, so sind die Durchschnitte P, Q dieser Parallelen mit BC Punkte der verlangten Theilungslinien PS und QR.

Beweis. Werden die Seiten AD und BC bis zu ihrem Durchschnitt M verlängert, auch die Geraden FC, KC und LC gezogen, dann hat man:

$$\triangle MAB \sim \triangle MSP \sim \triangle MRQ$$

und die Dreiecke DCF, DCK, DCL rechtwinklig. Folglich ist:

$$\overline{DF^2} : \overline{DC^2} = DG : DC$$

$$\overline{DK^2} : \overline{DC^2} = DH : DC$$

$$\overline{DF^2} : \overline{DK^2} = DG : DH, \text{ oder}$$

da $DF = DE = AB$ und $DK = DN = SP$

$$\overline{AB^2} : \overline{SP^2} = DG : DH$$

$$= \triangle MAB : \triangle MSP,$$

mithin

$$(\triangle MSP - \triangle MAB) : \triangle MAB = (DH - DG) : DG$$

$$ABPS : \triangle MAB = GH : DG.$$

Auf gleiche Art ergiebt sich:

$$ABQR : \triangle MAB = GI : DG.$$

Man hat daher ferner:

$$ABPS : ABQR = GH : GI$$

$$ABPS : (ABQR - ABPS) = GH : (GI - GH), \text{ d. i.}$$

$$ABPS : SPQR = GH : HI = m : n.$$

So fortfahrend, findet man:

$$ABPS : RQCD = GH : IC = m : o$$

$$SPQR : RQCD = HI : IC = n : o,$$

woraus

$$ABPS : SPQR : RQCD = m : n : o$$

hervorgeht.

Zusatz 1. Offenbar läßt auch diese Aufgabe mehrere Lösungen gleichzeitig zu, insofern die Aufeinanderfolge der Theile auf GC, nämlich der Stücke GH, HI und IC, mehrfach verändert werden kann, daher für einen bestimmten Fall die Folgeordnung der Theile ausdrücklich zu bezeichnen ist. Alsdann leuchtet ein, daß dieses Verfahren zur Eintheilung eines Trapezes in jede beliebige Anzahl Theile geeignet sei.

Zusatz 2. Um durch Rechnung der vorliegenden Forderung zu entsprechen, sei $DC = a$, $AB = b$, $SP = x$, $RQ = y$, und der Inhalt des Trapezes $ABCD = F$, dann ist:

$$\triangle MDC : \triangle MAB = a^2 : b^2$$
$$(\triangle MDC - \triangle MAB) : \triangle MAB = (a^2 - b^2) : b^2$$
$$ABCD : \triangle MAB = (a^2 - b^2) : b^2.$$

Eben so folgt:

$$ABPS : \triangle MAB = (x^2 - b^2) : b^2, \text{ daher}$$
$$ABCD : ABPS = (a^2 - b^2) : (x^2 - b^2)$$
$$= F : \frac{mF}{m+n+o}$$
$$= m+n+o : m, \text{ und}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{(a^2 - b^2)\,m + (m+n+o)\,b^2}{m+n+o}\right]} = \sqrt{\left[\frac{a^2 m + (n+o)\,b^2}{m+n+o}\right]}.$$

Ferner ist:

$$ABCD : ABQR = (a^2 - b^2) : (y^2 - b^2)$$
$$= F : \frac{F(m+n)}{m+n+o}$$
$$= m+n+o : m+n, \text{ hieraus}$$

$$y = \sqrt{\left[\frac{(a^2 - b^2)(m+n) + (m+n+o)\,b^2}{m+n+o}\right]}$$
$$= \sqrt{\left[\frac{(m+n)\,a^2 + o\,b^2}{m+n+o}\right]}.$$

Der Abstand h je zweier Parallelen, z. B. von AB und SP, ergiebt sich aus der Gleichung

$$(b+x)\frac{h}{2} = \frac{mF}{m+n+o} \text{ zu}$$
$$h = \frac{2\,mF}{(m+n+o)(b+x)}.$$

Unabhängig von der Größe x erhält man h durch folgende Betrachtung: Es sei ABCD Fig. 133 von der nämlichen Bedeutung der

Fig. 132, ebenso SP, BE und PN; dann mögen aus B, P bezüglich die Perpendikel BU, PV auf DC gefällt werden, worauf man hat, da $\triangle BEC \sim \triangle PNC$,

$$BU : PV = EC : NC \text{ oder}$$

$$(BU - PV) : BU = (EC - NC) : EC, \text{ d. i.}$$

$$h : H = (a - b) - NC : a - b,$$

sobald $BU = H$ gesetzt wird.

Hiernach ist $NC = \frac{(a - b)(H - h)}{H}$, mithin

$$SP = DC - NC = a - \frac{(a - b)(H - h)}{H} = \frac{bH + (a - b)h}{H},$$

und nun der Inhalt des Trapezes ABPS

$$= \frac{mF}{m + n + o} = \left[b + \frac{bH + (a - b)h}{H}\right]\frac{h}{2}, \text{ demnach}$$

$$h = \left[bH \pm \sqrt{\frac{(m + n + o)\, b^2 H^2 + 2\, mH\,(a - b)\, F}{m + n + o}}\right] \cdot \frac{1}{a - b}.$$

Der Abstand der beiden folgenden Parallelen SP und RQ ist auf dieselbe Weise zu berechnen, Behufs der Auftragung jedoch zu dem vorigen zu addiren und die Summe beider von einem festen Punkte der Trapezseite AB aus aufzutragen; eine besonders für die Praxis zu beachtende Rücksicht, indem nur allzuleicht durch Aneinandersetzung der einzelnen Parallelenabstände Fehler veranlaßt werden können, welche, falls die Parallelen beträchtliche Länge haben, zu um so größeren Irrungen führen.

§. 123.

Aufgabe. Ein beliebiges Viereck ABCD Fig. 134 in zwei sich wie m : n zu einander verhaltende Theile einzutheilen.

Auflösung. In dieser Fassung erscheint die Aufgabe als völlig unbestimmt, da der in ihr ausgesprochenen Bedingung auf vielerlei Weise Genüge geschehen kann. Hier werden wir nur bei einem einzelnen Falle verweilen, und zu diesem Ende durch A die Linie AH parallel zu DC ziehen, $DE : EC = AG : GH = m : n$ machen, hierauf EG und zuletzt GB ziehen, wodurch die Forderung erfüllt, d. h. das gegebene Viereck ABCD in zwei Figuren DABGE und EGBC zerlegt wird, deren Inhaltszahlen im bedungenen Verhältnisse m : n stehen. Soll die Trennung beider Theile durch eine einzige Gerade erfolgen, dann ziehe man EB und hierzu parallel GF, so ist F ein zweiter Punkt der gesuchten Theilungslinie, welche jetzt nur — nämlich EF — gezogen zu werden braucht.

Der Beweis kann leicht geführt, nicht minder die Forderung auf die Theilung in mehr als zwei Theile ausgedehnt werden; was den Rechnungsweg anlangt, so reicht es hin, den Inhalt des Dreieckes EBC zu berechnen, solchen von dem des gegebenen Viereckes ABCD abzuziehen und nun zuzusehen, welche Höhe FK das Dreieck EBF erhalten müßte, damit sein Inhalt den des Dreieckes EBC zum verlangten Theil EFBC ergänze. Hiernach ist:

$$\frac{n \,.\, ABCD}{m+n} = ECB + \frac{EB \,.\, FK}{2} \text{ und}$$

$$FK = 2\left[\frac{n \,.\, ABCD - (m+n)\, ECB}{(m+n)\, EB}\right].$$

Mittelst FK kann die Länge BF berechnet werden, welche jedoch auch, wenn zuvor das Perpendikel EM aus E auf AB gemessen worden ist, folgendermaßen sich ergiebt:

$$\frac{n \,.\, ABCD}{m+n} = ECB + \frac{FB \,.\, ME}{2}$$

$$FB = 2\left[\frac{n \,.\, ABCD - (m+n)\, ECB}{(m+n)\, ME}\right].$$

§. 124.

Aufgabe. Ein Viereck ABCD Fig. 135 in zwei sich wie m : n verhaltende Theile zu theilen, unter der Bedingung, daß die Theilungslinie durch den Eckpunkt A hindurchgeht.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale DB, nehme auf ihr DE : EB = m : n, ziehe AC und hierzu parallel EF, so ist F ein Punkt der gesuchten Theilungslinie AF.

Beweis. Werden die Geraden EA und EC gezogen, dann folgt:

$$DAE = \frac{m \,.\, DAB}{m+n}$$

$$DEC = \frac{m \,.\, DBC}{m+n}$$

$$DAE + DEC = \frac{m\,(DAB + DBC)}{m+n}, \text{ d. i.}$$

$$DAEC = \frac{m \,.\, ABCD}{m+n}, \text{ oder weil}$$

$$AEC = AFC,$$

$$DAFC = \frac{m.ABCD}{m+n}.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$ABF = \frac{n.ABCD}{m+n}, \text{ daher}$$

$$DAFC : ABC = m : n.$$

Zusatz 1. Wäre das Viereck in mehrere Theile einzutheilen gewesen, dann würde es blos darauf angekommen sein, DB dem bedungenen Theilungsverhältnisse gemäß einzutheilen, sonst aber wie vorhin zu verfahren.

Zusatz 2. Durch Rechnung würde sich der Punkt F ganz so wie bei der vorigen Aufgabe bestimmen lassen.

§. 125.

Aufgabe. Ein Viereck ABCD Fig. 136 dergestalt in zwei sich wie m : n verhaltende Theile zu theilen, daß die Theilungslinie der Seite AD parallel ist.

Auflösung. Man verlängere die Seiten AB, DC bis zu ihrem Durchschnitt E, verwandle das Viereck ABCD in das inhaltsgleiche Dreieck AFD, nehme auf dessen Basis DF, DK : KF = m : n, und trage die mittlere Proportionale für ED und EK von E aus nach G, ziehe GH parallel zu DA, so ist sie die geforderte Theilungslinie.

Beweis. Vermöge dieser Construction findet statt:

$$EAD \sim EHG$$

$$EAD : EHG = \overline{ED}^2 : \overline{EG}^2$$

$$\overline{EG}^2 = ED \,.\, EK$$

$$EAD : EHG = \overline{ED}^2 : ED \,.\, EK = ED : EK$$

$$EAD - EHG : EAD = ED - EK : ED$$

$$AHGD : EAD = DK : ED$$

$$AHGD = \frac{DK}{ED} \,.\, EAD, \text{ ferner}$$

$$EAD : ABCD = ED : FD$$

$$EAD = \frac{ED}{FD} \,.\, ABCD, \text{ daher}$$

$$AHGD = \frac{DK}{ED} \cdot \frac{ED}{FD} \,.\, ABCD = \frac{DK}{FD} \,.\, ABCD$$

$$= \frac{m.ABCD}{m+n}.$$

Ebenso folgt:

$$HBCG = \frac{n.ABCD}{m+n}, \text{ mithin}$$

$$AHGD : HBCG = m : n.$$

Zusatz 1. Für mehr als zwei Theile bedarf es nur der Eintheilung von DF in dem Theilungsverhältnisse entsprechende Stücke.

Zusatz 2. Durch Rechnung läßt sich dieser Aufgabe auf folgende Art genügen.

Der Inhalt des gegebenen Viereckes sei F, der des Dreieckes CBE = F', und die Linie DE durch Rechnung gefunden worden, dann ist:

$$DAE = F + F'$$

$$AHGD = \frac{m\,F}{m+n}$$

$$EGH = \frac{n\,F}{m+n} + F'$$

$$EAD \sim EHG$$

$$\overline{EG^2} : \overline{ED^2} = EHG : EAD = \left(\frac{n\,F}{m+n} + F'\right) : F + F'$$

$$= \frac{n\,(F + F') + mF'}{m+n} : F + F', \text{ daher}$$

$$EG = ED \sqrt{\left[\frac{n\,(F+F') + mF'}{(m+n)\,(F+F')}\right]}, \text{ und nun}$$

$$DG = DE - EG.$$

§. 126.

Aufgabe. Ein Viereck ABCD Fig. 137 dergestalt in drei, sich wie m : n : o verhaltende Theile zu theilen, daß die Theilungslinien durch einen innerhalb gegebenen Punkt H gehen und eine derselben die Gerade HB sei.

Auflösung. Das gegebene Viereck ABCD verwandle man in das Dreieck EBC, nehme auf EC die Theile EF : FG : GC = m : n : o, ziehe HF und hierzu parallel BN, dann HD und dazu parallel NK, nachher HK, so ist diese Gerade die zweite Theilungslinie. Ferner ziehe man HG und parallel dazu BM, endlich HM, d. i. die dritte der gesuchten Theilungslinien.

Beweis. Werden die Geraden BF, BG und HN gezogen, dann folgt:

$$ABFD = \frac{m\,.\,ABCD}{m+n+o} = ABHFD - BHF$$

$$= ABHFD - NHF$$

$$= ABHFD - DHF - NHD$$

$$= ABHD - NHD$$

$$= ABHD - DKH$$
$$= ABHK;$$ ferner ist

$$ABGD = \frac{(m+n)\,ABCD}{m+n+o} = ABHMD$$

$$ABGD - ABHK = KHMD = \frac{(m+n)\,ABCD}{m+n+o} - \frac{m.ABCD}{m+n+o}$$
$$= \frac{n.ABCD}{m+n+o},$$

$$\text{so auch } GBC = \frac{o\,.\,ABCD}{m+n+o} = MBC + MBG$$
$$= MBC + MBH = BHMC.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$ABHK : KHMD : BHMC = m : n : o.$$

Zusatz 1. Noch einfacher gestaltet sich das Verfahren und dessen Begründung, sobald die Theilungslinien nicht, wie in dem so eben dargelegten Falle, zwei Seiten, sondern nur eine einzige, nämlich DC Fig. 138, schneiden.

Zusatz 2. Durch Rechnung findet man zunächst die Lage der Theilungslinie HK, indem man vom Inhalte des ersten Theiles des gegebenen Viereckes, d. i. von $\frac{m.ABCD}{m+n+o}$ den Inhalt des Dreieckes ABC subtrahirt und den Rest durch die Hälfte der Länge des aus H auf AD zu fällenden Perpendikels dividirt, wodurch AK und somit die Lage der ersten Theilungslinie HK bestimmt wird. Anlangend die Lage des Punktes M, so kann diese auf mehrfache Weise ermittelt werden, z. B. dadurch, daß man von $\frac{o\,.\,ABCD}{m+n+o}$ den Inhalt des Dreieckes BHC subtrahirt und in den Rest mit der Hälfte von HC dividirt, wodurch die Länge eines, auf HC außerhalb des Dreieckes BHC zu errichtenden Perpendikels erhalten wird, durch dessen Endpunkt nur eine Parallele zu HC geführt zu werden braucht, um im Durchschnitt derselben mit DC den Punkt M zu erhalten.

Endlich bemerken wir noch, daß auch diese Aufgabe mehrere Lösungen gleichzeitig zuläßt, sobald über die Folgeordnung der Theile DF, FG und GC ein Beschluß nicht gefaßt worden ist.

§. 127.

Aufgabe. Ein Fünfeck ABCDE Fig. 139 so in zwei sich wie m : n verhaltende Theile einzutheilen, daß die Theilungslinie durch den gegebenen Punkt K hindurchgeht.

Auflösung. 1. Durch Construction. Man verwandele das gegebene Fünfeck in das inhaltsgleiche Dreieck EAG, theile dessen Basis EG dergestalt, daß EH : HG = m : n ist, ziehe KA und parallel dazu HM bis zum Durchschnitt K mit der verlängerten Seite AB; ziehe ferner KB und hierzu parallel MN, so ist N ein Punkt der verlangten Theilungslinie KN, folglich diese bestimmt.

Beweis. Zieht man noch KM, so findet statt:

$$EAH = \frac{m}{m+n} \cdot ABCDE = EAK + KAH$$
$$= EAK + KAM = EAK + KAB + KBM$$
$$= EAK + KAB + KBN$$
$$= EABNK.$$

Hieraus folgt:

$$KNCD = ABCDE - EABNK = ABCDE - \frac{m}{m+n} \cdot ABCDE$$
$$= \frac{n}{m+n} \cdot ABCDE,$$

daher ist

$$EABNK : KNCD = \frac{m}{m+n} \cdot ABCDE : \frac{n}{m+n} \cdot ABCDE = m : n$$

der Forderung gemäß.

2. Durch Rechnung. Es sei der Flächeninhalt des gegebenen Fünfeckes ABCDE Fig. 140 = F, und KN wiederum die fragliche Theilungslinie, dann ergiebt sich, wenn KP das Perpendikel aus K auf BC vorstellt:

$$\frac{nF}{m+n} - KCD = KNC = \frac{KP \cdot NC}{2}$$

$$\text{und hieraus } NC = 2\left[\frac{nF - (m+n)KCD}{(m+n)KP}\right],$$

wodurch der Punkt N und mit diesem die Theilungslinie KN bestimmt wird.

Zusatz. Auch diese Forderung läßt, je nach der Folgeordnung der Theile EH und HG, gleichzeitig zwei Lösungen zu, so wie jede beliebige Erweiterung Behufs der Eintheilung des Fünfeckes in drei und mehrere Theile. Nicht minder eignet sich dieses Verfahren zur Eintheilung eines Sechs-, Siebeneckes u. s. w. im nämlichen Sinne.

§. 128.

Eine besonders oft vorkommende Forderung pflegt darin zu bestehen, ein Polygon oder eine krummlinige Figur dergestalt in Theile von bedungenem Verhältniß einzutheilen, daß die Theilungslinien untereinander und einer gegebenen Geraden parallel sind. Stets beschränkt sich dann das Verfahren darauf, die Figur in Trapeze zu zerlegen, deren parallele Seiten der gegebenen Geraden parallel sind, und zuzusehen, wie viel dem einen oder dem anderen Trapeze hinzuzufügen oder nach Befinden davon wegzunehmen sei, um der verlangten Theilung zu entsprechen. Sind nun schon die für diesen Fall oben angegebenen und durch Fig. 132 dargestellten Constructionen theoretisch völlig richtig, so ist doch nicht zu läugnen, daß, weil dabei der Erfolg vorzüglich von der Fertigkeit des Zeichners abhängt, sehr leicht nicht zu übersehende Irrungen herbeigeführt werden können, abgesehen von der praktischen Unthunlichkeit derselben. Daher sucht man diese Constructionen in wichtigen Fällen auf ein Minimum herabzubringen, was freilich nur unter Benutzung des Rechnungsweges möglich ist.

Wird mit Hinsicht auf Fig. 132 und 133 $IC = o$ gesetzt, also die dort ausgesprochene Forderung dahin beschränkt, das Trapez ABCD in zwei sich wie $m : n$ verhaltende Theile zu zerlegen, dann geht die Formel zur Höhenbestimmung des Trapezes ABPS, d. i. zur Bestimmung von h, in folgende über:

$$h = \left[-bH + \sqrt{\frac{(m+n)\,b^2H^2 + 2m\,HF\,(a-b)}{m+n}} \right] \cdot \frac{1}{a-b}$$

$$= \left[-bH + \sqrt{\frac{H\,((m+n)\,b^2H + 2m\,F\,(a-b))}{m+n}} \right] \cdot \frac{1}{a-b}$$

deren Benutzung an einem Beispiele gezeigt werden möge.

Beispiel. Das Polygon ABC . . . I Fig. 141 dergestalt in drei sich wie $3 : 2 : 1$ verhaltende und in dieser Ordnung von A aus aufeinanderfolgende Theile einzutheilen, daß die Theilungslinien der gegebenen Geraden PQ parallel sind.

Durch die Eckpunkte des Polygons habe man Parallelen zu PQ gezogen und, um deren Abstände zu messen, eine Rechtwinklige Ap zu denselben, auch bereits mittelst directer Messung nach irgend einem Maße gefunden:

Ac = 0,24	Bk = 0,75
Ad = 0,51	Il = 1,33
Ae = 0,64	Ct = 1,51
Af = 1,20	Hu = 2,00
Ag = 1,63	Dx = 2,16
Ah = 2,00	Gv = 1,99
Ai = 2,64	Ew = 1,22
Ap = 3,01,	

woraus als Gesammtinhalt des gegebenen Polygons die Zahl 4,453 hervorgeht, und sonach

auf den ersten Theil	2,226	Flächeneinheiten,	
= = zweiten =	1,484	=	
= = dritten =	0,742	=	

kommen. Es beträgt aber der Inhalt des Stückes ABC u HI nur 1,538 □ Einheiten, weswegen vom Trapez uDxH noch 2,226 — 1,538 = 0,688 □ Einheiten hinzuzufügen sind. Werden letztere dem 0,894 betragenden Inhalte des Trapezes uDxH entzogen, so bleibt als Rest 0,206. Demnach verhalten sich die Inhalte der zwei Theile dieses Trapezes wie 0,688 : 0,206 = 3,34 : 1 = m : n. Folglich ist mit Bezug auf die voranstehende Formel für h, m = 3,34, n = 1. Ueberdies hat man F = 0,894, H = 0,43, a = 2,16 und b = 2, demnach für die Entfernung fz = h der ersten Theilungslinie RS von uH durch Substitution den Ausdruck:

$$h = \left[-2 . 0{,}43 + \sqrt{\frac{0{,}43\,(3{,}34+1)\,2^2 . 0{,}43 + 2 . 3{,}34 . 0{,}894\,(2{,}12-2}{3{,}34+1}} \right] \times \frac{1}{2{,}16-2}$$

$$= \left[-0{,}86 + \sqrt{\frac{0{,}43\,(7{,}467+0{,}956}{4{,}34}} \right] \frac{1}{0{,}16}$$

$$= \left[-0{,}86 + \sqrt{0{,}8313} \right] \frac{1}{0{,}16} = [-0{,}86 + 0{,}91] \frac{1}{0{,}16}$$

$$= 0{,}312 \ldots$$

Zur Prüfung ist die Länge der Theilungslinie selbst zu berechnen, wofür vermöge des Vorangegangenen stattfindet:

$$RS = \frac{bH + (a-b)\,h}{H} = \frac{2 . 0{,}43 + (2{,}16-2) . 0{,}312}{0{,}43}$$

$$= 2{,}116 \ldots$$

Die zweite Theilungslinie TU ergiebt sich, indem man die beiden

ersten Theile zusammenfaßt und untersucht, wie viele der Trapeze zur Erfüllung des Inhalts beider Theile zu nehmen sind, sonst aber wie vorhin verfährt; oder von der entgegengesetzten Seite des Polygones ausgehend, die Begrenzung des dritten Theiles ermittelt, welche letztere Bestimmungsart im Folgenden dargelegt worden ist.

Für den Inhalt des Dreieckes EwF findet man in Folge der oben aufgezeichneten Dimensionen des Polygones die Zahl 0,225, für den des Trapezes EwGv 1,027, daher zur Vervollständigung des dritten, 0,742 □Einheiten betragenden Theils ein Trapez EwUT von 0,517 Inhalt hinzuzufügen ist. Wird dieser Inhalt von dem des Trapezes EwGv abgezogen, dann bleibt der Inhalt des Trapezes vTUG übrig, nämlich 0,510, so daß nun ist:

$$EwUT : TUGv = 0{,}517 : 0{,}510 = 1{,}01 : 1 = m : n.$$

Um daher vermittelst obiger Formel den Abstand $iq = h$ der dritten Theilungslinie von Ew zu berechnen, setze man $m = 1{,}01$, $n = 1$, $F = 1{,}027$, $H = 0{,}64$, $a = 1{,}99$, $b = 1{,}22$ und hat nun:

$$h = \left[-1{,}22 \,.\, 0{,}64 + \sqrt{\frac{0{,}64\,(2{,}01 \,.\, 1{,}22^2 \,.\, 0{,}64 + 2{,}02 \,.\, 1{,}027 \,.\, 0{,}77}{2{,}01}}\right] \times \frac{1}{0{,}77}$$

$$= (-0{,}78 + \sqrt{1{,}1247}) \,.\, \frac{1}{0{,}77} = (-0{,}78 + 1{,}06) \,.\, \frac{1}{0{,}77}$$

$$= \frac{4}{11} = 0{,}363 \ldots$$

Auch die Länge dieser Theilungslinie ist der Bestätigung wegen zu berechnen, und man hat dafür:

$$TU = \frac{bH + (a - b)h}{H} = \frac{1{,}22 \,.\, 0{,}64 + (1{,}99 - 1{,}22) \,.\, 0{,}363 \ldots}{0{,}64}$$

$$= \frac{1{,}0609}{0{,}64} = 1{,}657 \ldots$$

Von selbst muß jetzt das zwischen beiden Theilungslinien RS und TU enthaltene Stück RDTUGS des gegebenen Polygones dem zweiten der verlangten Theile, demnach der Inhaltszahl 1,484 entsprechen.

Zunächst ist der Inhalt des Trapezes $DvGx = 0{,}767 \ldots$, sodann der des Trapezes SRDx

$$= \frac{RS + Dx}{2} \,.\, gz = \frac{2{,}11 + 2{,}16}{2} \,.\, 0{,}11 = 0{,}234 \ldots \text{ und}$$

$$vTUG = \frac{vG + TU}{2} . hq = \frac{1{,}99 + 1{,}65}{2} . 0{,}27 = 0{,}491 ..$$

Die Summe dieser drei Inhaltszahlen ist 1,492, mithin um 0,008 zu groß; es fragt sich nun, ob der zur vollzogenen Theilung Anlaß gebende Fall eine solche Ueberschreitung gestattet, oder ob durch genaueres Abnehmen und Auftragen der Dimensionen — als der hierbei möglichen Fehlerquellen — die Differenz noch beträchtlicher herabzubringen sei.

Zusatz. Für eine krummlinige Figur ändert sich das Theilungsverfahren im Wesentlichen nicht, indem vorerst Behufs der Inhaltsbestimmung eine Zerlegung der Figur in mehr oder weniger breite Streifen erfolgt, so daß die zwischen je zwei Parallelen enthaltenen Stücke der krummen Linie mit Geraden verwechselt werden können, worauf die Theilungslinien wie beim Polygone zu ermitteln sind.

§. 129.

Aufgabe. Ein Polygon ABCDE Fig. 142 wird durch die Linienfolge GF, GH, HI in zwei Theile getheilt; es soll die Grenze beider Theile durch eine einzige Gerade FL dargestellt werden.

Auflösung. a. Durch Construction. Man ziehe GI und hierzu parallel HK, hierauf GK, so ist $\triangle$ GIH = $\triangle$ GIK, daher GK als Ersatz für die Grenzlinien GH und HI erscheint. Nun ziehe man FK und parallel dazu GL, zuletzt FL, dann stellt diese die gesuchte Theilungslinie dar, denn es ist vermöge der Construction $\triangle$ FLK = $\triangle$ FGK.

b. Durch Rechnung. Dafür ziehe man irgend eine, die verlangte Grenzlinie einstweilen vorstellende Gerade, etwa FI Fig. 143, und sehe zu, in wie fern diese sich der wirklichen Linie FL nähert, d. h., wie viel hierdurch dem einen Theile entzogen und dem anderen hinzugefügt worden ist, was nur durch Inhaltsbestimmung der Dreiecke FGH und NIH erkannt werden kann. Aus der Differenz beider Dreiecke geht hervor, welcher Betrag dem einen Theile anzuschließen sei, damit beide Theile ihre ursprüngliche Größe behalten.

Wird FNH — NIH = D gesetzt, dann läßt sich D in Gestalt eines, IF zur Basis und $\frac{IF . D}{2}$ zur Höhe habenden Dreieckes darstellen, dessen Höhe IM nur von irgend einem Punkte der Basis FI, etwa von I aus, aufgetragen zu werden braucht. Endlich ist durch M eine Parallele zu IF zu führen, so zeigt deren Durchschnitt L mit BC einen Punkt der geforderten Theilungslinie an.

Beispiel. Es sei FI = 1,78, FN = 1,32, das Perpendikel aus G auf FI, nämlich GR = 0,38, und das aus H, d. i. HP = 0,08, dann folgt:

$$FNH = \frac{FN \,.\, GR}{2} = \frac{1{,}32 \,.\, 0{,}38}{2} = 0{,}2508$$

$$NIH = \frac{NI \,.\, HP}{2} = \frac{0{,}46 \,.\, 0{,}08}{2} = 0{,}0184$$

$$D = FNH - NIH = 0{,}2324$$

$$IM = \frac{FI \,.\, D}{2} = \frac{1{,}78 \,.\, 0{,}2324}{2} = 0{,}206\ldots$$

Zusatz 1. Wären die benachbarten beiden Stücke des Polygons ABCDE Fig. 144 durch eine krumme Linie FPQI von einander getrennt, und sollte diese Grenze regulirt, d. h. in eine Gerade verwandelt werden, welche durch den Punkt F hindurch ginge, dann dient hierzu folgendes Verfahren.

Man ziehe FI, berechne die Inhalte der zwei Figuren IKQ und FKP, bestimme deren Differenz und setze je nach Erforderniß an die eine oder die andere Seite von FI ein Dreieck an, dessen Inhalt jener Differenz gleichkommt und welches FI zur Basis hat. Um dies zu können, ist die Höhe dieses Dreieckes zu berechnen, welche wie vorhin durch Multiplication der Differenz beider Figuren mit der halben Basis FI erhalten und auf IF etwa in K aufgetragen wird. Durch den Endpunkt N dieses Perpendikels KN ist eine Parallele NL mit FI zu ziehen und der Durchschnitt L derselben mit BC mit dem Punkte F durch eine Gerade zu verbinden, dann stellt diese die verlangte Theilungslinie dar.

Beispiel. Es sei FI = 1,78, ferner IK in 10 gleiche Theile getheilt worden, deren zufällig 6 auf KF kommen. Aus den Theilpunkten habe man Ordinaten errichtet, deren Längen gemessen und gefunden:

$a_2 = 0{,}12$	$b_2 = 0{,}15$
$a_3 = 0{,}18$	$b_3 = 0{,}31$
$a_4 = 0{,}19$	$b_4 = 0{,}41$
$a_5 = 0{,}17$	$b_5 = 0{,}47$
$a_6 = 0{,}10$	$b_6 = 0{,}48$
	$b_7 = 0{,}46$
	$b_8 = 0{,}41$
	$b_9 = 0{,}33$
	$b_{10} = 0{,}20.$

Da hiernach der Abstand je zweier Ordinaten $\frac{1,78}{16} = 0,11125$ beträgt, so folgt, der Simpson'schen Regel gemäß:

$$IKQ = \frac{0,11125}{3}\Big[4\,(0,15 + 0,41 + 0,48 + 0,41 + 0,20) + 2\,(0,31 + 0,47 + 0,46 + 0,33)\Big]$$

$$= \frac{0,11125}{3}\Big[4\,.\,1,25 + 2\,.\,1,57\Big] = 0,30185\,\ldots$$

$$FKP = \frac{0,11125}{3}\Big[4\,(0,12 + 0,19 + 0,10) + 2\,(0,18 + 0,17)\Big]$$

$$= \frac{0,11125}{3}\Big[4\,.\,0,41 + 2\,.\,0,35\Big] = 0,08677\,\ldots$$

$$IKQ - FKP = 0,30185\,\ldots - 0,08677\,\ldots = 0,21508\,\ldots$$

$$KN = \frac{IKQ - FKP}{2}\,.\,FI = \frac{0,21508\,.\,1,78}{2} = 0,19142\,\ldots$$

Die Construction der Parallele NL kann dadurch vermieden und die unmittelbare Auftragung der Länge IL möglich gemacht werden, daß man aus F ein Perpendikel auf BC fällt, nämlich FS, und dessen Länge bestimmt. Gesetzt, es sei FS = 1,71 gefunden worden, dann ist:

$$IL = \frac{IKQ - FKP}{2}\,.\,FS = \frac{0,21508\,.\,1,71}{2} = 0,1838\,\ldots$$

Zusatz 2. Selten ist die Grenze zweier Bodenflächen nach einem bestimmten Gesetze gekrümmt, z. B. aus Kreisbogen oder anderen Curven zusammengesetzt; vorkommenden Falles könnte man dann bei Regulirung derselben auf das Krümmungsgesetz Rücksicht nehmen, wenn anders auch hierbei der so eben gezeigte Weg nicht vorgezogen werden sollte.

§. 130.

Complicirter gestaltet sich das Theilungsgeschäft, sobald außer dem Areale zugleich die Qualität oder Bonität des Bodens in Betracht kommt, wie aus folgender Aufgabe erhellen wird.

Aufgabe. Ein Viereck ABCD Fig. 145 besteht aus den zwei Stücken ABFE und EFCD, wovon die Einheit des ersten den Werth oder die Bonität g, die des zweiten den Werth G hat, während die Inhalte beider Stücke beziehungsweise den Größen a und A entsprechen. Man soll vom Punkte H aus eine Grenze ziehen, derge-

stalt, daß durch dieselbe das gegebene Viereck in zwei sich wie m : n verhaltende Theile zerlegt wird.

Auflösung. Bezeichnet w den Werth des Stückes ABFE, W den von EFCD, dann ist:

$$w = a \cdot g$$
$$W = A \cdot G,$$

und nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung

$$\text{der Betrag des ersten Theiles} = \frac{w + W}{m + n} \cdot m$$
$$\text{" " " " " } = \frac{w + W}{m + n} \cdot n.$$

Kommen nun auf den ersten Theil x Flächeneinheiten von der Bonität g und y Einheiten von der Bonität G, so hat man für den Werth des ersten Theiles

$$\frac{m}{m + n}(w + W) = x \cdot g + y \cdot G, \text{ d. i.}$$
$$\frac{m}{m + n} \cdot w + \frac{m}{m + n} \cdot W = x \cdot g + y \cdot G, \text{ oder}$$
$$\frac{m}{m + n} \cdot a \cdot g + \frac{m}{m + n} \cdot A \cdot G = x \cdot g + y \cdot G.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{m}{m + n} \cdot a, \quad y = \frac{m}{m + n} \cdot A.$$

Beispiel. Es sei ABFE = 110,70 Flächeneinheiten,
" " EFCD = 191,52 "
und das Verhältniß der Bonitäten beider Stücke = 5 : 2. Man soll das Viereck vom Punkte H aus in zwei sich wie 2 : 3 verhaltende Theile theilen.

Hiernach gehen auf den ersten Theil Flächeneinheiten

von der Bonität 5 ... $x = \frac{2}{2 + 3} \cdot 110{,}70 = 44{,}28$

" " " 2 ... $y = \frac{2}{2 + 3} \cdot 191{,}52 = 76{,}608.$

Um diese Inhalte von den betreffenden beiden Stücken des gegebenen Viereckes ABCD abzuschneiden, ziehe man HE und berechne den Inhalt des Dreieckes HDE, welcher 41,14 betragen mag. Zur Erfüllung von y Einheiten von der Bonität 2 sind sonach 76,608 — 41,14 = 35,468 Einheiten derselben Art erforderlich, welche in Gestalt eines Dreieckes anzuschließen sind, dessen eine Seite HE ist, und dessen Grundlinie von E aus in die Linie EF hineinfällt. Hierzu bedarf

es nur der Construction eines Perpendikels von K auf EF und der Messung desselben. Die Länge dieses Perpendikels sei = 9,3, dann ist die Basis EK des anzufügenden Dreieckes HEK

$$\frac{2 \,.\, HEK}{9,3} = \frac{2 \,.\, 35,468}{9,3} = 7,62.$$

Durch Auftragung dieser Länge von E aus auf EF ergiebt sich der Punkt K, und mit ihm die erste zur fraglichen Grenze gehörige Gerade HK.

Ebenso ergiebt sich die Fortsetzung dieser Grenze im oberen Stücke EABF von der Bonität 5. Zuerst wird KA gezogen und aus den Dimensionen des Dreieckes KEA dessen Inhalt berechnet, welcher = 9,2 sein möge, dann wiederum die Erfüllung dieses Inhaltes zum Antheil x, nämlich 44,28 — 9,2 = 35,08 in Gestalt eines sich an AK anschließenden Dreieckes angesetzt, dessen Grundlinie mit AB zusammenfällt. Ist nun die Länge des Perpendikels aus K auf AB = 5,5, dann folgt für die Basis dieses Dreieckes

$$AN = \frac{2 \,.\, 35,08}{5,5} = 12,75.$$

Daraus ergiebt sich die Lage des Punktes N und somit KN, d. i. die zweite zur verlangten Grenze HKN gehörige Gerade, welche Grenze durch Rechnung in eine einzige Gerade verwandelt werden kann.

Zusatz. Die Theilung des Viereckes ABCD kann, dem bedungenen Theilungsverhältnisse m : n gemäß, auf mancherlei Weise erfolgen, z. B. so, daß auf den einen Theil nur Boden einer einzigen Qualität kommt, oder die Theilungslinie einer der Vierecksseiten parallel läuft u. dgl. m. Welche Voraussetzungen aber auch stattfinden mögen, immer werden dem Verfahren die Relationen w = a . g und W = A . G zum Grunde zu legen sein. Auch lassen dieselben weitere Ausbildung in Bezug auf drei und mehrere Theile zu.

Aus denselben folgt der für die ökonomische Theilung merkwürdigste Satz, daß sich die Werthe zweier Bodenflächen zu einander verhalten, wie die Producte aus den Arealen derselben in ihren Bonitäten. Daraus gehen andere ebenfalls wichtige Sätze hervor, z. B. daß sich die Areale zweier Bodenflächen von einerlei Werth indirect wie deren Bonitäten verhalten u. s. w. Am gegenwärtigen Orte müssen wir uns jedoch mit diesen Andeutungen begnügen, und bemerken nur noch, daß den Geometer beim Theilungsgeschäft die Bodenkunde wesentlich unterstützt, wenn anders derselbe nicht gänzlich von den Aussprüchen des Oekonomen abhängig sein soll.

§. 131.

Zusätze und Bemerkungen über einige der wichtigsten, bei Ausführung voranstehender Operationen und Rechnungen vorkommenden Fehler.

Welchen Irrungen man beim Messen gerader Linien ausgesetzt sei, dies haben wir in den Paragraphen 31 bis 35 dargethan. Noch ist aber zu zeigen übrig, was für Folgen diese Irrungen nach sich ziehen, wobei wir uns jedoch nur auf den Einfluß beschränken werden, welchen dieselben auf die Inhaltsbestimmung ebener Figuren äußern.

Erster Fall. Behufs der Inhaltsbestimmung des Rechteckes ABCD Fig. 146 mögen dessen Seiten gemessen worden sein, und habe man $AB = DC = a$, $AD = BC = b$ gefunden, bei Bestimmung von AB jedoch einen Fehler $BH = u$, und bei BC einen Fehler $BF = v$ begangen, nämlich beide Rechtecksseiten bezüglich um die Beträge u und v zu groß oder zu klein angegeben, so daß nun die fehlerhaften Seiten sind:

$$a \pm u$$
$$b \pm v.$$

Bezeichnet F den wahren und I den durch unrichtige Seitenbestimmung entstehenden Fehler, dann ist:

$$F \pm I = (AB \pm BH)(BC \pm BF)$$
$$= (a \pm u)(b \pm v) = ab \pm bu \pm av \pm uv,$$

und wenn hiervon $F = ab$ subtrahirt wird:

$$\pm I = \pm bu \pm av \pm uv.$$

Da jedoch u und v den Seiten a und b proportional gesetzt werden können, etwa $u = \frac{a}{n'}$, $v = \frac{b}{n'}$, so folgt:

$$\pm I = \pm b \cdot \frac{a}{n} \pm a \cdot \frac{b}{n} \pm \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n'}, \text{ d. i.}$$

$$\pm I = \pm \frac{ab}{n} \pm \frac{ab}{n} \pm \frac{ab}{n^2}.$$

Bei sorgfältiger Messung wird n sehr groß sein, desto größer also auch n^2, daher der Bruch $\frac{ab}{n^2}$ ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden kann, wodurch erhalten wird:

$$I = \frac{2\,ab}{n} = \frac{2\,F}{n} = \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot F.$$

Hieraus folgt:

$$I : F = 2 : n, \text{ d. h.}$$

der Fehler des Inhalts ist dem Producte aus dem wahren Inhalte und dem doppelten linearen Fehler gleich. Dieser Satz findet seine Bestätigung, was immer für eine ebene Figur betrachtet werden mag.

Beispiel. Bei Ausmessung eines Rechteckes möge die eine Seite zu 14,3, die andere zu 7 gefunden worden sein, so ist, wenn die Sicherheit des Messens auf 0,2 Procent angeschlagen wird, der hierbei begangene Fehler

$$= \frac{1}{500} \cdot 2 \cdot F = \frac{F}{250}, \text{ daher}$$

$$F \pm \frac{F}{250} = 14{,}3 \cdot 7.$$

Hieraus ergiebt sich, je nachdem der Fehler additiv oder subtractiv genommen wird, der Inhalt des Rechteckes zu 99,701 oder 100,050, wofür als das wahrscheinlichste das arithmetische Mittel, nämlich 99,875 anzusehen ist, während, wäre kein Messungsfehler begangen worden, der wahre Inhalt des Rechteckes 100,1 betragen haben würde.

§. 132.

Zweiter Fall. Die wirklichen Längen der parallelen Seiten eines Trapezes mögen durch a und b, ihr Abstand durch h, und der wahre Inhalt des Trapezes durch F bezeichnet werden. Bei Bestimmung dieser Dimensionen habe man jedoch beziehungsweise die Fehler $\pm u$, $\pm v$, $\pm w$ begangen und in Folge dessen eine Inhaltsunsicherheit im Betrage von $\pm I$ herbeigeführt. Demgemäß findet statt:

$$F \pm I = (a \pm u + b \pm v) \cdot \frac{h \pm w}{2}$$

$$= (ah \pm hu + bh \pm hv \pm aw + uw \pm bw + vw) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h \pm \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot w \pm \left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot h + \frac{uw+vw}{2}$$

und wenn hiervon der wahre Flächeninhalt $F = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h$ abgezogen wird:

$$\pm I = \pm \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot w \pm \left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot h \pm \frac{uw+vw}{2}.$$

Setzt man im ersten Falle die Fehler den Längen proportional, etwa $u = \frac{a}{n}$, $v = \frac{b}{n}$, $w = \frac{h}{n}$, dann ist:

$$\pm I = \pm \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{h}{n} \pm \left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{h}{n} \pm \left(\frac{ab+bh}{2}\right) \frac{1}{n^2}$$

oder mit Hinweglassung des letzten Gliedes

$$I = \left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{h}{n} + \left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{h}{n} = \left(\frac{a+b}{2}\right) h \cdot \frac{2}{n} = \frac{2F}{n},$$

daher als fernere Bestätigung für den oben ausgesprochenen Satz

$$I : F = 2 : n.$$

Beispiel. Für die Quadratelle eines trapezförmigen Bauplatzes werden 20 Neugroschen geboten. Zu dem Ende wird derselbe mittelst einer Meßkette vermessen, und da ergeben sich für die parallelen Seiten $102\frac{1}{2}$ und $89\frac{3}{4}$ Ellen, und deren Abstand $49\frac{1}{4}$ Ellen. Es soll hiernach der Preis des Platzes bestimmt werden.

Setzen wir den Bauplatz in sehr ebenem Terrain liegend voraus, so ist aus Erfahrung bekannt, daß dafür die Genauigkeit der directen Kettenmessung $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{2000}$ der Länge der gemessenen Linien beträgt, anstatt welcher bei den Angaben $\frac{1}{1500}$ gelten mag.

Alsdann ist:

$$F \pm I = F \pm \frac{2F}{n} = F \pm \frac{2F}{1500} = \left(\frac{102\frac{1}{2} + 89\frac{3}{4}}{2}\right) \cdot 49\frac{1}{4}$$

$$= 4734\frac{5}{32} = 4734{,}15625 \text{ □ Ellen,}$$

und hiernach $F = 4727{,}85244$ oder $= 4740{,}48189$.

Wird nun angenommen, daß die Längen um eben so viel zu groß als zu klein gefunden wurden, so würde der wahrscheinlichste Inhalt das arithmetische Mittel aus beiden Rechnungsergebnissen = 4734,16717 □ Ellen sein, was, wäre beim Messen kein Fehler begangen worden, erst 0,0002 Procent beträgt. Der fragliche Preis des Platzes ist daher $= 4734{,}16717 \cdot \frac{2}{3} = 3156{,}11144$ Thaler, und hierbei die Unsicherheit 18,936 ... oder ca. 19 Neugroschen, welche in den meisten Fällen gänzlich vernachlässigt werden kann.

§. 133.

Dritter Fall. Die wahren Längen der drei Seiten eines Dreieckes mögen a, b, c, und dessen Inhalt F sein. Statt dieser Längen habe man bezüglich $a \pm u$, $b \pm v$, $c \pm w$ erhalten und sei hierdurch einer Inhaltsirrung $= \pm I$ ausgesetzt. Demgemäß bestimmt sich die Größe dieser Irrung folgendermaßen.

Da hier, wie oben, die Fehler beim Messen der Längen diesen selbst proportional angenommen werden können, so sei $u = \frac{a}{n'}$, $v = \frac{b}{n'}$, $w = \frac{c}{n}$, dann ist:

$$F \pm I = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(a \pm \frac{a}{n} + b \pm \frac{b}{n} + c \pm \frac{c}{n}\right)\left(a \pm \frac{a}{n} + b \pm \frac{b}{n} - c \mp \frac{c}{n}\right)}$$
$$\times \sqrt{\left(a \pm \frac{a}{n} - b \mp \frac{b}{n} + c \pm \frac{c}{n}\right)\left(b \pm \frac{b}{n} + c \pm \frac{c}{n} - a \mp \frac{a}{n}\right)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[\frac{(a+b+c)(n \pm 1)}{n} \cdot \frac{(a+b-c)(n \pm 1)}{n} \cdot \frac{(a-b+c)(n \pm 1)}{n}\right.}$$
$$\left. \times \sqrt{\frac{(b+c-a)(n \pm 1)}{n}}\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\right]} \cdot \left(\frac{n \pm 1}{n}\right)^2,$$

daher

$$(F \pm I) : F = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\right]}$$
$$\times \left(\frac{n \pm 1}{n}\right)^2 : \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\right]}$$
$$= \left(\frac{n \pm 1}{n}\right)^2 : 1 = \frac{n^2 \pm 2n + 1}{n^2} : 1.$$

Da n möglichst groß sein soll, so kann ohne merklichen Fehler geschrieben werden:

$$F \pm I : F = \frac{n^2 \pm 2n}{n^2} : 1 = 1 \pm \frac{2}{n} : 1 \text{ oder}$$
$$F \pm I - F : F = 1 \pm \frac{2}{n} - 1 : 1, \text{ d. i.}$$
$$I : F = 2 : n,$$

woraus, wie bei den vorigen Fällen,

$$I = \frac{2F}{n} \text{ hervorgeht.}$$

Beispiel. In sehr unebenem Terrain mögen die drei Seiten eines Dreieckes gemessen und zu 20, 24 und 32 Landesruthen durch directe Kettenmessung befunden worden sein. Es soll die hieraus hervorgehende Unsicherheit im Flächeninhalte dieses Dreieckes ermittelt

werden, da man aus Erfahrung weiß, daß für dergleichen Terrain die Genauigkeit $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{1000}$ der Länge der gemessenen Linien beträgt.

Nach Obigem ist:

$$F \pm I = F \pm \frac{2F}{n}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(20+24+32)(20+24-32)(20-24+32)(24+32-20)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{76 \,.\, 12 \,.\, 28 \,.\, 36} = 12\sqrt{399} = 239{,}699, \text{ oder}$$

$$F \pm \frac{2F}{500} = 239{,}699, \text{ sobald } n = 500 \text{ gesetzt wird.}$$

Daraus folgt $F = 238{,}744$, oder 240,660 □Ruthen, also der wahrscheinlichste Inhalt des Dreieckes

$$= \frac{238{,}744 + 240{,}660}{2} = 239{,}752 \text{ □Ruthen,}$$

wovon der den angegebenen Dimensionen entsprechende Inhalt um 239,752 — 239,699 = 0,053 abweicht, was einer Irrung von 0,0221 Procent gleich kommt.

Da nun ein Scheffel Land 150 Quadrat-Landesruthen beträgt, ein Scheffel aber in 16 Metzen zerfällt, so würde die fragliche Unsicherheit in der Angabe des Dreiecksinhaltes 0,00035 Scheffel = 0,0056 Metzen sein.

§. 134.

In ähnlicher Weise würden wir fortfahren können, die Richtigkeit des in §. 131 aufgestellten Satzes darzuthun, wir wollen uns jedoch mit den angeführten Fällen begnügen, wenn zuvor die nämliche Betrachtung auf die Kreisfläche ausgedehnt sein wird. Sei r der Halbmesser und F der Flächeninhalt eines Kreises, sowie I die Größe der Unsicherheit in der Angabe dieses Inhaltes, welche dadurch herbeigeführt sein mag, daß man den Halbmesser um seinen nten Theil unrichtig genommen hat. Alsdann ist:

$$F \pm I = \left(r \pm \frac{r}{n}\right)^2 . \pi$$

$$= \left(r^2 \pm \frac{2r^2}{n} + \frac{r^2}{n^2}\right) . \pi$$

$$= r^2\pi \pm \frac{2r^2\pi}{n},$$

sobald das mit dem Nenner n^2 behaftete Glied außer Acht gelassen wird.

Subtrahirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung $F = r^2\pi$, dann bleibt

$$I = \frac{2r^2\pi}{n} = \frac{2F}{n}$$

übrig, demnach immer wieder

$$I : F = 2 : n.$$

§. 135.

Würdigung der aus dem Gebrauche der Visir- oder Anschlagnadel entstehenden Fehler. Bereits in §. 87 wurde auf die Mängel der Visirnadel aufmerksam gemacht, inzwischen nur überhaupt; die Wichtigkeit der durch dieses Hülfswerkzeug entstehenden unvermeidlichen Fehler erheischt jedoch, den Gegenstand einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

M und N Fig. 147 mögen in vergrößertem Maße die Querschnitte der, zwei Standpunkte des Meßtisches bezeichnenden Visirnadel bedeuten, a und b deren Mittelpunkte, aP′, bP″ die hypothetischen, zum Objecte P gedachten Visirlinien. Dann wird man berechtigt sein, diesen parallel die wirklichen Visirlinien ct, dn, c′m und d′t längs ihrer Ausdehnung auf der Planchette anzunehmen und, je nachdem die Kante des Diopterlineals für beide Nadelstellungen an der nämlichen oder der entgegengesetzten Nadelseite angelegt worden, m, t, n oder q als Durchschnitte der betreffenden Visirlinien erhalten. Offenbar werden diese Punkte von p, d. h. dem die wirkliche verhältnißmäßige Lage des Objectes P zu a und b darstellenden Punkte auf der Planchette, um so entfernter gelegen sein, je dicker die Nadel ist, überhaupt aber die Abweichung der Hälfte einer der Diagonalen des Parallelogrammes mtnq gleich kommen.

Sei nun die Nadeldicke $cd = c'd' = D$

$$\angle\, apb = \angle\, ctd' = \angle\, dqc' = \alpha,$$

dann ergiebt sich:

$$pn = mp = \frac{D}{2 \,.\, \cos \frac{1}{2}\alpha} \text{ und}$$

$$pt = pg = \frac{D}{2 \,.\, \sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

Nach Versuchen Stampfer's beträgt die Nadeldicke 0,013 Wiener = 0,0145 Dresdner Zoll, mithin für letzteres Maß bei gewöhnlicher Gradeintheilung:

α	pn	pt
10	0,0072	0,0832
20	0,0073	0,0417
30	0,0075	0,0280
40	0,0077	0,0212
50	0,0080	0,0171
60	0,0083	0,0145
70	0,0088	0,0126
80	0,0094	0,0112
90	0,0102	0,0102

Hieraus folgt, daß für Winkel unter 90° die Fehler, d. h. die Abweichungen der gefundenen Punkte vom wahren Punkte p durch Anlegung des Diopterlineals an entgegengesetzten Seiten der Visirnadel, größer sind, als bei einseitiger Anlegung, um so größer, je spitzer der von beiden Visirlinien eingeschlossene Winkel ist, zugleich auch, daß für stumpfe Winkel das entgegengesetzte Verhalten eintritt. Ferner ergiebt sich hieraus, daß die Irrungen mit der Maßverjüngung zunehmen, d. h. bei kleinerem Maßstabe größer sind, als bei größerem, und umgekehrt. Daher ist in mehreren Staaten der Gebrauch der Visirnadeln bei Triangulirungen mittelst des Meßtisches, besonders wie solche den Catasterbegründungen vorausgehen, streng verboten und vorgeschrieben, das Diopterlineal unmittelbar an die auf der Planchette bezeichneten Punkte selbst anzulegen.

Gesetzt, es kämen bei einer Vermessung 200 Ellen auf einen Zoll, dann würde für obige Nadeldicke und 70° Neigung der Visirlinien sein:

$$pn = 0{,}0088 \cdot 200 = 1{,}76 \text{ Ellen},$$
$$pt = 0{,}0126 \cdot 200 = 2{,}52 \text{ "}$$

Diese allerdings beträchtlichen Irrungen würden, wenn nun einmal von der Visirnadel Gebrauch gemacht werden sollte, blos dadurch zu beseitigen sein, daß man beide Visirlinienpaare zöge und den entweder durch Construction oder Tarirung nach dem Augenmaße darzustellenden Mittelpunkt p des entstandenen Parallelogramms mtnq für den wahren gesuchten Punkt erklärte. Auch könnte man unter Anwendung zweier gleich dicker und möglichst weit auf der Planchette von einander entfernter Visirnadeln jenen Punkt p ermitteln, was zwar etwas umständlicher, doch sicherer zur Bestimmung dieses Punktes führt, als solches ohne Visirnadeln erreichbar ist.

§. 136.

Die nachtheiligen Folgen des Gebrauches der Visirnadel treten insbesondere deutlich beim Orientiren des Meßtisches nach drei Punkten, d. i. beim Rückwärtseinschneiden hervor. a, b, c Fig. 148 mögen die auf der Planchette vorhandenen, den Objecten A, B, C entsprechenden Punkte vorstellen, und der Meßtisch sei bereits orientirt, so werden die wahren Visirlinien sich in einem einzigen, den Standort des Meßtisches bezeichnenden Punkte q schneiden. Anders jedoch wird es sich mit den wirklichen durch die Nadel erlangten Visirlinien verhalten, indem diese ein Dreieck vwx bilden werden. Entgegengesetzten Falls, d. h. wenn die wirklichen Visirlinien sich in einem einzigen Punkte, etwa u Fig. 149, schneiden, so wird man daraus nicht folgern können, daß der Meßtisch orientirt sei, da die hypothetischen Visirlinien ein Dreieck rst einschließen würden. Die Ergebnisse des unter Benutzung der Visirnadel vollzogenen Rückwärtseinschneidens lassen sonach keinen sicheren Schluß über die fragliche Orientirung des Meßtisches zu; eine neue Mahnung, bei dieser Operation vom Gebrauch der Visirnadel gänzlich abzusehen.

§. 137.

Bestimmung des aus einer geneigten Lage der Planchette entstehenden Fehlers. Bei Gelegenheit der Beschreibung des Meßtischapparates wurde darauf aufmerksam gemacht, wie sehr es Pflicht des Geometers sei, die Horizontalstellung des Meßtisches mit größter Sorgfalt zu vollziehen. Sehen wir jetzt zu, welche Irrungen mangelhaftes Aufstellen des Meßtisches nach sich zieht, indem wir eine geneigte Lage der Planchettenebene voraussetzen, jedoch auf ihr rechtwinklig die Visirebene des Diopterlineals.

Zu dem Ende sei a Fig. 150 der Ausgangspunkt des nach dem Objecte m gerichteten Visirstrahles, welcher Punkt als Mittelpunkt einer Kugel und in der Planchettenebene liegend angesehen werden kann. CD bedeute die geneigte Planchettenebene, AB die durch a gedachte Horizontalebene. Beide hier als größte Kreise erscheinende Ebenen schneiden einander in der Geraden bc. z sei der Pol der Ebene AB, p der Pol von CD, dann ist bc gleichzeitig rechtwinklig auf az und ap, folglich auch auf dem durch z, p gedachten größten Kreise ACzpBD, auf dessen Ebene wiederum die Ebenen azb und apb rechtwinklig stehen. Ferner stelle ad die Projection des Visirstrahles am auf der geneigten Ebene CD, af hingegen die Projection desselben auf der Horizontalebene AB dar.

Hiernach wird die Neigung beider Ebenen durch den Bogen AC $=$ pz $=$ e gemessen, und man hat, wenn $\angle$ bad $= \lambda$, $\angle$ baf $= \lambda'$, so wie die Höhe des Objectes m über der Horizontalebene, d. i. fm $=$ h ist, im sphärischen Dreiecke mzp:

$$\angle \text{ mzp} = \angle \text{ pzb} + \angle \text{ bzf} = \angle \text{ pzb} + \angle \text{ baf} = 90° + \lambda'$$

$$\angle \text{ zpm} = \angle \text{ zpb} - \angle \text{ dpb} = \angle \text{ zpb} - \angle \text{ bad} = 90° - \lambda$$

$$\text{mz} = 90° - \text{h}.$$

Die sphärische Trigonometrie aber lehrt, daß im vorliegenden Falle stattfindet:

$$\cot \text{ mpz} = \frac{\sin \text{pz} \,.\, \cot \text{mz} + \cos \text{pz} \,.\, \cos \text{mzp}}{\sin \text{mzp}}, \text{ oder}$$

durch Substitution obiger Werthe:

$$\text{I. } \operatorname{tang} \lambda = \frac{\sin \text{e} \,.\, \operatorname{tang} \text{h} + \cos \text{e} \,.\, \sin \lambda'}{\cos \lambda'},$$

welcher Ausdruck die Relation darstellt, in welcher die Winkel λ und λ' zu einander stehen.

Für ein anderes Object m_0 mögen λ_0, h_0, λ'_0 bezüglich einerlei Bedeutung mit λ, h, λ' haben, dann ist:

$$\text{II. } \operatorname{tang} \lambda_0 = \frac{\sin \text{e} \,.\, \operatorname{tang} \text{h}_0 + \cos \text{e} \,.\, \sin \lambda'_0}{\cos \lambda'_0},$$

und der wahre Neigungswinkel beider Vistrebenen $= \lambda'_0 - \lambda'$, der irrthümliche hingegen $\lambda_0 - \lambda$, folglich:

$$(\lambda_0 - \lambda) - (\lambda'_0 - \lambda')$$

der Fehler, welcher dadurch entsteht, daß die Planchettenebene, anstatt horizontal zu sein, vielmehr unter einem Winkel $=$ e gegen den Horizont geneigt erscheint.

Beispiel. Es sei $e = 3°$, $h = 5°$, $h_0 = 10°$, $\lambda' = 12°$, $\lambda'_0 = 49°$, so ist der wahre Neigungswinkel beider Vistrebenen $= \lambda'_0 - \lambda' = 49° - 12° = 37°$, ferner

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\sin 3° \,.\, \operatorname{tang} 5° + \cos 3° \,.\, \sin 12°}{\cos 12°} = \operatorname{tang} 12° 14' 25{,}4''$$

$$\operatorname{tang} \lambda_0 = \frac{\sin 3° \,.\, \operatorname{tang} 10° + \cos 3° \,.\, \sin 49°}{\cos 49°} = \operatorname{tang} 49° 18' 22''.$$

Hieraus folgt der beobachtete Winkel beider Vistrebenen $= \lambda_0 - \lambda = 49° 18' 22'' - 12° 14' 25{,}4'' = 37° 3' 56{,}6''$, der mithin um $37° 3' 56{,}6'' - 37° = 3' 56{,}6''$ größer als der wahre ist.

Zusatz. Offenbar wird bei geringer Neigung der Planchette

auch der Fehler unbedeutend sein, d. h. der Unterschied zwischen dem wahren und beobachteten Winkel beider Visirebenen; auch übersieht man bald, daß die Größe dieses Neigungswinkels, nicht minder die der Neigung des Visirstrahles gegen die Horizontalebene AB von Einfluß auf die Fehlergröße sind. Denn weil e stets sehr klein ist, so darf man $\sin e = \widehat{e}$, $\cos e = 1$ schreiben, desgleichen $\text{tang}\,\lambda = \widehat{\lambda}$, falls das Object m in der Verticalebene bzc gedacht, demnach $\lambda' = 0$ gesetzt wird, und erhält hiernach durch Substitution dieser Werthe in die Formeln I. und II.:

$$\text{III.} \quad \lambda = e \,.\, \text{tang}\, h$$

$$\text{IV.} \quad \text{tang}\,\lambda_0 = \frac{e \,.\, \text{tang}\, h_0 + \sin \lambda'_0}{\cos \lambda'_0},$$

folglich die Fehlergröße

$$= (\lambda_0 - \lambda) - \lambda'_0.$$

Stampfer, der bei seinen Untersuchungen über diesen Fehler von obigen Grundformeln ausging, fand, daß, wenn die Unsicherheit des Winkels beider Visirebenen 30 Secunden nicht übersteigt, folgende Beziehungen zwischen dem Höhenwinkel des Objectes und der Größe der zulässigen Neigung der Planchette stattfinden:

Höhenwinkel des Objectes.	Größe der zulässigen Planchettenneigung.
6°	2,5 Minuten.
4°	3,8 "
2°	7,5 "
1°	15,0 "
0,5°	30,0 "

Liegen die Objecte genau im Horizonte von a, so kann die Neigung der Planchette 58,6 Minuten, also beinahe einen Grad betragen, damit der Fehler im Winkel beider Visirlinien 30 Secunden ausmacht. Da nun bei den gewöhnlichen Meßtischlibellen die Luftblase sich etwa um eine Linie bewegt, für eine Neigung der Planchette von 3 bis 6 Minuten, so folgt hieraus, daß es für ordinäre Messungen zu entschuldigen ist, wenn beim Horizontalstellen der Planchette nicht die äußerste Genauigkeit beobachtet wird, durch welche Bemerkung jedoch keineswegs dem leider nur allzu üblichen Schlendrian der sogenannten Feldmesser von Profession das Wort geredet werden soll.

§. 138.

Alle auf die Horizontalstellung der Planchette verwendete Sorgfalt ist vergebens, sobald die Visirebene des Diopters mit der Planchettenebene keinen rechten Winkel einschließt, wie aus folgender Betrachtung hervorgehen wird.

Wiederum werde der Ausgangspunkt a Fig. 151 des Visirstrahles als Mittelpunkt einer Kugel angesehen, ebenso AB als die durch ihn gedachte Horizontalebene. m sei eins der Objecte, demnach am der hierzu gehörige Visirstrahl, ferner amb die geneigte, amb′ die lothrechte Visirebene des Diopterlineals, dann ist im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke bb′m, $\angle$ bmb′ $= \alpha$ die Größe der Neigung beider Ebenen. Bezeichnet man den durch den Bogen bb′ gemessenen Winkel der wahren und irrigen Visirlinie, d. i. $\angle$ bab′ durch β, den Höhenwinkel b′am des Objectes m durch h, so folgt:

$$\text{tang bb}' = \text{tang } \beta = \text{tang } \alpha \,.\, \sin h = \alpha \,.\, \sin h,$$

insofern α stets sehr klein sein wird.

Ein zweites Object werde durch den Punkt m′ dargestellt, für welches die geneigte Visirebene am′c, die verticale am′c′ sein möge, dergestalt, daß ca und c′a Parallelen bezüglich zur wirklichen, d. h. unrichtigen und wahren Visirlinie bedeuten, deren Neigungswinkel cac′ $= \gamma$ durch die Kathete cc′ des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes cc′m′ gemessen wird. Ist ferner der Höhenwinkel des Objectes oder $\angle$ c′am′ $=$ h′, dann hat man:

$$\text{tang cc}' = \text{tang } \alpha \,.\, \sin h' = \alpha \,.\, \sin h'.$$

Nun ist:

$$\angle \text{ b'ac}' = \angle \text{ b'ac} + \angle \text{ cac}' = \angle \text{ b'ac} + \gamma$$

$$\angle \text{ bac} = \angle \text{ b'ac} + \angle \text{ bab}' = \angle \text{ b'ac} + \beta,$$

daher

$$\angle \text{ bac} - \angle \text{ b'ac}' = \beta - \gamma,$$

folglich die Größe des Fehlers

$$= \beta - \gamma = \alpha \,.\, \sin h - \alpha \,.\, \sin h'$$

$$= \alpha \,(\sin h - \sin h'),$$

d. h. um so größer, je kleiner der Neigungswinkel der Visirebene gegen die Planchettenebene ist, und wäre dieser constant, je mehr der Unterschied beider Höhenwinkel beträgt.

Hieraus folgt, daß namentlich bei Aufnahmen im gebirgigen

Terrain vorzügliche Sorgfalt auf die Erlangung eines verticalen Standes der Visirebenen zu verwenden ist.

Beispiel. Es sei $\alpha = 2°$, $h = 15°$, $h' = 20°$, dann beträgt der Fehler, d. h. der Unterschied des Neigungswinkels der auf der Planchettenebene wirklich dargestellten Visirlinien gegen den Winkel derjenigen Visirlinien, welche bei lothrechter Lage der Visirebenen entstanden sein würden:

$$0{,}03490659\,(0{,}2588190 - 0{,}3420201) = -0{,}0029043,$$

welches dem Winkel von 0° 9′ 58,6″ oder ca. 10 Minuten entspricht, um welchen Betrag der Winkel der wirklichen Visirlinien gegen den der wahren, wegen des negativen Vorzeichens, zu klein erhalten worden wäre.

Zusatz 1. Der fragliche Fehler $\beta - \gamma$ wird, wie aus dem dafür gefundenen Werthe $\alpha(\sin h - \sin h')$ hervorgeht, um so kleiner sein, je näher die Höhenwinkel h und h′ dem Verhältniß der Gleichheit kommen, und er verschwindet in dem Augenblicke gänzlich, für welchen $h = h'$, z. B. $= 0$ wird, daher in flachem Terrain von diesem Fehler weniger Nachtheil zu befürchten ist.

Zusatz 2. Wären beide Objecte m, m′ oder nur eins derselben unter der Horizontalebene für a gelegen, die Winkel h und h′ daher Tiefen- oder Depressionswinkel, so würde hierdurch nur das Vorzeichen der betreffenden Glieder sich ändern. Hätte z. B. h′ auf einen Tiefenwinkel Bezug, dann erhielte obige Fehlerformel die Gestalt:

$$\beta - \gamma = \alpha(\sin h + \sin h'),$$

daher in diesem Falle der Fehler noch bedeutender, als im zuerst angeführten, und mit Rücksicht auf das vorangehende numerische Beispiel schon 1° 12′ 6,3″ sein würde.

§. 139.

Umsonst würde das Bemühen in der Beseitigung der so eben betrachteten Fehlerquellen sein, käme die Planchettenoberfläche nicht einer Ebene möglichst nahe, enthielte das Papier ungleich dicke Stellen oder, was noch schlimmer sein würde, plötzliche knotenartige Erhöhungen. Leider steht es nicht in der Macht des Geometers, diese gewöhnlich gleichzeitig eintretenden Uebelstände gänzlich wegzuräumen, nur in ihren Wirkungen vermag er dieselben dadurch zu schwächen, daß er sich fortwährend von den Mängeln seines Apparates in Kenntniß erhält und in jedem Falle zusieht, welche Wahrscheinlichkeit die gewonnenen

Messungsresultate mit Rücksicht auf die vorhandenen Fehlerquellen für sich haben. So wird er nicht versäumen, den Einfluß zu beobachten, welchen Witterungsänderung auf die Ausdehnung des Papiers ausübt, indem er von einem metallenen Maßstabe eine möglichst große Länge auf das Papier der Planchette aufträgt und von Zeit zu Zeit untersucht, in wie fern diese Länge sich verändert hat. Der Geometer wird ferner — um nur Eins noch anzuführen — bei nachgebendem Boden den Einfluß desselben auf die Veränderung des Meßtischstandes gehörig würdigen, um diese nicht abzuwendende Fehlerquelle möglichst unschädlich zu machen.

Es würde zu weit führen, auch dem Anfänger wenig nützen, wollten wir hier alle Vorschläge, die zur Vervollkommnung des Meßtischapparates geschehen und zum Theil wirklich realisirt worden sind, aufzählen, z. B. daß statt der hölzernen Planchetten Planchetten aus Glas mit matt abgeschliffener Oberfläche, aus Marmor u. s. w. angewendet wurden u. dergl. m. Vielmehr verweisen wir dieses Gegenstandes wegen auf die betreffenden technischen und mathematischen Zeitschriften, so wie auf die größeren Werke über praktische Geometrie.

§. 140.

Der Horizontalkreis mit beweglichen Dioptern.

Durch die Boussole sind wir bereits mit der Einrichtung des Horizontalkreises bekannt geworden. Dort waren mit ihm fest verbunden die Dioptern und die Magnetnadel bildete den Winkelzeiger, hier ist der Horizontalkreis fest und es bewegt sich über demselben um seinen Mittelpunkt herum ein Diopterlineal, dessen Rand den Winkelzeiger vorstellt. Der Apparat wird wie die Planchette des Meßtisches von einem dreifüßigen, mit einer besondern Horizontalstellung versehenen Stative getragen, so daß dessen Totalform mit der eines Boussolenapparates nahe übereinkommt. Es wird sich daher zunächst nur um die Beschreibung des Hauptbestandtheiles dieses Winkelmeßinstrumentes, nämlich des Horizontalkreises nebst den darauf beweglichen Dioptern handeln, wozu wir uns der den Grundriß des Instruments darstellenden Fig. 152 bedienen wollen.

AA zeigt in ihr den, gewöhnlich aus Messingguß dargestellten, Horizontalkreis von 5 bis 6 Zoll Durchmesser, auch wohl darüber, und der entsprechenden Dicke. In der Nähe des Randes — Limbus — ist derselbe mit einer bis auf $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{8}$ Grad reichenden Kreiseintheilung versehen. Durch drei, vier oder mehrere Arme D, D, . . .

steht der Rand mit einer Nabe in Verbindung, und durch diese mit dem Zapfen des Stativs. Die Nabe ist zur Befestigung derselben an den Zapfen mit einer Preßschraube v versehen, so daß, wenn diese Schraube gehörig angezogen wird, Horizontalkreis und Stativ als ein unverrückbares Ganzes anzusehen sind. Um denselben Hauptzapfen, dessen Axe durch den Mittelpunkt des Horizontalkreises hindurchgehen muß, ist das Diopterlineal BC — die Alhidade — oder statt dessen ein Fernrohr mit Fadenkreuz dergestalt drehend beweglich eingerichtet, daß in dessen Vistrebene die Axe des Instrumentes hineinfällt. Ein jedes der Dioptern B und C ist wie bei der in Fig. 73 dargestellten Boussole Ocular- und Objectivdiopter zugleich. Die untere Fläche des Lineals schließt sich während der Bewegung desselben genau an den Horizontalkreis an und auf der obern Fläche ist die mit der Vistrebene zusammenfallende Inderlinie nn gehörig angemerkt. Damit diese Linie zum Ablesen der Winkel am Horizontalkreise geeignet sei, so hat das Lineal dort, wo solches den Horizontalkreis bedeckt, zwei in der Hauptform rectanguläre Unterbrechungen pq, p'q'; nur die eine Seite derselben qr, p'r' ist ein Kreisbogen, die Grenze eines abgeschrägten Randes, welcher dicht an den Horizontalkreis anschließt und auf welchem Rande die Inderlinie sich fortsetzt. Zu beiden Seiten derselben befindet sich ein Nonius, welcher die Angabe der Winkel bis auf einzelne Minuten oder, je nach der sonstigen Instrumentseinrichtung, noch genauer zuläßt. In der Mitte der Unterfläche des Lineals ist ein Ring angebracht, welcher den Hauptzapfen des Instruments umschließt und wodurch die drehende Bewegung des Lineals um diesen Zapfen herum möglich gemacht wird. Durch diesen Ring hindurch geht eine Schraube w, die grobe Stellung. Wird solche angezogen, so greift ihr Ende in eine rinnenförmige Vertiefung des Hauptzapfens ein, und es kann dann die hierdurch entstehende Reibung so sehr gesteigert werden, daß das Lineal für gewöhnliche Kraft, d. h. mit der bloßen Hand sich nicht mehr um den Hauptzapfen herum drehen läßt. Diesen Zustand führt man jedoch absichtlich herbei, sobald die Vistrebene des Diopterlineals bereits nahe auf ein Object eingerichtet ist und es sich nur noch um eine letzte Correction handelt. Alsdann wird, ganz wie dies beim Meßtische geschah, derjenige Theil des Instrumentes in Anspruch genommen, welcher die feine Stellung heißt und deren Hauptbestandtheil eine Mikrometerschraube t ist. Dieselbe findet sich am Ende eines Hebels s vor, welcher mit jenem Diopterringe aus einem einzigen Stücke besteht; sie hat daselbst ihre durch eine Stellschraube beliebig zu veren-

gernde Schraubenmutter, und drückt auf einen am Lineal befestigten Stift u dergestalt, daß hierdurch die Möglichkeit geboten ist, das Lineal vorwärts zu drehen. Die rückgängige Drehung des Dioptterlineals wird durch eine am Hebel s durch Schrauben befestigte Stahlfeder k bewirkt, welche fortwährend an ihrem Ende auf die der Schraube entgegengesetzte Seite des Stiftes u drückt.

Behufs der Horizontalstellung des Instrumentes ist mitten auf der Oberfläche des Lineals eine Röhrenlibelle hg angebracht, dessen Luftblase während der Umdrehung des Lineals um seine Axe völlig in Ruhe verbleiben muß, wenn anders zugegeben werden soll, daß die horizontale Aufstellung des Instrumentes erfolgt sei.

Werden die Haardioptern durch ein Fernrohr ersetzt, dann pflegt die Libelle, nachdem das Fernrohr fest oder um eine horizontale Axe beweglich eingerichtet ist, entweder auf das Fernrohr gestellt oder sonst in einer passenden Art mit demselben verbunden zu werden. Bei größeren Vermessungen, z. B. Behufs der Triangulirung eines Landes, bedient man sich stets mit Fernröhren versehener Horizontalkreise, und diese sind dann entweder an der Fortsetzung der Hauptaxe des Instrumentes befestigt oder ruhen mittelst Zapfen in Lagern, welche an einem Gestell angebracht sind, das vom Alhidadenkreise getragen wird, wovon die Platte des Diopterlineals nur ein Stück vorstellt.

Endlich bemerken wir, daß zur Bezeichnung des Fußpunktes der Instrumentsaxe, wie am Boussolenstative Fig. 74, ein Ring t zum Hindurchziehen des Lothfadens angebracht ist.

§. 141.

Anlangend die Prüfung des Instrumentes, so kann das in dieser Hinsicht bei Gelegenheit der Beschreibung des Boussolenapparates Angeführte sogleich auf das vorliegende angewendet werden, und es gilt dies nicht allein von der Prüfung der Dioptern, sondern auch von der Centrirung der Alhidadenaxe und der Richtigkeit der Eintheilung des Horizontalkreises. Auch ist, was den Gebrauch des Nonius betrifft, früheren Ortes von §. 17 bis 21 das Nöthige aufgezeichnet worden. Sonstige Eigenthümlichkeiten des Horizontalkreises mit beweglichen Dioptern lassen sich leicht durch eigenes Nachdenken auffinden und am besten an der Hand des Instrumentes selbst besprechen, daher wir gegenwärtig hiervon absehen und sofort zur Anwendung desselben auf eine Reihe der wichtigeren Aufgaben übergehen wollen.

§. 142.

Operationen mit dem Horizontalkreise.

Aufgabe. Die Länge einer unzugänglichen Geraden AB Fig. 153 sei gegeben, damit die Lage mehrerer Punkte C und D zu einander und zu jener Geraden bestimmt werde, unter der Voraussetzung, daß von diesen Punkten aus die Winkel der auf A und B bezüglichen Visirlinien gemessen werden können.

Auflösung. Es sei $AB = D$, $CD = m$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle ADC = \gamma$, $\angle ADB = \delta$, $\angle DAB = x$, $\angle GBA = y$, dann ist:

$$\text{im } \triangle CAD,\ CA = \frac{CD \,.\, \sin\gamma}{\sin(180° - \alpha - \beta - \gamma)} = \frac{m \,.\, \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$\text{“ } \triangle ABC,\ CA = \frac{AB \,.\, \sin y}{\sin\alpha} = \frac{D \,.\, \sin y}{\sin\alpha}, \text{ daher}$$

$$\frac{m \,.\, \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{D \,.\, \sin y}{\sin\alpha}$$

$$\frac{D}{m} = \frac{\sin\gamma \,.\, \sin\alpha}{\sin y \,.\, \sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Auf gleiche Art folgt aus den Dreiecken ABD und BCD

$$\frac{D}{m} = \frac{\sin\beta \,.\, \sin\delta}{\sin x \,.\, \sin(\beta + \gamma + \delta)}, \text{ mithin}$$

$$\frac{\sin\gamma \,.\, \sin\alpha}{\sin y \,.\, \sin(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\sin\beta \,.\, \sin\delta}{\sin x \,.\, \sin(\beta + \gamma + \delta)} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\beta \,.\, \sin\delta \,.\, \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin\alpha \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin(\beta + \gamma + \delta)} = \frac{\sin x}{\sin y} = \text{tang}\,\varphi,$$

wobei φ einen durch die gemessenen Winkel als bekannt anzusehenden Hülfswinkel bedeutet, welche Annahme dadurch gerechtfertigt erscheint, daß die Tangenten an die Stelle aller Größen von 0 bis ∞ gesetzt werden können.

Um der Forderung zu genügen, d. h. die Lage der Punkte C und D in Bezug auf AB, nämlich ihre Entfernungen unter einander und von den Punkten A und B angeben zu können, so wird es auf die Bestimmung der Winkel x und y ankommen. Hierzu hat man, wie leicht einzusehen ist:

$$x + y = \beta + \gamma, \text{ ferner}$$

$$1 + \frac{\sin x}{\sin y} = 1 + \text{tang}\,\varphi$$

$$1 - \frac{\sin x}{\sin y} = 1 - \text{tang}\,\varphi$$

und durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{\sin y + \sin x}{\sin y - \sin x} = \frac{1 + \text{tang}\,\varphi}{1 - \text{tang}\,\varphi}$$

oder nach bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(y + x)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(y - x)} = \text{tang}\,(45° + \varphi),\ \text{woraus}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(y - x) = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(y + x)}{\text{tang}\,(45° + \varphi)}\ \text{folgt,}$$

daher nun x und y als bekannt zu erachten sind.

Kennt man aber einmal diese beiden Winkel, so ist es dann leicht, mittelst der übrigen gegebenen Stücke durch Rechnung die Längen AC, BC, AD, BD und CD zu finden.

Zusatz. Offenbar konnte dieser Forderung ganz auf ähnliche Weise entsprochen werden, wie solches mit der des §. 75 geschehen ist. Durch Einführung des Hülfswinkels φ lassen sich jedoch die hier aufgestellten Formeln logarithmisch auflösen, und es ist auch kein anderer Grund für die Wahl dieses Kunstgriffes vorhanden, indem auf diesem Wege eine Vereinfachung der Rechnung selbst gegen jenen so eben citirten Entwickelungsgang keinesweges erzielt wird. Zur Vergleichung beider Verfahrungsarten wollen wir das in §. 75 berechnete Beispiel auch hier wählen, mit dem Unterschiede jedoch, daß die dort gesuchte Länge gegeben sein möge und umgekehrt.

Beispiel. Es sei $\alpha = 71° 15'$, $\beta = 27°$, $\gamma = 47° 30'$, $\delta = 65° 15' 30''$ und $D = 878{,}5$ Fuß. Man fragt nach der Länge $CD = m$.

In diesem Falle ist:

$$\log \text{tang}\,\varphi = \log \sin \beta + \log \sin \delta + \log \sin (\alpha + \beta + \gamma) - \log \sin \alpha - \log \sin \gamma - \log \sin (\beta + \gamma + \delta)$$

$$= \log \sin 27° + \log \sin 65° 15' 30'' + \log \sin 34° 15' - \log \sin 71° 15' - \log \sin 47° 30' - \log \sin 40° 14' 30'' = 9{,}7113981,\ \text{daher}$$

$$\varphi = 27° 13' 35{,}4'',\ \text{ferner}$$

$$\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(y - x) = \log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(y + x) - \log \text{tang}\,(45° + \varphi)$$

$$= \log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) - \log \text{tang}\,(45° + 27° 13' 35{,}4'')$$

$$= \log \text{tang}\,37° 15' - \log \text{tang}\,72° 13' 35{,}4''$$

$$= 9{,}3869544.$$

$$\tfrac{1}{2}(y - x) = 13° 41' 56{,}4''$$

$$y - x = 27^\circ\ 23'\ 52{,}8''$$
$$y + x = 74^\circ\ 30',\ \text{folglich}$$
$$x = 23^\circ\ 33'\ 3{,}6''$$
$$y = 50^\circ\ 56'\ 56{,}4''.$$

Jetzt unterliegt die Bestimmung von m keinerlei Schwierigkeiten, und man hat hierzu im $\triangle$ ACD

$$AC : CD = \sin\gamma : \sin(\alpha+\beta+\gamma),\ \text{oder}$$
$$\frac{D\ .\ \sin y}{\sin\alpha} : m = \sin\gamma : \sin(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$m = \frac{D\ .\ \sin y\ .\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\ .\ \sin\gamma}$$
$$= \frac{878{,}5\ .\ \sin 50^\circ\ 56'\ 56{,}4''\ .\ \sin 145^\circ\ 45'}{\sin 71^\circ\ 15'\ .\ \sin 47^\circ\ 30'}$$
$$\log CD = \log 878{,}5 + \log\sin 50^\circ\ 56'\ 56{,}4'' + \log\sin 34^\circ\ 15'$$
$$- \log\sin 70^\circ\ 15' - \log\sin 47^\circ\ 30' = 2{,}7403402,\ \text{daher}$$
$$m = 549{,}982\ \text{Fuß}.$$

Daß CD nicht, laut der Bedingung des im §. 75 behandelten Beispiels, 550 Fuß, sondern 0,018 Fuß geringer erscheint, hat darin seinen Grund, weil die dort bestimmte Länge von AB = 878,5 Fuß etwas zu klein, nämlich ohne Rücksicht auf die folgenden Decimalstellen gefunden und in die gegenwärtige Rechnung eingeführt worden ist.

Zusatz 2. CD würde auch dadurch sich haben bestimmen lassen, daß man diese Länge vorläufig als bekannt, am einfachsten = 1, annimmt. Sodann ist:

$$\text{im } \triangle CAD,\ AC = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = p$$
$$\text{“ } \triangle CBD,\ BC = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} = q$$
$$\text{“ } \triangle ABD,\ AB = D = \sqrt{(p^2+q^2-2pq\ .\ \cos\alpha)},\ \text{ferner}$$
$$CD : AB = 1 : \sqrt{(p^2+q^2-2pq\ .\ \cos\alpha)} = m : D,\ \text{woraus}$$
$$m = \frac{D}{\sqrt{(p^2+q^2-2pq\ .\ \cos\alpha)}}\ \text{sich ergiebt.}$$

§. 143.

Aufgabe. Die Lage eines Punktes M Fig. 154 zu bestimmen, in welchem drei nach den Eckpunkten eines gegebenen Dreieckes ABC ge-

hende Visirlinien einander unter bekannten Winkeln schneiden. (Trigonometrische Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe.)

Auflösung. Wie schon beim Rückwärtseinschneiden mittelst des Meßtisches dargethan wurde, erscheint gegenwärtige Aufgabe nur alsdann lösbar, sobald der fragliche Punkt M außerhalb der Peripherie des zum Dreiecke ABC gehörigen umschriebenen Kreises gelegen ist, indem sonst aus jedem Punkte derselben die Dreiecksseiten beziehungsweise unter denselben Winkeln wahrgenommen werden. Schließen wir also diesen Fall aus und setzen:

$$BC = a,\ AC = b,\ AB = c,\ \angle AMB = m,\ \angle BMC = n,$$
$$\angle BAM = x,\ \angle BCM = y,\ \text{dann ist:}$$

$$\text{im } \triangle ABM \ldots . BM = \frac{c \,.\, \sin x}{\sin m}$$

$$\triangle BCM \ldots . BM = \frac{a \,.\, \sin y}{\sin n},\ \text{daher}$$

$$\frac{c \,.\, \sin x}{\sin m} = \frac{a \,.\, \sin y}{\sin n} \ldots . 1,$$

ferner

$$\angle MAB + \angle ABM + \angle AMB = 180°$$
$$\angle MCB + \angle CBM + \angle BMC = 180°,\ \text{mithin}$$
$$\angle MAB + \angle MCB + \angle ABM + \angle CBM + \angle AMB + \angle BMC = 360°,\ \text{d. i.}$$
$$x + y + \angle ABC + m + n = 360°$$
$$x + y = 360° - ABC - (m + n) = p$$
$$y = p - x,$$

und durch Substitution dieses Werthes für y in die Gleichung 1

$$\frac{c \,.\, \sin x}{\sin m} = \frac{a \,.\, \sin (p - x)}{\sin n} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin (p - x)}{\sin x} = \frac{c \,.\, \sin n}{a \,.\, \sin m}.$$

Bekanntlich hat man aber:

$$\frac{\sin (p - x)}{\sin p \,.\, \sin x} = \cot x - \cot p,\ \text{daher}$$

$$\frac{\sin (p - x)}{\sin x} = \sin p\,(\cot x - \cot p)$$

$$= \frac{c \,.\, \sin n}{a \,.\, \sin m},\ \text{folglich ist}$$

$$\cot x = \frac{c \,.\, \sin n}{a \,.\, \sin m \,.\, \sin p} + \cot p \ldots . 2.$$

Hierdurch wird x bekannt, daher auch y, und aus beiden Winkeln lassen sich dann leicht nach den gewöhnlichen trigonometrischen Regeln, unter Hinzuziehung des sonst Gegebenen, die Entfernungen des Punktes M von den Eckpunkten des Dreieckes ABC berechnen.

Zusatz 1. Wie im vorigen §., so lassen sich auch hier obige Auflösungsformeln, durch Einführung eines Hülfswinkels φ, zu continuirlicher logarithmischer Berechnung umgestalten. Denn man setze nur:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \,.\, \sin m}{c \,.\, \sin n} = \operatorname{tang} \varphi,$$ dann folgt leicht

$$\frac{\sin y + \sin x}{\sin y - \sin x} = \frac{1 + \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \varphi}$$ oder

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(y + x)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(y - x)} = \operatorname{tang}(45^\circ + \varphi),$$ und hieraus

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(y - x) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(y + x)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \varphi)} \ldots . 3.$$

Zusatz 2. Noch rascher gelangt man durch Einführung eines Hülfswinkels in die Gleichung 2 zum Ziele. Hiernach sei:

$$\frac{c \,.\, \sin n}{a \,.\, \sin m \,.\, \sin p} = \cot \psi,$$ dann ist:

$$\cot x = \cot \psi + \cot p = \frac{\sin(p + \psi)}{\sin p \,.\, \sin \psi} \ldots . 4.$$

Eine andere hier nur zu erwähnende Auflösungsmethode besteht darin, die Punkte A, B, C und M mittelst Coordinaten untereinander in Verband zu bringen..*)

§. 144.

Beispiel. Mit Bezug auf Fig. 154 habe man $BC = a = 360$, $AC = b = 500$, $AB = c = 300$ Ruthen, $\angle AMB = m = 41^\circ 32' 30''$ und $\angle BMC = n = 52^\circ 12' 30''$, dann ist:

$$\sin \tfrac{1}{2} ABC = \sqrt{\left(\frac{580 - 300}{300}\right)\left(\frac{580 - 360}{360}\right)} = \sqrt{\frac{77}{135}}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2} ABC = 9{,}8780784$$

*) Diese Auflösung enthält Ulrich's praktische Geometrie. Zweiter Bd. §. 499 u. f.

$$\tfrac{1}{2}\,ABC = 49^\circ\,2'\,43''$$

$$ABC = 98^\circ\,5'\,26''$$

$$x + y = p = 360^\circ - 98^\circ\,5'\,26'' - (41^\circ\,32'\,30'' + 52^\circ\,12'\,30'')$$

$$= 168^\circ\,9'\,34''$$

$$\cot\psi = \frac{300\ .\ \sin 52^\circ\,12'\,30''}{360\ .\ \sin 41^\circ\,32'\,30''\ .\ \sin 168^\circ\,9'\,34''}$$

$$= \frac{5\ .\ \sin 52^\circ\,12'\,30''}{6\ .\ \sin 41^\circ\,32'\,30''\ .\ \sin 11^\circ\,50'\,26''}$$

$$\log\cot\psi = 10{,}6848050$$

$$\psi = 11^\circ\,40'\,30''$$

$$\cot x = \frac{\sin(168^\circ\,9'\,34'' + 11^\circ\,40'\,30''}{\sin 168^\circ\,9'\,34''\ .\ \sin 11^\circ\,40'\,30''}$$

$$= \frac{\sin 0^\circ\,9'\,56''}{\sin 11^\circ\,50'\,26''\ .\ \sin 11^\circ\,40'\,30''}$$

$$\log\cot x = 8{,}8381480$$

$$x = 86^\circ\,3'\,33''.$$

Zur Bestätigung dieses Winkels wird man y nicht durch Subtraction finden, sondern so, wie x selbst gefunden wurde, und es ist hierzu:

$$\cot y = \frac{a\ .\ \sin m}{c\ .\ \sin n\ .\ \sin p} + \cot p, \text{ oder wenn}$$

$$\frac{a\ .\ \sin m}{c\ .\ \sin n\ .\ \sin p} = \cot\psi' \text{ ist,}$$

$$\cot y = \cot\psi' + \cot p = \frac{\sin(p + \psi')}{\sin p\ .\ \sin\psi'}.$$

Für den vorliegenden Fall ergiebt sich:

$$\cot\psi' = \frac{360\ .\ \sin 41^\circ\,32'\,30''}{300\ .\ \sin 52^\circ\,12'\,30''\ .\ \sin 168^\circ\,9'\,34''}$$

$$= \frac{6\ .\ \sin 41^\circ\,32'\,30''}{5\ .\ \sin 52^\circ\,12'\,30''\ .\ \sin 11^\circ\,50'\,26''}$$

$$\log\cot\psi' = 10{,}6908876$$

$$\psi' = 11^\circ\,31'\,1''$$

$$\cot y = \frac{\sin(168^\circ\,9'\,34'' + 11^\circ\,31'\,1'')}{\sin 168^\circ\,9'\,34''\ .\ \sin 11^\circ\,31'\,1''}$$

$$= \frac{\sin 0^\circ\,19'\,25''}{\sin 11^\circ\,50'\,26''\ .\ \sin 11^\circ\,31'\,1''}$$

$$\log\cot y = 9{,}1469103$$

$$y = 82° 0' 59''$$
$$x + y = 86° 3' 33'' + 82° 0' 59''$$
$$= 168° 4' 32''$$

um $0° 5' 2''$ gegen p zu klein.

Diese Differenz ist nicht Folge eines irrigen Rechnungsganges oder von Rechnungsfehlern, sondern in dem Umstande begründet, daß die Winkel m und n nicht mittelst eines wirklichen, die größte Genauigkeit zulassenden Horizontalkreises bestimmt worden sind, sondern auf dem Papiere unter Benutzung von Sehnentafeln.

Die Berechnung der Entfernungen des Punktes M von den Eckpunkten des gegebenen Dreieckes übergehen wir hier, als der Anleitung nicht weiter bedürftig, und fügen nur noch die Bemerkung bei, daß, falls der Punkt M innerhalb des Dreieckes ABC gelegen sein sollte, ganz auf ähnliche Weise zu verfahren ist.

§. 145.

Aufgabe. Von zwei, außerhalb eines bekannten Dreieckes ABC Fig. 155 liegenden Punkten D und E aus mögen die Winkel der Gesichtslinien DA, DB, DE, so wie EC, EB, ED gemessen worden sein, damit hierdurch die Lage beider Punkte unter einander und gegen die Eckpunkte dieses Dreieckes bestimmt werde.

Auflösung. Sei wiederum $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, ferner $\angle ADB = \alpha$, $\angle BDE = \beta$, $\angle DEB = \gamma$, $\angle BEC = \delta$, so wie $\angle DAB = x$ und $\angle ECB = y$, dann ist:

im $\triangle ABD$ .... $BD = \frac{c \cdot \sin x}{\sin \alpha}$

$\triangle BDE$ .... $BD = \frac{BE \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$

$\triangle BCE$ .... $BE = \frac{a \cdot \sin y}{\sin \delta}$, daher

$$BD = \frac{a \cdot \sin y \cdot \sin \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \delta} \text{ und}$$

$$\frac{c \cdot \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \sin y \cdot \sin \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \delta} \ldots .$$

Ferner folgt:

$$\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB = 180°$$
$$\angle DBE + \angle BED + \angle EDB = 180°$$
$$\angle EBC + \angle BCE + \angle CEB = 180°, \text{ d. i.}$$

$\angle ABC + \alpha + \beta + \gamma + \delta + x + y = 540°$, mithin

$$x + y = 540° - ABC - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = p$$

$$y = q - x.$$

Aus 1 ergiebt sich hiernach:

$$\frac{c \,.\, \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \,.\, \sin (p - x) \,.\, \sin \gamma}{\sin \beta \,.\, \sin \delta}$$

$$\frac{\sin (p - x)}{\sin x} = \frac{c \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \delta}{a \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \gamma}$$

oder wie im vorigen §.

$$= \sin p \,(\cot x - \cot p),$$

demnach

$$\cot x = \frac{c \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \delta}{a \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \gamma \,.\, \sin p} + \cot p \ldots . \; 2$$

und wenn

$$\frac{c \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \delta}{a \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \gamma \,.\, \sin p} = \cot \varphi$$

$$\cot x = \cot \varphi + \cot p = \frac{\sin (p + \varphi)}{\sin p \,.\, \sin \varphi} \ldots . \; 3.$$

Hierdurch geschieht der Forderung Genüge, denn aus x folgt leicht y; oder man würde zur Controle y wie x ableiten und zusehen, ob $x + y$ in der That der Bekannten p entspricht, sodann aber mittelst dieser erworbenen Stücke, unter Zuziehung der gegebenen, auf die zur fraglichen Lagenbestimmung der Punkte D und E nothwendig gehörigen Entfernungen derselben von den Eckpunkten des gegebenen Dreieckes wie gewöhnlich schließen.

§. 146.

Beispiel. Es sei $BC = a = 137$, $AC = b = 200$, $AB = c = 140$ Ruthen, $\angle ADB = \alpha = 34° 10'$, $\angle EDB = \beta = 64° 35'$, $\angle DEB = \gamma = 80° 10'$ und $\angle BEC = \delta = 33° 50'$, endlich wie vorhin $\angle DAB = x$, $\angle ECB = y$, dann folgt:

$$\angle ABC = 92° 26' 12{,}4''$$

$$x + y = p = 234° 48' 6''$$

$$\cot \varphi = \frac{140 \,.\, \sin 64° 35' \,.\, \sin 33° 50'}{137 \,.\, \sin 34° 10' \,.\, \sin 80° 10' \,.\, \sin 234° 48' 48''}$$

$$- \cot \varphi = \frac{140 \,.\, \sin 64° 35' \,.\, \sin 33° 50'}{137 \,.\, \sin 34° 10' \,.\, \sin 80° 10' \,.\, \sin 54° 48' 48''}$$

$$\log \cot \varphi = 10{,}0555067,$$

wozu der Winkel $41° 20' 54''$ gehört, daher

$$\varphi = 180° - 41° 20' 54'' = 138° 39' 6'', \text{ mithin}$$

$$\cot x = \frac{\sin (138° 39' 6'' + 234° 48' 48'')}{\sin 138° 39' 6'' \,.\, \sin 234° 48' 48''} \text{ d. i.}$$

$$-\cot x = \frac{\sin 13° 27' 54''}{\sin 54° 48' 48'' \,.\, \sin 41° 20' 54''}$$

$$\log \cot x = 9{,}6347540,$$

welcher dem Winkel von $66° 41' 15''$ entspricht, daher ist

$$x = 180° - 66° 40' 15'' = 113° 19' 45''.$$

Zur Prüfung dieses Winkels hat man:

$$\cot y = \frac{a \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \gamma}{c \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \delta \,.\, \sin p} + \cot p = \cot \varphi' + \cot p$$

$$= \frac{\sin (\varphi' + p)}{\sin \varphi' \,.\, \sin p} \text{ und}$$

$$\cot \varphi' = \frac{137 \,.\, \sin 34° 10' \,.\, \sin 80° 10'}{140 \,.\, \sin 64° 35' \,.\, \sin 33° 50' \,.\, \sin 234° 48' 48''}$$

$$-\cot \varphi' = \frac{137 \,.\, \sin 34° 10' \,.\, \sin 80° 10'}{140 \,.\, \sin 64° 35' \,.\, \sin 33° 50' \,.\, \sin 54° 48' 48''}$$

$$\log \cot \varphi' = 10{,}1197503$$

$$\varphi' = 127° 12' 3''$$

$$\cot y = \frac{\sin (127° 12' 3'' + 234° 48' 48'')}{\sin 127° 12' 3'' \,.\, \sin 54° 48' 48''}$$

$$\log \cot y = 9{,}7870549$$

$$y = 121° 29' 4'', \text{ daher}$$

$$x + y = p = 113° 19' 45'' + 121° 29' 4''$$

$$= 234° 48' 49''$$

um $1''$ von obiger Angabe verschieden, mit welcher Differenz es sich wie mit jener des Beispiels in §. 144 verhält.

Die zur Lagenbestimmung der Punkte D und E gehörigen Entfernungen derselben unter einander und von den Eckpunkten des gegebenen Dreieckes ABC ergeben sich wie folgt.

$$\text{Es ist } AD = \frac{140 \,.\, \sin 32° 30' 15''}{\sin 34° 10'} = 133{,}957 \text{ Ruthen}$$

$$BD = \frac{140 \,.\, \sin 66° 40' 15''}{\sin 34° 10'} = 228{,}906 \quad \text{“}$$

$$BE = \frac{137 \,.\, \sin 58° 30' 56''}{\sin 33° 50'} = 209{,}785 \quad \text{“}$$

$$EC = \frac{137 \,.\, \sin 24^\circ\, 40'\, 56''}{\sin 33^\circ\, 50'} = 102{,}750 \text{ Ruthen}$$

$$DE = \frac{228{,}906 \,.\, \sin 35^\circ\, 15'}{\sin 80^\circ\, 10'} = 134{,}082 \text{ "}$$

Wird der Bestimmung von DE die Seite BE des Dreieckes BEC zum Grunde gelegt, so folgt:

$$DE = \frac{209{,}785 \,.\, \sin 35^\circ\, 15'}{\sin 64^\circ\, 35'} = 134{,}051 \text{ Ruthen,}$$

von der vorigen Angabe um 0,031 Ruthen verschieden, welche Abweichung jener Winkeldifferenz von 1″ zwischen $x + y$ und p zuzuschreiben ist. Nimmt man aus beiden Ergebnissen, als am wahrscheinlichsten, das arithmetische Mittel, dann ergiebt sich

$$DE = 134{,}066 \text{ Ruthen.}$$

Um nun die hierdurch bestimmten Punkte D, E, A, B und C auf ein ausgespanntes Blatt Papier, etwa auf die Planchette eines Meßtisches, nach einem gegebenen Maßstabe mit Sicherheit aufzutragen, pflegt man sich einer oder besser zweier gewöhnlich unter einander rechtwinkliger Abscissenlinien zu bedienen, wovon in Fig. 155 nur eine einzige, nämlich PQ, abgebildet erscheint, noch dazu unter der Begünstigung, daß solche mit einer der Dreiecksseiten, hier mit AD, zusammenfällt. Leicht ist es dann, die jenen Punkten zugehörigen Ordinaten ET, CU und BM, sowie deren bezügliche Abscissen TD, TU, TA und TM zu berechnen und gehörigen Ortes aufzutragen.

§. 147.

Vom Centriren der Winkel.

Beim Trianguliren, d. i. Entwerfen eines trigonometrischen Netzes, ereignet es sich zuweilen, daß das Centrum des Horizontalkreises nicht vertical über denjenigen Punkt gebracht werden kann, welcher entweder schon in die Reihe der Netzpunkte aufgenommen worden oder noch zu denselben zu zählen ist; ein gewöhnlich dann eintretender Fall, wenn von einem Thurme aus Beobachtungen angestellt werden sollen, da hier nur in seltenen Fällen das Instrument lothrecht unter der Thurmspitze angebracht werden kann. D Fig. 156—161 bedeute den Standpunkt des Instrumentes, mittelst dessen der Winkel zweier, nach schon bekannten Netzpunkten A, B gerichteten Visirstrahlen CA und CB, d. i. ∠ ADB, gemessen ist. C sei der unzugängliche, dem Punkte D sehr nahe liegende Netzpunkt, und nun

die Forderung, anzugeben, unter welchem Winkel AB von C aus erscheinen würde.

Die zu diesem Behufe vom Standpunkte D aus zu vollziehenden Operationen sind unter der Benennung des Winkelcentrirens, auch der Reduction des Winkels auf das Centrum der Station bekannt und im Nachfolgenden beschrieben worden.

Zuvörderst haben wir die Relation zwischen dem beobachteten und gesuchten Winkel oder seine Reduction auf das Centrum darzuthun, und finden zunächst in Bezug auf den ersten durch Fig. 156 versinnlichten Fall:

$$\angle ADB = \angle ACD + \angle CAD$$

$$1) \quad \angle ACD = \angle ADB - \angle CAD$$

alsdann in Fig. 157

$$2) \quad \angle ACB = \angle CAD + \angle ADB,$$

in Fig. 158

$$\alpha + \beta = \gamma + \angle CAD + \delta + \angle DBC$$

$$\gamma + \delta = \alpha + \beta - \angle CAD - \angle DBC, \text{ d. i.}$$

$$3) \quad \angle ACB = \angle ADB - \angle CAD - \angle DBC,$$

in Fig. 159

$$\gamma + \delta = \alpha + \angle CAD + \beta + \angle DBC$$

$$4) \quad \angle ACB = \angle ADB + \angle CAD + \angle DBC,$$

in Fig. 160

$$\angle AGB = \angle ADB + \angle CAD$$

$$\angle AGB = \angle ACB + \angle DBC$$

$$5) \quad \angle ACB = \angle ADB + \angle CAD - \angle DBC,$$

endlich in Fig. 161

$$\angle AGB = \angle ADB + \angle DBC$$

$$\angle AGB = \angle CAD + \angle ACB$$

$$6) \quad \angle ACB = \angle ADB - \angle CAD + \angle DBC.$$

Da nun $\angle ADB$ der gemessene ist, so wird es jetzt darauf ankommen, die Winkel CAD und DBC zu bestimmen, wozu mehrere Wege führen.

Hinsichtlich der zu vollziehenden Rechnung würde es am einfachsten sein, aus irgend einem Punkte, etwa E, der Seite AC des Dreieckes ABC oder nach Befinden deren Verlängerung den Winkel AED durch Beobachtung zu finden und ihn zu $\angle ADE$ zu rechnen,

worauf die Ergänzung der Winkelsumme zu 180° den Winkel CAD geben würde, d. i.

$$CAD = 180° - (ADE + AED).$$

Auf ähnliche Art könnte man den Winkel DBC bestimmen, und hätte nun, was zur Angabe des Winkels bei C erforderlich ist. Inzwischen bietet diese Centrirungsmethode in der Praxis mancherlei Unzuträglichkeiten dar und wird darum gewöhnlich nicht angewendet.

Ein anderes Verfahren besteht darin, von D aus Perpendikel auf die Schenkel des Centriwinkels, d. i. auf AC und BC zu fällen und solche mit der größten Genauigkeit zu messen, worauf, wenn überdies AB und der Winkel ABD bekannt sind, für die beiden ersten Fälle folgende Schlüsse zur Größenbestimmung des fraglichen Winkels ACB führen:

$$AB : AD = \sin ADB : \sin ABD$$

$$AD = \frac{AB \,.\, \sin ABD}{\sin ADB}.$$

Ferner ist zur Angabe des Winkels CAD im rechtwinkligen Dreiecke ADE

$$DE : AD = \sin CAD : 1$$

$$\sin CAD = \frac{DE}{AD} = \frac{DE \,.\, \sin ADB}{AB \,.\, \sin ABD}.$$

Anlangend die übrigen Fälle, so wird man zunächst auf die Ermittelung der Seiten BD und AD ausgehen und zu dem Ende schließen:

$$BD : AB = \sin BAD : \sin ADB$$

$$AB : AD = \sin ADB : \sin ABD$$

$$BD = \frac{AB \,.\, \sin BAD}{\sin ADB}$$

$$AD = \frac{AB \,.\, \sin ABD}{\sin ADB},$$

alsdann die Winkel CAD und DBC aus folgenden Proportionen ableiten:

$$DE : AD = \sin CAD : 1$$

$$DF : BD = \sin DBC : 1$$

$$\sin CAD = \frac{DE}{AD} = \frac{DE \,.\, \sin ADB}{AB \,.\, \sin ABD}$$

$$\sin DBC = \frac{DF}{BD} = \frac{DF \,.\, \sin ADB}{AB \,.\, \sin ABD}.$$

Oder statt der Perpendikel kann auch die Entfernung DC gemessen werden, und wenn dann noch die Seiten AC und BC bekannt sind, dann ist zur Bestimmung der Winkel CAD und DBC das Erforderliche geboten. Denn in Bezug auf die ersten zwei Fälle reicht schon AC allein hin, indem man hat:

$$CD : AC = \sin CAD : \sin ADC$$

$$\sin CAD = \frac{CD \,.\, \sin ADC}{AC},$$

Wegen der übrigen Fälle kommt zu dieser Formel noch hinzu:

$$\sin CAD = \frac{CD \,.\, \sin ADC}{AC},$$

in welchen beiden Formeln stillschweigend die Forderung der Angabe der Bestandtheile α und β des gemessenen Winkels ADB enthalten ist.

Beispiel. Von einem Thurme aus mögen Beobachtungen nach den Objecten A und B Fig. 158 vorgenommen und gefunden worden sein:

$$\angle ADB = 112° 13'$$
$$\alpha = 50° 4', \text{ daher}$$
$$\beta = 62° 9'.$$

Ferner sei;

$$CD = 8 \text{ Ellen}$$
$$AC = 8000 \text{ "}$$
$$BC = 7500 \text{ "}; \text{ dann ist}$$

$$\angle ADC = 180° - 50° 4' = 129° 56'$$
$$\angle CDB = 180° - 62° 9' = 117° 51', \text{ und nun}$$

$$\sin CAD = \frac{8 \,.\, \sin 129° 56'}{8000} = \frac{\sin 50° 40'}{1000}$$

$$\log \sin CAD = 5{,}8846775$$
$$\angle CAD = 0° 0' 15{,}8''$$

$$\sin DBC = \frac{8 \,.\, \sin 117° 51'}{7500} = \frac{2 \,.\, \sin 62° 9'}{1875}$$

$$\log \sin DBC = 6{,}9745663$$
$$\angle DBC = 0° 3' 14'5''.$$

Es ist daher die Reduction des gemessenen Winkels ADB auf das Centrum C der Station oder

$$\angle ACB = \angle ADB - \angle CAD - \angle DBC$$

$= 112° 13' - 0° 0' 15{,}8'' - 0° 3' 14{,}5''$

$= 112° 9' 29{,}7''$,

mithin von jenem um $0° 3' 30{,}3''$ abweichend.

Anmerkung. In der Regel sind die Perpendikel DE und DF, so wie die Linie DC sehr klein im Vergleich zu den Entfernungen AC und BC. Dann aber genügt schon eine annähernde Angabe dieser beträchtlichen, nicht selten mehrere Meilen betragenden Entfernungen, um eine ganz leidliche Centrirung auszuführen, d. h. eine solche, welche nicht einmal um eine volle Secunde von derjenigen Centrirung abweicht, die unter Zugrundlegung genauer Angaben erhalten worden wäre. Die Winkel CAD und DBC entfallen sonach äußerst spitz, was zu leicht zu bewerkstelligenden Vereinfachungen obiger Formeln führt.

§. 148.

Trigonometrisches Netz.

Vom geometrischen Netze, dessen Begriff bereits im §. 91 festgestellt wurde, unterscheidet sich das trigonometrische Netz keineswegs wesentlich; wie jenes ist auch dieses nichts Anderes, als eine ununterbrochene Folge von Dreiecken, deren Eckpunkte auf dem Felde durch hervorragende Objecte bezeichnet sind. Das erstere erstreckt sich gewöhnlich nur über eine kaum eine Quadratmeile umfassende Gegend, während letzteres mehrere Quadratmeilen einschließt, ja über ein ganzes Land sich ausbreitet. Alsdann geschieht beim geometrischen Netze die Angabe der Netzpunkte unmittelbar auf der Planchette, was beim trigonometrischen Netze endlich zwar auch erfolgt, inzwischen erst, nachdem die gegenseitige Lage der Netzpunkte durch Rechnung bestimmt worden ist, auf den Grund vorangegangener Messungen und Beobachtungen mittelst des Horizontalkreises. Selbst die Reihenfolge der zur Erlangung eines trigonometrischen Netzes dienlichen Operationen — wie schon bemerkt das Trianguliren genannt — unterscheidet sich von der Gewinnung eines geometrischen, mittelst des Meßtisches zu erwerbenden kaum und ist völlig einerlei mit dem Verfahren durch die Boussole. Waren jedoch schon hierbei ohne besondere Genauigkeit übereinstimmende Messungsresultate nicht zu erzielen, so gilt dies in noch höherem Grade vom eigentlichen Trianguliren, indem die Seiten der dann in Betracht kommenden Dreiecke mehrere Stunden, oft Meilen lang sind und der geringste Beobachtungs- oder Messungsfehler schon die nachtheiligsten Folgen auf die Richtigkeit der Ergebnisse äußert.

Der Hergang beim Triangüliren wird am leichtesten an einem

Beispiele zu übersehen sein, daher wir uns eine etwa vier Quadratmeilen umfassende Gegend denken wollen, d. h. eine Bodenfläche von der Gestalt eines dem bezeichneten Inhalte entsprechenden Quadrates, also keinesweges eine längliche oder sonst wie beschaffene; übrigens weder ausschließlich mit Wald bedeckt, noch gänzlich frei, also eine mannigfaltigstes Detail enthaltende Gegend.

Mit der Auswahl von Netzpunkten, entweder für einen Theil, oder besser für das gesammte Terrain, wird der Anfang gemacht, hierbei darauf gesehen, daß die Mehrzahl dieser Punkte natürliche, möglichst weit sichtbare sind, und nur in Ermangelung derselben von künstlichen Gebrauch gemacht. Das künstliche Object oder Signal besteht aus einem völlig geraden Tannen- oder Fichtenstamme von 12 bis 14 Ellen, zuweilen noch größerer Länge und der entsprechenden Dicke, und ist, um es in weiter Ferne deutlich erkennen zu können, abgeschält und an seinem oberen Ende mit einem Strohwische versehen. Unter Benutzung eines Lothes wird die Stange vertical aufgerichtet und mit ihrem unteren Ende dauerhaft im Boden befestigt, so daß sie gegen seitliche Neigung möglichst geschützt ist. Verschiedene Befestigungsarten der Stange im Boden sind ausgeübt und empfohlen worden, worunter wir nur ein Paar der einfacheren erwähnen wollen. Der Boden wird um den künftigen Fuß der Stange herum 1 bis 2 Ellen tief und angemessen weit ausgehoben und in die entstandene Grube die Stange lothrecht aufgestellt, nachdem dieselbe zuvor mit einem sogenannten Querl versehen ist. Derselbe besteht in zwei quer durch die Stange hindurch gesteckten und an dieser wohl befestigten Hölzern a, a Fig. 162, woran sowie an der Stange selbst der Boden festgestampft wird, was für sich allein schon einen sicheren Stand gewährt, den man jedoch durch Anbringung von 3 bis 4 Stützen b, b beträchtlich steigern kann.

Auch kann, ohne den Boden vorher aufzugraben, in denselben hinein ein unten zugespitzter Pfahl a Fig. 163 getrieben, auf denselben die Signalstange gestellt und diese entweder blos mittelst Stützen gegen seitliche Neigung bewahrt oder wie vorhin noch mit anderen Befestigungen in Verbindung gebracht werden. Das Herausnehmen und Wiedereinbringen der Stange c in den Erdboden ist dann mit weniger Umständlichkeiten verknüpft, solches aber erforderlich, wenn es darauf ankommt, das Instrument über den Netzpunkt selbst aufzustellen. Der Pfahl a dient ferner zur Erhaltung des Netzpunktes, sobald — wie es sich leider häufig ereignet — die Signalstange durch

unbefugte Hand hinweggenommen worden wäre, da dieselbe weniger leicht beseitigt werden kann.

Ist schon bei einem kleineren Netze die Erhaltung der Netzpunkte von Wichtigkeit, so ist dies noch weit mehr bei einem größeren, über ein ganzes Land sich ausbreitenden trigonometrischen Netze der Fall, von dem oft nach Jahren noch Gebrauch gemacht werden soll, eines Theils zur Erledigung später entstandener Zweifel an der Richtigkeit der Aufnahme, anderen Theils und insbesondere zur Fortsetzung der schon vorhandenen Triangulirung oder Benutzung derselben Behufs der Detailaufnahme. Da nun Stangen ein ungeeignetes Mittel zur dauernden Erhaltung der Netzpunkte sind, so pflegt man sich statt derselben gehörig tief in den Boden eingelassener, prismatisch geformter Steine zu bedienen, nach Art der Rainsteine, und dieselben auf ihren oberen Flächen mit einem eingearbeiteten Kreuze zu versehen, dessen Mitte den eigentlichen Netzpunkt bezeichnet. Entweder ragt nun der Stein über den Boden hervor oder er ist mit Erdreich bedeckt, da dann bezüglich ein einziger Stein genügt oder zur Auffindung desselben um diesen Hauptstein herum mehrere hervorragende Nebensteine eingesenkt sind, deren innere Kanten a, b, c, d Fig. 164 die Eckpunkte eines Quadrates bezeichnen, für welches der Durchschnitt beider Diagonalen mit dem wahren Netzpunkte zusammenfällt. Als die großartigsten Beispiele der Bezeichnung von Netzpunkten verdienen die bei der französischen Gradmessung angewendeten erwähnt zu werden, deren Beschreibung in dem in §. 23 genannten Werke von Méchain und Delambre zu finden ist, und worüber wir nur versichern wollen, daß von dem Principe ausgegangen wurde, die Signale nicht nur von größter Dauer, sondern auch zu jeder fernern Winkelbeobachtung sofort geeignet einzurichten.

§. 149.

Das Quadrat ABCD Fig. 165 stelle die vorhin angenommene Gegend von 4 Quadratmeilen Areal dar. DE und EF sind die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier einander gegenüber liegender Seiten oder die gemeinschaftlichen Grenzen der einzelnen Quadratmeilen selbst, die wir zur leichteren Unterscheidung als erste, zweite u. s. w. auffassen und demgemäß durch I., II. . . . . bezeichnen wollen. In der Gegend mögen die Netzpunkte a, b, c, d . . . . r, s und t gewählt und nach Befinden dem vorigen §. entsprechend bezeichnet worden sein. Besonders hervorragende und zur Aufstellung geeignete Netzpunkte sollen die Punkte c und k, bezüglich in I. und III.

liegend, sein, während das Terrain zwischen c und r zu directer Messung sich am besten eignen mag. Dann wird man vorerst die Visirebene des Fernrohres oder der Dioptern genau auf 0° des Horizontalkreises einstellen und letzteren so lange drehend bewegen, bis das Object a in genannter Ebene befindlich ist, und nun unter einseitiger Bewegung des Lineals allein aus c weiter nach den Objecten b, e, f, k, r, s und d visiren, hierauf die Winkel aller folgenden Visirlinien mit der ersten ca beobachten, nämlich acb, ace, acf . . . ., solche im Winkelbuche anmerken, durch Subtraction die Winkel je zweier benachbarter Visirlinien angeben und zur Prüfung nachsehen, ob die Summe der Reste vier rechten Winkeln entspricht; außerdem, wenn irgend möglich, durch c hindurch ein Alignement XY nach sehr entfernten Richtungen X, Y legen, vielleicht sogar ein zweites VZ, und deren Neigungswinkel unter sich und zu ac bestimmen. Derartige Alignements haben auf den späteren Gebrauch des trigonometrischen Netzes zur Detailaufnahme der Gegend mittelst des Meßtisches Bezug und sind dafür, wie bereits im §. 105 dargethan wurde, von besonderem Werth. Aeußerst günstig würde der Umstand sein, sobald ck selbst in das Alignement zweier ebenfalls weit entfernter Richtobjecte W und U hineinfiele.

An diesen ersten Schritt reihet sich das Messen der Linie cr, d. i. der Basis oder Standlinie, in Bezug auf welche Operation das im §. 23 über genaue Messungen Angeführte in seiner vollsten Bedeutung gilt, und nur noch bemerkt zu werden verdient, daß das Trianguliren zu um so übereinstimmenderen Resultaten führt, sobald man sich mit einer einzelnen Messung nicht begnügt, vielmehr diese mehrmals wiederholt wird, und je größer die gemessene Basis selbst gewesen ist. Hiernach erfolgt die Aufstellung des Winkelmeßinstrumentes über k, und nach Erledigung derselben das Beobachten der Winkel unter den Visirlinien kc, ki, kl . . . ., deren Differenzen wiederum den Winkeln je zweier benachbarter Visirlinien kc und kf, kf und ki, ki und kl . . . ., d. i. den Winkeln ckf, kfi, ikl . . . . entsprechen. Die Summe der letzteren wird vier rechten Winkeln um so näher kommen, mit je größerer Schärfe das Beobachten der Winkel statt fand.

Der Standpunkt k wird so ausgewählt worden sein, daß man von ihm aus nicht nur nach einer großen Anzahl neuer Netzpunkte visiren kann, sondern auch nach den aus c betrachteten, wie hier nach s, d, e und b, wofür die Winkel der betreffenden Visirlinien wie vorhin zu bestimmen sind. a sei von k aus nicht wahrnehmbar ge-

wesen, und wäre es wirklich der Fall, so müßte, da ac von diesem Standpunkte aus unter sehr spitzem Winkel erschien, im Winkelbuche die Bemerkung gemacht werden, daß dieser Netzpunkt der Bestätigung bedürfe. Aehnliches gilt vom Punkte b.

Hiermit sind nun schon die zur Lagenbestimmung einer ziemlichen Anzahl von Netzpunkten tauglichen Elemente erlangt, mit deren fernerer Ansammlung, wie mit Berichtigung der bereits erworbenen zunächst fortzufahren ist. Als einer der passendsten Standpunkte erscheint der zweite Endpunkt r der Basis, sobald angenommen wird, daß von ihm aus neue Objecte p und q, desgleichen frühere, wie z. B. s, d und f, gesehen werden können. Die Wahrnehmbarkeit von k ist für sich einleuchtend und folgt daraus, weil r von k aus erkannt werden konnte. Mittelst der in r zu erwerbenden Stücke ergiebt sich nochmals die gegenseitige Lage der Punkte c, k, r, s, d und f, mithin deren Bestätigung.

Einigen Aufenthalt verursachen noch die in den Quadratmeilen I. und IV. liegenden Netzpunkte a und t. Sei d die Spitze eines Thurmes, von welchem aus a, desgleichen b zwar gesehen, das Instrument aber nicht vertical unter der Thurmspitze aufgestellt werden könne, dann wird man die Winkel der vom gewählten Standpunkte nach c, a und b geführten Visirlinien messen und solche auf den Netzpunkt d, d. i. auf das Centrum der Station reduciren, alles hierzu Erforderliche aber aus den vorangegangenen Beobachtungen entnehmen können. Anlangend den Punkt t, so sei zu ihm nicht anders zu gelangen, als von einem innerhalb des Dreieckes qsr zu wählenden Standpunkt, etwa u, dessen Lage zu s, r und q zur Zeit darum noch nicht bestimmt werden kann, weil die von q unbekannt ist. Nichtsdestoweniger wird man dann von q aus nach t hin visiren und die Winkel tus so wie tuq messen, mit dem Vorbehalt, den Netzpunkt q von einem anderen Punkte, vielleicht von p aus, zu bestimmen. Die Station p gestatte freie Aussicht, zunächst nach den früheren Netzpunkten q, r, k und m, zugleich aber auch nach dem neuen o; endlich sei von hier aus i wahrnehmbar, daher die Winkel der auf diese Punkte bezüglichen Visirlinien wie die früheren gemessen werden mögen. Offenbar darf jetzt nur in dieser Weise fortgefahren werden, um nach und nach sämmtliche zur Berechnung der gegenseitigen Lage der Netzpunkte gehörigen Erfordernisse zu erhalten.

§. 150.

Damit nicht willkürliche 4 Quadratmeilen zur Darstellung kommen, so ist die Angabe, d. h. die Bezeichnung durch Objecte, sowohl

der Richtung einer äußeren Grenzlinie derselben, etwa RT, erforderlich, als auch zweier fester Punkte in derselben, deren einer entweder Eckpunkt selbst oder wie z. B. Q ein Punkt sein muß, welcher von einem der Eckpunkte eine gegebene Entfernung hat. Beide Punkte, hier A und Q, sind wie die übrigen Netzpunkte zu behandeln, auch ist zu größerer Sicherheit in deren Alignement ein dritter, P, zu wählen und mit ihm, wie so eben bemerkt wurde, zu verfahren. Ferner hat man die Größe einer Meile festzusetzen, wofür wir in Bezug auf das Königreich Sachsen die unter Nr. 10 und 11 in §. 6 enthaltenen Angaben benutzen, außerdem aber zur Beurtheilung ihrer relativen Größe im Vergleich zur Meilengröße anderer Staaten folgende Uebersicht berücksichtigen wollen:

Es ist die	ehemalige sächsische Polizeimeile	=	9066,66 Meter
= = =	laut Verordnung vom 7. December 1840 bereits eingeführte sächsische Meile	=	7500,00 =
= = =	Oesterreichische Postmeile . .	=	7586,45 =
= = =	Preußische Meile	=	7532,48 =
= = =	Dänische Meile	=	7526,81 =
= = =	Böhmische Meile	=	7469,15 =
= = =	Würtembergische Meile . . .	=	7448,74 =
= = =	Hannöversche Meile	=	7419,20 =
= = =	geographische oder deutsche Meile	=	7418,51 =
= = =	Bayerische Meile	=	7415,00 =
= = =	Weimarische Meile	=	7358,50 = *)

Oefters wird auch zur leichteren Auftragung des trigonometrischen Netzes die Meilengröße in runder Zahl angenommen und später auf die landesübliche oder geographische Meile reducirt, wie dies z. B. bei Gelegenheit der Triangulirung Sachsens geschah, wo 12,000 Ellen auf eine Meile gerechnet wurden. Die Auftragung des Netzes selbst erfolgt, nach vorhergegangener Berechnung desselben, entweder durch allmälige Aneinanderreihung der Netzdreiecke, unter Gebrauch der drei Seiten eines jeden Dreieckes, oder weil dieses Verfahren wegen der Unsicherheit der Bogenschnitte wenig Bürgschaft für seine Richtigkeit gewährt, besser, und darum gewöhnlich, mittelst Abscissen und Ordinaten.

*) Eine sehr umfassende Zusammenstellung der Meilengrößen verschiedener Staaten enthalten die bereits mehrmals angeführten mathematischen Tafeln von Vega S. 627.

Angemessen würde es im vorliegenden Falle sein, RT als Abscissenlinie anzusehen und vom Eckpunkte A aus die Abscissen zu zählen, was natürlich die Erwerbung derjenigen Elemente bedingt, wodurch die Netzpunkte mit der Abscissenlinie in Verbindung zu bringen sind, die jedoch schon stillschweigend gegeben erscheinen, sobald A und zur Prüfung auch Q als Netzpunkte behandelt wurden. Denn im Netzdreiecke AcQ sind sämmtliche Seiten und Winkel bekannt, daher auch ∠ cAQ, während im △ cAa ∠ Aca durch Messung gefunden worden ist. Da nun auch ac als Seite eines Netzdreieckes gegeben ist, so läßt sich hieraus die Seite Aa durch Rechnung bestimmen; desgleichen ∠ cAa. Wird nun vom Netzpunkte a aus ein Perpendikel, nämlich av, auf AB gefällt, d. i. dieses Punktes Ordinate dargestellt, so hat man im rechtwinkligen Dreiecke Ava

$$\angle\, aAv = \angle\, cAQ - \angle\, cAa,$$

daher hinreichendes Material zur Berechnung der Abscisse Av und der Ordinate av des Netzpunktes a. Es ist:

$$Av = Aa \,.\, \cos aAv$$

$$av = Aa \,.\, \sin aAv.$$

Auf die nämliche Art folgt für den Netzpunkt b, im rechtwinkligen Dreiecke Abw, dessen Hypotenuse Ab als bekannt angesehen werden muß und dessen ∠ bAw man kennt, weil wie vorhin ∠ cAQ gegeben ist:

$$\angle\, bAw = \angle\, cAQ - \angle\, cAb$$

$$Aw = Ab \,.\, \cos bAw$$

$$bw = Ab \,.\, \sin bAw,$$

und für den Punkt c

$$Az = \cos cAw$$

$$cz = \sin cAw.$$

Hinsichtlich des Punktes d schließe man:

$$\angle\, dAQ = \angle\, dAc + \angle\, cAQ$$

$$Ax = Ad \,.\, \cos dAQ$$

$$dx = Ad \,.\, \sin dAQ.$$

Ebenso ist mit der Bestimmung der Abscissen und Ordinaten für die Netzpunkte der drei übrigen Quadratmeilen zu verfahren. Was jedoch die Auftragung der Hauptalignements XY, VZ und WU anlangt — deren eins die nach §. 104 astronomisch bestimmte Mittagslinie bedeuten kann —, so bedarf es hierzu nur der Angabe der Ent-

fernungen ihrer Durchschnittspunkte vom Anfangspunkte A der Abscissen. Zur Bestimmung von AI dient das Dreieck AIc, worin ∠ AcI durch Beobachtung, die Seite Ac und ∠ cAI hingegen durch Rechnung bekannt sind, mithin auch ∠ AIo gegeben ist, daher man hat:

$$AI = \frac{Ac \,.\, \sin AcI}{\sin AIc}.$$

Leicht ergeben sich jetzt auch AM, DL und DK, von denen letztere beiden Längen für überflüssig angesehen werden könnten, sobald nur BN und DO bekannt sind, deren Nützlichkeit jedoch im weiteren Verlaufe gegenwärtiger Betrachtung, insbesondere bei der Eintheilung der aufzunehmenden Bodenfläche in Viertel- und Sechszehntel-Quadratmeilen oder, wie man es nennt, in Sectionen, genügend erhellen wird.

§. 151.

Was nun die Auftragung des trigonometrischen Netzes anlangt, so erfolgt dieselbe je nach der gewählten Maßverjüngung auf einer größeren oder kleineren ausgespannten Papierfläche und beginnt mit der Darstellung des Quadrates ABCD aus dessen beiden Diagonalen. Gesetzt, das Netz sei in $\frac{1}{20000}$ seiner linearen Größe darzustellen und dabei die neue sächsische, 7500 Meter betragende Postmeile zum Grund zu legen, dann wird die Anzahl Zolle $= x$, welche auf eine Meile kommen, unter Benutzung der im §. 4 enthaltenen Tabelle, durch folgenden Kettenansatz gefunden:

x Zoll	$\frac{1}{20000}$ Meile
1 Meile	7500 Meter
0,28319 Meter	12 Zoll

$$x = \frac{7500 \,.\, 12}{0{,}28319 \,.\, 20000} = 15{,}89038 \ldots \text{ oder}$$

circa 15,89 Zoll.

Hiernach ist $AB = 2 \,.\, 15{,}89 = 31{,}78$ Zoll, mittelst welcher Angabe nun sogleich die Construction des Quadrates ABCD vollzogen werden könnte, oder auch durch dessen Diagonalen $AC, BD = 31{,}78\sqrt{2} = 44{,}945$ Zoll. Nach erfolgter Darstellung des Quadrates und zugleich dessen Prüfung geschieht die Auftragung der Netzpunkte am zuverlässigsten dadurch, daß man die betreffenden Abscissen und Ordinaten auf je zwei einander gegenüber liegenden Quadratseiten angiebt, z. B. für a, indem man die berechnete Ordinate von A aus auf AD trägt, ebenso

von B nach C, dergestalt, daß $A\alpha = B\beta = va$ wird. Hierauf wird die Abscisse dieses Punktes, nämlich Av von D nach y übertragen, demnach $Dy = Av$ gemacht, worauf es nur noch des Ziehens der Verbindungslinien $\alpha\beta$, vy bedarf, um im Durchschnitt beider dem Netzpunkte a seine ihm zukommende Lage anzuweisen. Auf gleiche Art ist mit b und so mit allen übrigen Punkten zu verfahren.

§. 152.

Liegt nun das trigonometrische Netz vollendet vor und ist es zugleich allenthalben geprüft, dann folgt dessen Nutzanwendung zur Erlangung eines geometrischen, d. h. mit dem Meßtische darzustellenden Netzes, und es wird das fernere Verfahren von dem beabsichtigten Verjüngungsverhältnisse der Detailaufnahme einestheils, anderentheils und gleichzeitig aber auch von der zu erzielenden Genauigkeit abhängen. Sollte die Aufnahme schon zweckentsprechend erscheinen, falls man eine Quadratmeile auf eine Planchette rechnete, wie dies u. A. bei topographischen Vermessungen der Fall ist, dann kann sofort zur Ausführung des geometrischen Netzes geschritten werden. Denn nun handelt es sich blos darum, auf einer Planchettenfläche ein Quadrat zu zeichnen oder Quadrate auf vier Planchetten nach einander, sobald die Detailaufnahme von vier Geometern zugleich verrichtet werden soll, welche Operation wesentlich erleichtert wird, dafern die Seiten dieser neuen Quadrate zu den Seiten der ersteren in einem einfachen Verhältnisse stehen, z. B. das Doppelte von jenen sind. Die Uebertragung der auf eine jede Planchette fallenden Netzpunkte erfolgt ganz so, wie die ursprüngliche graphische Darstellung derselben, und bedarf daher fernerer Anleitung nicht.

Dasselbe gilt von der Benutzung der nunmehr auf den Planchettenflächen vorhandenen Netzpunkte Behufs der Detailaufnahme selbst, da diese in der Lehre von den Meßtischoperationen gezeigt worden ist. Nur daran werde noch erinnert, wie nützlich zur Uebertragung der Hauptalignements XY, VZ u. s. w. die Kenntniß der Entfernungen ihrer Durchschnittspunkte M, L, K .... von den Quadratseiten sei, ja daß ohne diese die Fortbringung derselben auf den verschiedenen Planchettenflächen nicht einmal ausgeführt werden könnte.

§. 153.

Wäre jedoch der Maßstab für die Detailaufnahme ein größerer, müßte man, um die Gegenstände mit gehöriger Ausführlichkeit dar-

stellen zu können, nur den vierten Theil einer Quadratmeile auf eine Planchette nehmen, dann würde vorerst eine Zerlegung des Quadrates ABCD in 16 gleich große Quadrate statt finden und dies durch Vereinigung je zweier gegenüberliegender Halbirungspunkte der Seiten einer Quadratmeile mittelst gerader Linien geschehen. Auf solche Art sind die Linien $\gamma\delta$, $\psi\omega$, $\varphi\varepsilon$ .... entstanden, und es ist hierdurch jede der vier Quadratmeilen in Viertel oder Quadratstunden zerlegt worden, z. B. I. in $A\varepsilon\lambda\gamma$, $\varepsilon D\nu\lambda$, $\gamma\lambda\tau F$ und $\lambda\nu H\tau$, welche bezüglich die festen Punkte Aa, b, d und c enthalten. Obschon diese allein, da die Lage ihrer Verbindungslinien, wie aA, ad, ab .... bekannt ist, zur Detailaufnahme genügen, so wird letztere gleichwohl weniger Umständlichkeiten unterliegen, auch weit zuverlässigere Ergebnisse herbeiführen, falls auf einer jeden Planchette neben den oben besprochenen Hauptalignements drei, mindestens aber zwei Netzpunkte gegeben werden, was nur durch fortgesetzte Triangulirung zu erlangen ist. Diese selbst kann nun, sobald mindere Genauigkeit verlangt wird, mittelst des Meßtisches, dessen Planchette die erste Quadratmeile ADHF enthält, erfolgen, oder zur Erreichung zuverlässiger Messungsresultate unter wiederholter Anwendung des Horizontalkreises. In beiden Fällen wird man auf die Ansammlung fernerer Netzpunkte ausgehen, deren gegenseitige Lage beim Meßtisch ohne Weiteres durch graphische Darstellung erfolgt, während der Horizontalkreis zuvor die Berechnung der gegenseitigen Lage der Netzpunkte erheischt. Die ursprünglich erlangten Netzdreiecke wie acd, abc...., pflegt man dann durch die Benennung Hauptdreiecke, auch Dreiecke ersten Ranges, von den später entstehenden zu unterscheiden, auch bei Prüfung ersterer die letzteren stets zum Grunde zu legen; die Auftragung endlich der reinen Netzpunkte aber genau so zu vollziehen, wie solches mit den Hauptnetzpunkten geschah. Nach erfolgter Auftragung sämmtlicher Netzpunkte auf die Planchetten verschiedener Meßtische kann dann von mehreren Geometern zugleich die Detailaufnahme in Angriff genommen und so die Arbeit nicht nur ungemein gefördert werden, sondern es sind hierdurch auch Elemente genug geboten, um im Verlaufe der betreffenden Operationen jederzeit Prüfungen derselben vorzunehmen, zu geschweigen des Vortheils, welchen eine derartige Disposition in geschäftlicher Hinsicht gewährt, daß nämlich sämmtliche Arbeiten einer obersten Leitung untergeordnet und vermittelst derselben fortwährend controlirt werden können.

Sollte für ganz specielle Zwecke der Aufnahme besagter vier Quadratmeilen, welche jetzt auf 16 Planchetten vertheilt erscheinen, z. B.

für Canal-, Straßen- oder andere Unternehmungen, ein noch größerer Maßstab wünschenswerth erscheinen, dann dürfte nur eine fernere Zerlegung derselben nach Befinden in 64 gleiche Quadrate vorgenommen, übrigens aber ganz so wie vorhin verfahren werden. Jedenfalls könnte nachher die Triangulirung von je vieren dieser neuen Unterabtheilungen blos mittelst des Meßtisches erfolgen, und es käme zuletzt nur darauf an, mit größter Genauigkeit die Uebertragung der hierdurch gewonnenen Netzpunkte auf fernere Planchetten zu bewerkstelligen.

In ähnlicher Art ist bei der Aufnahme einer größeren Bodenfläche, etwa eines ganzen Landes, zu verfahren, nur daß dann auf die Krümmung der Erdoberfläche Rücksicht zu nehmen ist, daher solche nach §. 8 nicht mehr in das Gebiet der niederen Feldmeßkunst gehört.

Endlich würde zur Vervollständigung der Aufnahme obiger vier Quadratmeilen noch die Angabe eines Punktes derselben in Bezug auf seine geographische Lage, d. h. seine Breite und Länge gehören, — deren Bedeutung wir hier als bekannt voraussetzen — für ein ganzes Land sogar mehrerer thunlichst weit von einander entfernter Netzpunkte. Für unser gewähltes Beispiel könnte die Angabe der geographischen Breite, etwa für den Punkt c mit der Bestimmung der Mittagslinie verbunden werden, und man dürfte nur das in §. 104 zur Darstellung der letzteren mitgetheilte Verfahren, für welches ein in der Nähe des Polarsternes befindlicher Stern benutzt wurde, dahin erweitern, daß auch die Winkel beobachtet würden, welche Gesichtslinien nach demselben im Augenblicke der oberen und unteren Culmination mit der Horizontalebene bilden, und aus beiden das arithmetische Mittel nehmen.

Wäre z. B. der eine 54° 25′, der andere 47° 15′, so würde die geographische Breite des Netzpunktes c

$$\frac{54^\circ\,25' + 47^\circ\,15'}{2} = 50^\circ\,50'$$

betragen, unberücksichtigt jedoch der Strahlenberechnung.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, und es möge dessen Darlegung in thunlichster Kürze gestattet sein. In Fig. 166 stelle der Kreis cnqse den Meridian des Netzpunktes c dar, n und s beziehungsweise den Nord- und Südpol der Erde, also ns die Erdare, np deren Verlängerung und p den nördlichen Weltpol. o bedeute einen in dessen Nähe befindlichen Stern in seiner oberen, u denselben in der unteren Culmination; ferner cm den Erdhalbmesser, df den Horizont

des Netzpunktes c, gh eine zu diesem durch den Erdmittelpunkt gedachte parallele Ebene, endlich eq den Aequator der Erde. Bekanntlich heißt nun der zwischen c und dem Aequator enthaltene Bogen des Meridians von c, oder der Winkel emc, dessen geographische Breite und ist dem Winkel pmh gleich, denn:

$$\angle \text{emc} + \angle \text{cmn} = 90°$$

$$\angle \text{cmn} + \angle \text{pmh} = 90°, \text{ daher}$$

$$\angle \text{emc} = \angle \text{cmn}.$$

Da jedoch der Erdhalbmesser verschwindend klein ist gegen die außerordentlich große Entfernung des Circumpolarsternes o, dessen Bahnmittelpunkt den Pol p am Himmel bezeichnet, so wird es für die Angabe der Größe des Winkels pmh gleichgültig sein, ob der den Punkt p enthaltende Schenkel desselben durch den Erdmittelpunkt m oder durch einen Punkt c an der Erdoberfläche hindurchgeht, d. h. man kann $\angle \text{pmh} = \angle \text{pcf}$ setzen. Gäbe es nun an der Stelle von p einen Stern, so würde der Winkel eines Gesichtsstrahles nach demselben mit dem Horizonte auch sofort die gesuchte geographische Breite darstellen, also die Beobachtung der oberen und unteren Culmination eines anderen Sternes überflüssig sein. Da dem jedoch nicht so ist, vielmehr selbst der dem Weltpole am nächsten stehende Polarstern im Schwanz des kleinen Bären noch um 1° 44′ von demselben abweicht, so ist jene Beobachtung unerläßlich.

Weil ferner:

$$\angle \text{omp} = \angle \text{pmu}$$

$$\angle \text{pmh} = \angle \text{omh} - \angle \text{omp}$$

$$\angle \text{pmh} = \angle \text{umh} + \angle \text{pmu}, \text{ so ist}$$

$$2 \cdot \angle \text{pmh} = \angle \text{omh} + \angle \text{umh}, \text{ daher}$$

$$\angle \text{pmh} = \frac{\angle \text{omh} + \angle \text{umh}}{2}$$

$$= \frac{\angle \text{ocf} + \angle \text{ucf}}{2} = \angle \text{pcf},$$

und mithin obige Regel gerechtfertiget.

Minder leicht ist zur Angabe der geographischen Länge des Netzpunktes c zu gelangen; am einfachsten noch durch gleichzeitige Beobachtung einer plötzlichen Feuererscheinung. Würde an einem östlich von c gelegenen Punkte, dessen geographische Länge bereits bekannt wäre, eine Pulverexplosion veranstaltet und mittelst einer guten, einen ganz gleichförmigen Gang nach mittlerer Sonnen- oder Sternzeit habenden Se-

cundenuhr — besser eines eigentlichen Chronometers — der Augenblick derselben angemerkt, und geschähe dies gleichzeitig in c, dann könnte aus der Differenz beider Zeiten auf den Längenunterschied beider Orte geschlossen werden. Entspräche z. B. dem östlich gelegenen Orte eine geographische Länge von 30° 45′, und betrüge die Zeitdifferenz 1 Minute, so würde c 0° 15′ westlich liegen, also eine geographische Länge von 30° 35′ haben. Am einfachsten jedoch erfolgt die Längenbestimmung durch tragbare Taschenchronometer, worüber, so wie über genauere astronomische Längen-, desgleichen Breitenbestimmungen auf die größeren Schriften astronomischen Inhalts verwiesen werden muß, und wir fügen nur noch bei, daß in obigem Falle der vier Quadratmeilen bloße Perpendikel aus den Netzpunkten auf die Mittagslinie von c und die zu ihr durch diesen Punkt geführte Rechtwinklige zur Längen- und Breitenbestimmung dieser Netzpunkte völlig hinreichen.

Viertes Capitel.

Vom Abstecken der Figuren.

§. 154.

Ist nach einer oder der anderen der im Vorangehenden beschriebenen Vermessungsmethoden der Plan einer Gegend zu Stande gekommen, dann pflegt eine der gewöhnlichsten Nutzanwendungen desselben darin zu bestehen, daß man in den Plan Entwürfe mancherlei Art einträgt, z. B. von Pflanzungen, Straßen, Canälen oder anderen Bauunternehmungen, hierauf aber deren Verwirklichung in der Gegend selbst fordert. Dazu bedarf es der Bezeichnung der Grenzen dieser Entwürfe auf dem Felde durch passende Objecte, Stäbe, Pfähle u. dergl., welche Operation man unter dem Abstecken der Figuren begreift. Hierzu eignet sich der Meßtisch ganz besonders, obschon auch Fälle vorkommen, welche gleichzeitige Anwendung der Meßkette und des Winkelkreuzes, der Boussole oder eines anderen Winkelmeßinstrumentes erheischen können.

Hierbei unterstützt das im ersten und zweiten Capitel über Absteckung von geraden Linien, rechten Winkeln, Parallelen u. s. w. Mitgetheilte wesentlich und dergestalt, daß es kaum rathsam erscheint,

sich vor erlangter Uebung im Ausführen jener einfachen Operationen mit dem Abstecken von Figuren zu befassen. Letzteres aber wird nur der Behandlung einer geringen Anzahl der merkwürdigeren Fälle bedürfen, um daraus das in anderen Fällen Erforderliche zu entnehmen.

§. 155.

Aufgabe. Vermittelst des Meßtisches die innerlich unzugängliche Figur abcdef Fig. 167 auf dem Felde abzustecken.

Auflösung. Der Plan der Gegend sei auf der Planchette enthalten und hierdurch Gelegenheit geboten, den Meßtisch an einer beliebigen Stelle, etwa im Punkte m des Alignements XY zu orientiren. Sobald dies erfolgt ist, messe man nach dem Maßstabe des Planes die Entfernungen des Standpunktes m von den Eckpunkten a, f, und trage die gefundenen Längen im natürlichen Maße vom Lothpunkte für m aus, in den durch das Diopterlineal bezeichneten Richtungen ma, mf, auf dem Terrain auf, dann ergeben sich die Eckpunkte A und F der geforderten Figur. Vor dem Abheben des Meßtisches von dieser Stelle versäume man nicht zu untersuchen, ob in den Richtungen md, mc, me.... natürliche Objecte vorhanden sind, oder bringe wenigstens in einer, etwa md, künstliche Objecte V, W an, um später für den noch zu bestimmenden Eckpunkt D eine Bestätigung zu haben.

Hierauf ist ein zweiter Standpunkt, etwa n, im nämlichen Alignement XY zu wählen und von ihm aus in Bezug auf die Eckpunkte E und F genau so wie vorhin zu verfahren, wobei sich für A und F Bestätigungen ergeben. Ferner wird der Meßtisch in p aufgestellt und entweder wiederum in einem Alignement oder nach zuverlässigen festen Punkten der Gegend orientirt, dann aber das vorige Verfahren zur Erlangung der Eckpunkte C, B, A angewendet. Wurden die schon bestimmten Eckpunkte A, F, E durch Stäbe bezeichnet, so müssen sich diese jetzt bezüglich in den Visirlinien pa, pf und pe vorfinden. Die Bestimmung von D könnte, sollte eine fernere Aufstellung des Meßtisches nicht geschehen, dadurch erfolgen, daß man einen Gehülfen nöthigte, einen Stab in der Richtung von pd auszustecken, während ein anderer Gehülfe den Stab in das Alignement VW einrichtete, welche Bestimmungsart offenbar auch auf andere Eckpunkte anzuwenden wäre. Dadurch würden nicht nur Meßtischaufstellungen, sondern auch directe Messungen erspart, und man hätte gleichwohl Gelegenheit, die erhaltenen Eckpunkte zu prüfen, indem nur zuzusehen wäre, ob die von verschiedenen Standpunkten nach denselben gezogenen Vi-

sirlinien sich in den gleichbedeutenden Eckpunkten auf der Planchette durchschnitten.

Zusatz. Wäre die Figur im Innern zugänglich und das Terrain frei, dann sieht man ein, daß die verlangte Absteckung von einem einzigen Standpunkte des Meßtisches aus erfolgen könnte. Auch folgt von selbst, wie von diesem Verfahren zur Absteckung der Theilungslinien, etwa der Linie GH, bei Parcellirung von Grundstücken, nicht minder bei Absteckung von Straßen und Plätzen und in unzähligen anderen Fällen Gebrauch zu machen sei.

§. 156.

Aufgabe. Es sei unter Zugrundlegung des Planes einer flachen Gegend ein durch dieselbe hindurchführender Straßenzug entworfen worden. Man verlangt die Absteckung desselben auf dem Felde.

Auflösung. A und D Fig. 168 mögen die durch eine Straße mit einander zu verbindenden, allein nicht auf dem Felde, sondern nur auf dem Plane bezeichneten Punkte vorstellen. Nur von ersterem, nämlich von A, sei bekannt, daß derselbe zwischen zwei deutlich hervorragenden Objecten W und Z sich befinde.

Das Einfachste würde nun gewesen sein, wenn man die fragliche Straße in der Richtung von AD gewählt hätte. Inzwischen habe dies, Umstände halber, nicht bewerkstelliget werden können, vielmehr ist man genöthigt gewesen, den Straßenzug von A über B und C nach D zu führen; und weil nur eine Meßkette, sonst kein Meßgeräth, selbst nicht einmal ein Winkelkreuz zu Gebote steht, so sei das erste Stück AB dergestalt gewählt worden, daß in dessen Richtung wiederum zwei auf dem Plane angemerkte, in der Gegend sich wohl auszeichnende und dabei zuverlässige Richtobjecte X, Y gelegen sind. Ferner möge auf dem Plane CD bis zu den Durchschnitten E, F bezüglich mit AB und AW verlängert und nach verjüngtem Maße die Größe der Seiten der Dreiecke AED, AFE und BEC bestimmt worden sein, so daß daraus nöthigenfalls die Winkel derselben durch Rechnung gefunden werden können.

Nach dieser Vorbereitung beginnt die geforderte Absteckung mit der Angabe des Punktes A auf dem Felde dem §. 13 gemäß. Hierauf ist in der Richtung AW das Stück AF aufzutragen und der Endpunkt F durch einen Stab zu bezeichnen, alsdann AB, wobei sich zur Bezeichnung des Punktes E Gelegenheit bietet, um BC abzustecken, d. h. den Punkt C anzugeben.

Es kommt jetzt darauf an, in dem von B aus abzusteckenden

Straßenstücke BC einen Punkt H zu gewinnen, damit in der Richtung BH die Länge BC abgemessen werden könne. Deshalb werde von B aus in der Richtung BY thunlichst weit fortgemessen und so ein Punkt G bestimmt, nicht minder nach irgend einer anderen Richtung BK hin, und auf solche Art ein zweiter fester Punkt K ermittelt, hierauf aber KG gemessen. Aus den Seiten des Dreieckes BGK hat man jetzt dessen Winkel zu berechnen, wodurch, da ∠ EBC gegeben ist, die Winkel der Dreiecke BHG und BHK bekannt werden, alsdann aber hinreichendes Material zur Berechnung der Seiten KH, GH vorliegt. Diese lassen sich von K und G aus auftragen, was zur Bestimmung des Punktes H führt. Ist man aber einmal im Besitz dieses Punktes, so bedarf es zur Angabe von C nur der Abmessung der bekannten Länge BC in der Richtung BH. Der Punkt C findet seine Bestätigung darin, daß er in der Richtung FE enthalten sein muß, und zwar um so mehr, je weiter F und E von einander entfernt waren.

Von C aus soll die Straße ihren weiteren Lauf durch einen Wald nehmen, nach der bedungenen Richtung CD hin, welchem Verlangen sofort entsprochen werden kann, falls C durch obige Bestätigung sich als richtig bewährt hat. Denn es dürften jetzt nur in der Richtung der Stäbe F, E, C die Stämme und Gebüsche des Waldes umgehauen und weggeräumt werden.

Zusatz. Wir haben bei Lösung dieser Aufgabe äußerste Beschränkung im Meßgeräth, dagegen völlig freies Terrain bedungen. In der Wirklichkeit tritt dieser Fall selten ein, vielmehr stehen bei derartigen Anlagen geeignete Meßinstrumente zur Verfügung, während dagegen von Seiten des Terrains Hindernisse mancherlei Art in den Weg treten. Wie dann das Winkelkreuz, die Bouffole, der Meßtisch und der Horizontalkreis im vorliegenden Falle zu gebrauchen wären, dies bedarf jetzt der Anleitung nicht, so wie von selbst einleuchtet, daß unter Benutzung namentlich der letzteren beiden Instrumente die verlangte Absteckung des Straßenzuges ABCD weit genauer ausgeführt werden könne. Insbesondere eignen sich dieselben dazu, den Punkt D zu finden, noch bevor das Umhauen der Bäume geschieht, auch zur Angabe eines zwischen C und D liegenden Punktes, etwa M, so daß nun der Durchschlag des Waldes von drei Stellen zugleich in Angriff genommen werden kann.

§. 157.

Aufgabe. Eine Gerade und zwei außerhalb derselben liegende Punkte sind gegeben, damit in ersterer ein Punkt gefunden werde, dessen Entfernungen von letzteren einem Kleinsten entsprechen.

Auflösung. Da die Punkte entweder an einerlei Seite der Geraden oder zu beiden Seiten derselben gelegen sein können, so sind zwei Lösungen denkbar. Letzteren Falls bedarf es offenbar nur der Verbindung beider Punkte durch eine Gerade, in deren Durchschnitt mit der gegebenen Geraden nothwendig der verlangte Punkt enthalten ist, daher nur noch der andere Fall erübriget. Für diesen sei AB Fig. 169 die gegebene Gerade; C und D bedeuten die außerhalb derselben gegebenen Punkte, während F einstweilen den gesuchten Punkt vorstellen mag.

Um nun zu zeigen, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, damit CF + FD ein Kleinstes — Minimum — d. h. für jeden anderen Punkt der Geraden AB die Summe aller von C und D aus nach ihm hin gehenden Geraden größer als CF + FD ist, so fälle man aus D auf AB das Perpendikel DH, verlängere solches um seine eigene Größe, ziehe EC und von deren Durchschnitt G mit AB, GD; ferner EF, DF, CF. Hiernach findet statt:

$$DH = HE$$
$$FH = FH$$
$$\angle DHF = \angle FHE = R$$
$$\triangle DHF \cong \triangle EHF$$
$$FD = FE$$
$$CF + FD = CF + FE.$$

Da die Summe zweier Seiten eines Dreieckes stets größer ist, als die dritte Seite, von dieser aber um desto weniger verschieden, einen je stumpferen Winkel dieselben einschließen, so nimmt, je näher F dem Punkte G kommt, die Summe CF + FE, folglich auch CF + FD ab, und wird in dem Augenblicke am kleinsten, für welchen F mit G zusammenfällt.

Behufs der Lagenbestimmung der Linien CG und DG zur Geraden AB ist wie vorhin die Congruenz der Dreiecke GDH und GHE zu zeigen, und daraus die Gleichheit der Winkel DGH und HGE oder CGF zu folgern. Es schließen also die Linien CG, DG im gesuchten Punkte G mit der gegebenen Geraden AB gleiche Winkel ein.

Anmerkung. Wären C und D zwei Orte, von welchen aus Wege nach einem einzigen Punkte einer geraden Straße AB dergestalt geführt werden sollten, daß die Summe der Weglängen am kleinsten sei, so würde die Absteckung unter Benutzung obiger Auflösung erfolgen können.

§. 158.

Aufgabe. Von zwei außerhalb eines gegebenen Kreises liegenden festen Punkten dergestalt zwei Gerade zu einem Punkte der

Kreisperipherie hin zu ziehen, daß die Summe dieser Geraden ein Kleinstes werde.

Auflösung. A, B Fig. 170 bezeichnen die außerhalb des Kreises gegebenen Punkte; G sei ein Punkt in der Kreisperipherie von der Beschaffenheit, daß AG und BG mit dem Radius GC dieses Punktes gleiche Winkel bilden, d. h. $\angle AGC = \angle BGC$. DE bedeutet die Tangente des Punktes G, ferner F einen anderen Punkt in der Peripherie, welcher für den Augenblick den gesuchten vertreten mag und zu welchem hin die Geraden AF, BF bereits gezogen wurden. Ueberdies habe man von B aus nach dem Durchschnittspunkte H der Geraden AF mit DE ebenfalls eine Gerade geführt.

Demgemäß findet statt:

$$\text{weil } AGC = BGC \text{ und}$$
$$DGC = EGC = R$$
$$AGC - DGC = BGC - EGC$$
$$AGD = BGE; \text{ ferner}$$
$$BHE < BGE$$
$$AHD > AGD, \text{ daher}$$
$$AHD > BHE,$$

folglich nach dem vorigen §.

$$AH + BH > AG + BG.$$

Nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie ist aber:

$$AF + FB > AH + BH,$$

mithin um so mehr

$$AF + FB > AG + BG.$$

Dasselbe würde für jeden anderen Punkt der Peripherie des gegebenen Kreises gelten; demnach ist G der geforderte Punkt, d. h. für ihn ist die Summe $AG + BG$ ein Kleinstes.

Zusatz. Durch eine einfache geometrische Construction läßt sich der Punkt G nicht bestimmen.

§. 159.

Aufgabe. Einen Punkt zu finden, für welchen die Summe seiner Entfernungen von den Eckpunkten eines gegebenen Dreieckes ein Minimum sei.

Auflösung. ABC Fig. 171 stelle das gegebene Dreieck dar, D den Punkt, dessen Entfernung von den Eckpunkten A, B und C bereits der Forderung entspreche, d. h. $AD + BD + CD$ sei ein Minimum. Dann nehme man an, es wäre mit CD ein Kreis beschrie-

ben worden, so kann nicht für irgend einen anderen Punkt, etwa E, desselben AE + BE + EC zugleich auch ein Minimum sein, weil schon AD + BD + CD dafür angesehen wurde. Folglich muß AD + BD kleiner als AE + BE, und mithin nach §. 158 ∠ ADC = ∠ BDC sein. Werden hierauf aus A und B beziehungsweise mit den Halbmessern AD, BD ebenfalls Kreise geführt, so ergiebt sich wie vorhin

$$\angle ADC = \angle ADB,\ \angle BDC = \angle ADB, \text{ daher}$$

$$\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 120°.$$

Der fragliche Punkt D ist also dort gelegen, wo Linien, die von ihm aus nach den Eckpunkten des gegebenen Dreieckes gehen, unter einander gleiche Winkel, nämlich von je 120° einschließen, und durch eine in Fig. 172 ersichtliche geometrische Construction folgendermaßen zu finden. Ueber den Dreiecksseiten construire man gleichseitige Dreiecke und beschreibe um dieselben herum Kreise, so liegt in deren gemeinschaftlichem Durchschnitte D der verlangte Punkt.

Denn da die Eckpunkte ADCE in der Peripherie eines Kreises liegen, so ist im Vierecke ADCE

$$\angle ADC + \angle AEC = 180°,$$

aber vermöge der Construction

$$\angle AEC = 60°, \text{ daher}$$

$$\angle ADC = 120°.$$

Dasselbe gilt von den Winkeln ADC und BDC.

Zusatz 1. Die Aufgabe ist unmöglich, sobald einer der Winkel des gegebenen Dreieckes mehr als 120° beträgt. Wäre z. B. ABC > 120°, dann könnte nicht auch zugleich ADC = 120° sein, was doch, wie oben bewiesen wurde, statt finden muß.

Zusatz 2. Für sich leuchtet ein, daß von dieser Construction Gebrauch gemacht werden könne, falls A, B und C Orte in einer Gegend bedeuten, welche mit einander durch Wege zu verbinden sind, deren Längen ein Minimum sein sollen. Nach vollbrachter Construction auf dem Plane der Gegend würde die Absteckung der Wege auf dem Felde ganz so erfolgen, wie dies an einigen Beispielen bereits gezeigt worden ist.

§. 160.

Kommen wir zurück auf den in Fig. 168 projectirten Straßenzug ABCD, dann drängt sich unwillkürlich die Bemerkung auf, ob es wohl praktisch angemessen sein würde, im Verlaufe der Straße

plötzliche Richtungsveränderungen, wie die dort dargestellten sind, wirklich zur Ausführung zu bringen. Theorie und Praxis sprechen dagegen und schreiben vor, diese Richtungsveränderungen unvermerkt eintreten zu lassen, was offenbar nur durch Einschaltung von krummen Linien, entweder Kreisbogen oder anderen Curven zwischen je zwei benachbarten Straßenstücken, zu erreichen ist, dergestalt, daß ein jedes der Straßenstücke beim Uebergang in den Bogen Tangente für den Anfangspunkt desselben sei.

Es leuchtet ferner ein, daß dieser Uebergang aus der einen in die andere Richtung bei Benutzung der Straße um so weniger wahrnehmbar sein werde, je größere Krümmungshalbmesser deren Verbindungsbogen zukommen, auf welchen Umstand bei derartigen Anlagen ganz besonders Rücksicht genommen wird. Gewöhnlich sind es Kreisbogen, durch welche man zwei benachbarte Straßenstücke, wie z. B. AB und BC, zu verbinden pflegt, und fast immer dient nur ein einziger Kreisbogen zu diesem Zwecke. Die Nothwendigkeit der Absteckung von Kreisbogen tritt oft ein und aus begreiflicher Ursache in bergigem Terrain öfter als in flachem; daher wir einige der wirklich üblichen Absteckungsmethoden von Kreisbogen betrachten wollen. Gewöhnlich sind die Anschlußpunkte α und β des Bogens $\alpha\delta\beta$ oder dessen Halbmesser $\delta\gamma$ gegeben, und aus diesen Stücken gleichweit von einander entfernte Punkte des Bogens zu finden, in um so größerer Anzahl, je genauer der Bogen auf dem Terrain abgesteckt werden soll. Am zuverlässigsten würde der Forderung durch ein mechanisches Verfahren, nach Art der Construction eines Kreisbogens mittelst des Cirkels, zu genügen sein, könnte von dem auf dem Felde durch einen Stab bezeichneten Mittelpunkte γ aus, unter Anwendung einer daselbst befestigten und gehörig ausgespannten Schnur oder eines Lineals, der Bogen wirklich tracirt werden. Von dieser Methode läßt sich jedoch nur unter günstigen Umständen und bei verhältnißmäßig kleinen Halbmessern mit Erfolg Gebrauch machen. Fällt der Mittelpunkt in unzugängliches Terrain hinein, und ist der Halbmesser, wie z. B. bei Eisenbahnen, sehr groß, 1000 Ellen und darüber, so ist mit dem mechanischen Verfahren nichts auszurichten, vielmehr führt dann nur die Gewinnung einer entsprechenden Anzahl von Punkten des Bogens zum Ziele.

§. 161.

Aufgabe. Vermittelst des Meßtisches und Winkelkreuzes einen Kreisbogen von gegebenem Halbmesser abzustecken, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Auflösung 1. Sei AB Fig. 173 die gegebene und irgendwie auf dem Felde bezeichnete Gerade, E der in ihr bestimmte Berührungspunkt des verlangten Bogens, dann ist zuerst festzusetzen, an welcher Seite von AB die Berührung statt finden soll, hierauf aber folgendermaßen zu verfahren.

Angenommen, der Bogen könne von seinem Anfangspunkte E aus nicht weit übersehen werden; insbesondere sei derselbe an seiner inneren, d. h. concaven Seite nicht wohl zugänglich, so daß man die betreffenden Schnitte nur von der äußeren oder converen Seite aus zu vollziehen vermag — ein Fall, der bei Umgehung von Gebirgsabhängen vorzukommen pflegt —, dann ist der Meßtisch zunächst über E aufzustellen und nachher eine, auf dessen Planchette gezogene Gerade in das Alignement AB zu bringen. Jetzt lassen sich in demselben vom Standpunkte E aus Längen wie Ea und Eb auf dem Felde auftragen, in a, b mittelst des Winkelkreuzes die Perpendikel ac, bd errichten, deren Endpunkte c und d Punkte des verlangten Bogens bezeichnen werden, sobald solche nur von der erforderlichen Größe gewählt wurden. Es erscheint also AB als Abscissenlinie, während jene Perpendikel Ordinaten zu derselben darstellen, deren Berechnung keinerlei Schwierigkeiten unterliegt.

M sei der Mittelpunkt des Bogens, $ME = r$ der Halbmesser für dessen Anfangspunkt, MG derjenige für einen vorläufig gedachten Punkt des verlangten Bogens; ferner $EG = s$ die dazu gehörige Sehne, so wie MF die Halbirungslinie dieses Bogens; überdies $Ea = x$, $ac = y$, $\angle EMF = \alpha$, so wie endlich aus der Bogenmitte d und aus c df, ce und db bezüglich normal auf ME und AB, also $ec = Ea$, $Ee = ac$, $df = bE$, $Ef = bd$ vorausgesetzt werden mögen.

Hiernach hat man:

$$2ME - Ee : ec = ec : Ee, \text{ oder}$$

$$2r - y : x = x : y$$

$$x^2 = (2r - y)\, y$$

$$y = r \pm \sqrt{r^2 - x^2} = r \pm \sqrt{(r + x)(r - x)}$$

in welcher Formel jedoch nur das untere der beiden Vorzeichen gilt.

Da $\triangle MEg \cong \triangle Mfd$, so ist $fd = Eb = Eg = \frac{s}{2}$, und nun die Abscisse Eb für den Halbirungspunkt d des Bogens EG

$$r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = r - \sqrt{\left(r + \frac{s}{2}\right)\left(r - \frac{s}{2}\right)}.$$

Wäre z. B. $r = 1000$, $s = 100$ Ellen, dann würde man

$$bd = 1000 - \sqrt{\left(1000 + \frac{100}{2}\right)\left(1000 - \frac{100}{2}\right)} = 1{,}25 \ldots \text{ Ellen}$$

haben, und diesen Betrag mittelst des Winkelkreuzes vom Punkte b aus auftragen, nachdem zuvor b durch directes Abmessen von $Eb = \frac{s}{2} = 50$ Ellen vom Standpunkte E aus in der Richtung AB bestimmt worden wäre.

Auf ähnliche Art würden zwischen E und d andere Bogenpunkte anzugeben sein; da man jedoch gewöhnlich verlangt, daß dieselben in gleichen Entfernungen von einander sich befinden, so käme es jetzt darauf an, wie groß Ea und ac zu nehmen sind, damit c zwischen E und d mitten inne liege. Zu diesem Behufe sei nach dem Durchschnitte h der Geraden Eg und fd der Halbmesser Mc gezogen, welcher wegen Congruenz der Dreiecke Mhd und Mhe den Bogen Ed in c halbirt, dann ist nach bekannten Sätzen der Trigonometrie:

$$\sin EMd = \sin \alpha = \frac{s}{2r} = \frac{100}{2 \,.\, 1000}$$

$$= 0{,}05, \text{ daher}$$

$$\alpha = 2^\circ\, 51' \, 57'', \text{ und}$$

$$\angle EMC = \tfrac{1}{2}\alpha = 1^\circ\, 25' \, 58''.$$

Hiernach findet man:

$$Ea = ec = 25{,}002 \text{ Ellen}$$

$$Ee = ac = 0{,}312 \;\; "$$

und folgert, daß der Punkt a ohne merklichen Fehler in der Mitte zwischen E und b genommen werden konnte. Auch sieht man ein, daß vom Standpunkte E aus die Abscissen und Ordinaten von Bogenpunkten jenseits d nach G zu in der nämlichen Weise, wie solches mit den vorigen Punkten geschah, zu erlangen sind. Mindestens aber werde dieses Verfahren — wenn nur irgend ausführbar — bis zur Bestimmung des Punktes G fortgesetzt. Für diesen ist:

$$Ek = mG = r \,.\, \sin 2\alpha$$

$$= 1000 \,.\, \sin 5^\circ\, 43' \, 55'' = 99{,}87 \ldots \text{ Ellen.}$$

$$kG = Em = r \,.\, \text{sin vers } 2\alpha = r\,(1 - \cos 2\alpha)$$

$$= 1000\,(1 - \cos 5^\circ\, 43' \, 55'') = 5{,}00 \ldots \text{ Ellen.}$$

Wäre hingegen über den Punkt F auf solche Art nicht hinauszukommen, dann berechne man EF entweder wie oben, ohne Rücksicht auf den Winkel α, oder trigonometrisch, und schließe:

$$EF : ME = Eg : Mg, \text{ d. i.}$$

$$EF : r = \frac{s}{2} : \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}, \text{ daher}$$

$$EF = \frac{rs}{2\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}} = r \cdot \operatorname{tang} \alpha, \text{ und}$$

in Bezug auf das gewählte Beispiel

$$EF = \frac{1000 \cdot 100}{2\sqrt{\left(1000^2 - \frac{100^2}{4}\right)}} = \frac{50000}{\sqrt{997500}} = \frac{1000}{\sqrt{399}}$$

$$= 50{,}06 \ldots \text{Ellen} = 1000 \cdot \operatorname{tang} 2^\circ\, 51'\, 57''.$$

Die gefundene Länge ist nicht nur auf dem Felde aufzutragen, sondern in verjüngtem Maße auch auf der Planchette, nach demselben jedoch zugleich ein dem Dreiecke EFG ähnliches, sich an die verjüngte Seite EF anschließendes, wozu in den vorhin berechneten Stücken Ek und kG das Erforderliche vorhanden ist. Hierbei wird sich für den Punkt G eine Bestätigung darbieten, indem solcher von F so weit entfernt sein muß, wie dieser Punkt es in Bezug auf E ist.

Wird nun der Meßtisch über F gehörig aufgestellt, nämlich so, daß der Endpunkt der verjüngten Geraden EF vertical über F zu liegen kommt und außerdem diese Gerade im Alignement AB enthalten ist, dann darf das Diopterlineal nur an die verjüngte Gerade FG angelegt und in der hierdurch bezeichneten Richtung eine Länge FG = FE von F aus abgemessen werden, damit sich auf dem Felde ein fernerer Punkt G im verlangten Bogen ergiebt, welcher von dem Anfangspunkte E desselben die bedungene Entfernung EG = s hat, in unserem Beispiele 100 Ellen. Leicht kann dann auch ein Bogenpunkt, etwa in der Mitte zwischen d und G, durch Uebertragung jener Dimensionen gewonnen werden, welche zur Erlangung des Punktes c dienten.

Für sich leuchtet ein, daß das verjüngte Dreieck mit größter Genauigkeit auf die Planchette und in einem thunlichst großen Maßstabe aufgetragen werden muß, wenn anders diese Absteckungsmethode sichere Ergebnisse herbeiführen soll. Erscheint das Terrain in der Richtung des Halbmessers EM, dessen Lage auf der Planchette durch ein daselbst construirtes Perpendikel bemerkt worden sei, nur irgend zugänglich, dann versäume man nicht, EH abzumessen und aufzutragen, so wie den Endpunkt H durch einen Stab zu bezeichnen, nämlich den Durch-

schnittspunkt der Tangente für den Punkt G mit dem verlängerten Halbmesser ME. Um dies zu können, wird zuvor die Länge EH durch Rechnung zu bestimmen sein, wozu mehrere Wege sich darbieten, wovon wir jedoch nur einen einzigen anführen wollen. Man hat:

$$MG : MH = 1 : \sec 2\alpha, \text{ oder}$$

$$r : MH = 1 : \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$MH = \frac{r}{\cos 2\alpha} = \frac{1000}{\cos 5^\circ\, 43'\, 55''} = 1005{,}02\ldots \text{ Ellen}$$

$$EH = MH - ME = 1005{,}02\ldots - 1000 = 5{,}02\ldots \text{ Ellen.}$$

Wird jetzt auf der Planchette FH gezogen und nach G hin verlängert, so erfährt dieser Punkt von Neuem eine Bestätigung, hauptsächlich aber — und hierauf kam es bei diesem Schritte an — dient nun der Punkt H zu genauer Einrichtung des Meßtisches über dem Punkte F. Von hier wird das Abstecken von Bogenpunkten, unter Zugrundlegung obiger Rechnungen, thunlichst weit fortgesetzt, auch die folgende Aufstellung des Meßtisches über K ganz in ähnlicher Weise wie die vorige gesichert. Auch übersieht man bald, daß, wenn GL = EG = s gewählt wird, überhaupt Bogenpunkte für gleich große Sehnen zu bestimmen sind, ein und dieselbe Construction auf der Planchette wiederholt benutzt werden kann, entweder bis zu einem beliebig gesetzten Endpunkt N des verlangten Bogens, oder bis zum Uebergange desselben in eine gegebene Gerade, etwa DC.

§. 162.

Einfacher und selbst zuverlässiger ist der Aufgabe des vorigen §. zu entsprechen, falls statt des Meßtisches ein Horizontalkreis zur Verfügung steht, indem dessen Mittelpunkt genauer über gegebenen Punkten auf dem Felde, wie hier E, F, K .... eingelothet werden kann. Hat man z. B. den Horizontalkreis über F eingelothet, dann kommt es blos darauf an, das Diopterlineal oder Fernrohr in die Richtung AB zu bringen und für diesen Stand den Winkel am Index abzulesen, hierauf das Lineal um den Winkel EFG = 180° — EMG oder in jenem Beispiele um $180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 5^\circ\, 43'\, 45'' = 174^\circ\, 16'\, 5''$ drehend herum zu bewegen, und nun in der Richtung der Vistrebene die Länge FG = EF = 50,06 .... Ellen abzumessen, wodurch der Punkt G des abzusteckenden Kreisbogens erhalten wird. Wird während dieser Drehung des Lineals auf halbem Wege, also nach Zurücklegung eines Winkels von $87^\circ\, 8'\, 2''$, inne gehalten, d. h. dasselbe

zunächst nur um den Winkel EFM herumgedreht, so läßt sich in dieser Richtung des Lineals von F aus die Länge Fd auftragen und dadurch der Halbirungspunkt d des Bogens EG bestimmen. Fd aber ergiebt sich wie folgt:

$$MF : ME = \sec \alpha : 1, \text{ oder}$$

$$MF : r = \frac{1}{\cos \alpha} : 1$$

$$MF = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{1000}{\cos 2^\circ\, 51'\, 57''}$$

$$= 1001{,}26 \ldots . \text{ Ellen}$$

$$Fd = MF - Md = 1001{,}26 - 1000 = 1{,}26 \ldots . \text{ Elle,}$$

und sonach würde zur Angabe von d das Winkelkreuz zu entbehren sein. Letzteres gilt auch von den Halbirungspunkten c und n, bezüglich der Bogen Ed und dG, welche durch directe Abmessung der einander gleichen Längen Fc, Fn vom Standpunkte F des Horizontalkreises aus sich würden bestimmen lassen, indem es hierzu nur des Winkels MFc = MFn, so wie der Größe der Geraden Fc = Fn bedürfte. Man hat aber:

$$Fc = Fn = \sqrt{(Mc^2 + MF^2 - 2Mc \,.\, MF \,.\, \cos cMF)}$$

$$= \sqrt{\left(r^2 + \frac{r^2}{\cos \alpha^2} - 2 \,.\, r \,.\, \frac{r}{\cos \alpha} \,.\, \cos \tfrac{1}{2} \alpha\right)}$$

$$= \frac{r}{\cos \alpha} \sqrt{\cos \alpha \,(\cos \alpha - 2 \cos \tfrac{1}{2} \alpha) + 1}$$

$$= \frac{1000}{\cos 2^\circ\, 51'\, 57''} \sqrt{\cos 2^\circ 51'57'' (\cos 2^\circ 51'57'' - 2 \,.\, \cos 1^\circ 25'58'') + 1}$$

$$= 25{,}95 \ldots . \text{ Ellen, ferner}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\, cFM = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} S - cd)\,(\frac{1}{2} S - MF)}{cd \,.\, MF}}$$

worin S die Summe der drei Seiten des Dreieckes MFc bedeutet, daher für obiges Beispiel:

$$S = \frac{1000 + 1001{,}26 + 25{,}95}{2} = 1013{,}61$$

und nun

$$\sin \tfrac{1}{2}\, cFM = \sqrt{\frac{(1013{,}61 - 25{,}95)\,(1013{,}61 - 1001{,}26)}{25{,}95 \,.\, 1001{,}26}}$$

$$= \sqrt{\frac{987{,}65 \,.\, 12{,}34}{25{,}95 \,.\, 1001{,}26}}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\, cFM = 9{,}8353587$$
$$\tfrac{1}{2}\, cFM = 43^\circ\, 11'\, 40''$$
$$cFM = 86^\circ\, 23'\, 20''.$$

Es wäre folglich zur Absteckung des Punktes c das Diopterlineal des Horizontalkreises aus seiner Lage FE um den Winkel EFc

$$= EFM - cFM = 87^\circ\, 8'\, 2'' - 86^\circ\, 23'\, 20''$$
$$= 0^\circ\, 44'\, 42''$$

zu drehen, und hierauf in dieser Richtung die Länge Fc = 25,95 Ellen vom Standpunkte F aus aufzutragen. Um das Lineal in die zur Angabe des Punktes n geeignete Lage zu versetzen, bedürfte es im vorliegenden Falle einer Drehung von $EFn = EFG - nFG = EFG - EFc = 174^\circ\, 16'\, 5'' - 0^\circ\, 44'\, 42'' = 173^\circ\, 31'\, 23''$.

Offenbar reicht es für die fragliche Bogenabsteckung hin, obige Rechnungen ein einziges Mal geführt zu haben, indem die Resultate derselben, wenn immer nur die zu gleich großen Sehnen gehörigen Punkte des Bogens angegeben werden sollen, sich fortwährend wiederholen. Auch sieht man ein, daß die Punkte a, d, n und G bei geeignetem Terrain unmittelbar vom ersten Standpunkte E aus bestimmt werden konnten, da es hierzu nur der Berechnung der Sehnen Ec, Ed, En und Eg, sowie der Winkel bedurft hätte, welche dieselben mit der Geraden AB einschließen, wozu, da r und s gegeben sind, das Erforderliche vorliegt.

Zusatz. Sollte nach vollzogener Absteckung des Bogens Ecd...tLN, d. h. nach Bestimmung einer, den Umständen angemessenen Anzahl von Punkten desselben, auch noch die Absteckung eines äußeren und inneren, mit ersterem concentrischen Bogens erfolgen, was nöthig wäre, wenn z. B. jener Bogen die Mittellinie oder Axe einer Straße, vielleicht einer projectirten Eisenbahn bedeutet, so kann dies von den Standpunkten E, F, K.... gleich mit geschehen. Setzen wir, die gesammte Bahnbreite solle 14 Ellen betragen, dann hat man nur von E in der zu AB rechtwinkligen Lage des Diopters 7 Ellen zu beiden Seiten von AB aufzutragen und die so gewonnenen Punkte mit Pfählen zu bezeichnen. Im Standpunkte F würde dem Diopter die Lage FM ertheilt, hierauf in dieser Richtung von dem schon bestimmten Punkte d aus auf die convere und concave Seite des Bogens jene Länge von 7 Ellen abgemessen, später im Standpunkte K auf dieselbe Art verfahren u. s. w.

Für gewöhnlich wendet man hierzu das Winkelkreuz an, welches eine, wenn auch nicht sehr große, inzwischen meistens hinreichende Genauig-

keit gewährt. Dasselbe wird über einen Bogenpunkt aufgestellt, die eine seiner Visirebenen nach einem benachbarten Punkte eingerichtet und hierauf in der Richtung der anderen Visirebene des Winkelkreuzes obige halbe Bahnbreite von 7 Ellen aufgetragen.

§. 163.

Aufgabe. Zwischen zwei ihrer Lage nach gegebenen Geraden einen, dieselben berührenden Kreisbogen vom Halbmesser = r abzustecken, unter der Voraussetzung, daß das Terrain nur an der concaven Seite des Bogens zugänglich sei.

Auflösung. AB, CD Fig. 174 mögen die durch Stäbe oder sonstwie bezeichneten Geraden auf dem Felde bedeuten; c, d zwei bezüglich in denselben gewählte, gegenseitig wahrnehmbare Punkte, deren Entfernung von einander man kennt und über welchen das Winkelinstrument ungehindert aufgestellt werden kann.

Zuvörderst sind die Winkel Ecd, Edc zu beobachten, woraus mit Hinzuziehung der bekannten Entfernung cd die Seiten Ec und Ed des gedachten Dreieckes cEd sich berechnen lassen, dessen Eckpunkt E dem Durchschnitte beider gegebenen Geraden entspricht. Werden von diesen Seiten die einander gleichen Entfernungen Ea und Eb des Punktes E von den zwei Anschlußpunkten a, b des fraglichen Bogens subtrahirt, so bleiben die Längen ca, db übrig, welche nur von c und d aus in der Richtung jener Geraden abzumessen sind, um die Punkte a und b zu erhalten. Ist ferner M der Mittelpunkt des verlangten Bogens, und setzt man die Geraden ME, Ma, Mb als gezogen voraus, so wie $\angle Ecd = \alpha$, $\angle Edc = \beta$, dann folgt $\angle cEd = 180° - \alpha - \beta = n$, $\angle aME = \angle EMb = 90° - \frac{1}{2}n$, auch ist:

$$Ma : aE = 1 : \text{tang}\,(90° - \tfrac{1}{2}n) \text{ oder}$$

$$r : aE = 1 : \cot \tfrac{1}{2}n$$

$$aE = r \,.\, \cot \tfrac{1}{2}n.$$

Wäre z. B. r = 1000, cd = 1500 Ellen, $\alpha = 34° 15'$, $\beta = 32°$, dann würde man haben:

$$Ec = \frac{cd \,.\, \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{1500 \,.\, \sin 32°}{\sin 66° 15'} = 868{,}42 \text{ Ellen}$$

$$Ed = \frac{cd \,.\, \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{1500 \,.\, \sin 34° 15'}{\sin 66° 15'} = 922{,}31 \text{ Ellen}$$

$$aE = bE = 1000 \,.\, \cot \frac{180° - 66° 15'}{2} = 1000 \cot 56° 52' 30'$$

$$= 652{,}51 \text{ Ellen}$$

$ca = Ec - aE = 868{,}42 - 652{,}51 = 215{,}91$ Ellen

$db = Ed - bE = 922{,}31 - 652{,}51 = 269{,}80$ "

Hierdurch sind die Uebergangspunkte a, b des geforderten Bogens aFb in die gegebenen Geraden AB, CD bestimmt, und es kann jetzt zur Absteckung fernerer Punkte desselben geschritten werden.

Um zunächst die Bogenmitte F zu erlangen, berechne man den Winkel Fcd, bringe das Lineal des Horizontalkreises in die hierdurch bestimmte Lage cF, wähle in ihr beliebig einen Punkt e und bezeichne ihn durch einen Stab. Hierauf beobachte man aus d den Winkel cde, so ergiebt sich hierdurch das zur Berechnung von eF Erforderliche, und es bedarf nur noch der Abmessung dieser Länge vom Punkte e aus in der Richtung ce. Der Winkel Fdc kann durch Rechnung gefunden und alsdann das Lineal in die Richtung dF gebracht, hierdurch aber die Lage des vorhin bemerkten Punktes F geprüft werden. Mit Rücksicht auf das gewählte numerische Beispiel würde statt finden:

$$Ma : ME = 1 : \sec aME, \text{ oder}$$

$$r : ME = 1 : \sec (90^\circ - \tfrac{1}{2}n)$$

$$r : ME = 1 : \frac{1}{\cos (90^\circ - \tfrac{1}{2}n)}$$

$$ME = \frac{r}{\cos (90^\circ - \tfrac{1}{2}n)} = \frac{r}{\sin \tfrac{1}{2}n} = \frac{1000}{\sin 56^\circ\ 52'\ 30''} = 1194{,}05 \text{ Ellen}$$

$$FE = ME - MF = 1194{,}05 - 1000 = 194{,}05 \text{ Ellen}$$

$$cF = \sqrt{cE^2 + FE^2 - 2cE \,.\, FE \,.\, \cos cEF}$$

$$= \sqrt{868{,}42^2 + 194{,}05^2 - 2 \,.\, 868{,}42 \,.\, 194{,}05 \,.\, \cos 56^\circ\ 52'\ 30''}$$

$$= 779{,}50 \text{ Ellen}$$

$$Ec + FE + Fc = S = 868{,}42 + 194{,}05 + 779{,}50 = 1841{,}97 \text{ Ellen}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}EcF = \sqrt{\frac{(\tfrac{1}{2}S - Ec)\,(\tfrac{1}{2}S - Fc)}{Ec \,.\, Fc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(920{,}98 - 868{,}42)\,(920{,}98 - 779{,}5)}{868{,}42 \,.\, 779{,}5}}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}EcF = 9{,}0204023$$

$$\tfrac{1}{2}EcF = 6^\circ\ 0'\ 58''$$

$$EcF = 12^\circ\ 1'\ 56''$$

$$Fcd = Ecd - EcF = 34^\circ\ 15' - 12^\circ\ 1'\ 56'' = 22^\circ\ 13'\ 4''.$$

Nun habe man im Standpunkte d den Winkel cde beobachtet und ihn zu 16° 30′ befunden, dann ist:

$$ce = \frac{cd \,.\, \sin cde}{\sin (ecd + edc)} = \frac{1500 \,.\, \sin 16^\circ 30'}{\sin (22^\circ 13' 4'' + 16^\circ 30')} = \frac{1500 \,.\, \sin 16^\circ 30'}{\sin 38^\circ 43' 4''}$$

$$\log ce = 2{,}8332164$$

$$ce = 681{,}10 \ldots \text{ Ellen.}$$

Es sind folglich vom Punkte e aus $eF = cF - ce = 779{,}50 - 681{,}10 = 98{,}40 \ldots$ Ellen in der Richtung ce abzumessen, während im Standpunkte d darauf zu sehen ist, daß der Endpunkt F dieser Länge genau in die Vistrebene des Diopters hineinfällt.

Setzen wir nun, es solle vom Bogenanfang a ausgehend alle 50 Ellen ein Bogenpunkt bezeichnet werden, d. h. die Sehne je zweier benachbarten Punkte 50 Ellen betragen, was zur Folge hat, daß auf die gesammte $\frac{2 \,.\, r \,.\, \pi \,.\, (180 - n)}{360} = \frac{2 \,.\, 1000 \,.\, 3{,}141 \,.\, 66\frac{1}{4}}{360} = 1156{,}28$ Ellen messende Bogenlänge ab, mit Ausschluß des ersten, 23 Punkte kommen, während der letzte vom Bogenende b 6,28 Ellen entfernt sein wird — dann könnte die Gerade cF sogleich als Abscissenlinie gewählt werden, in Bezug auf welche die Ordinaten der fraglichen Bogenpunkte aufzutragen wären, nachdem solche sowie die entsprechenden Abscissen vorher durch Rechnung gefunden worden sind. Das Rechnungsgeschäft vereinfacht sich jedoch wesentlich, sobald man die Abscissenlinie cF aufgiebt und statt deren eine andere, vom Bogenanfange a ausgehende aq wählt, durch welche eine bestimmte Anzahl der bedungenen, gleich großen Bogenstücke abgeschnitten wird, z. B. vier derselben.

Das Winkelinstrument ist zunächst über a gehörig aufzustellen und dessen Lineal in die Richtung aF zu bringen, damit in ihr die Abscissen af, ag, am, aq für die einzelnen Bogenpunkte h, k, i und q vom Standpunkte a aus abgemessen werden können, was freilich die Kenntniß nicht nur des Winkels Eaq, sondern auch der Abscissen selbst voraussetzt, wozu noch folgende Rechnung dient.

Nachdem die Sehne ah gezogen worden ist, so hat man im $\triangle$ aMk:

$$\sin \tfrac{1}{2} aMh = \frac{ah}{2r} = \frac{50}{2 \,.\, 1000} = \frac{1}{40} = \sin 1^\circ 25' 57''$$

$$\angle aMh = 2^\circ 51' 54''$$

$$\angle haM = \frac{180^\circ - 2^\circ 51' 54''}{2} = 88^\circ 34' 3''$$

$\angle aMq = 4 \,.\, \angle aMk = 11^\circ 27' 36''$, und nun

$$\angle qaM = \frac{180° - aMq}{2} = \frac{180° - 11° 27' 36''}{2} = 84° 16' 12''.$$

Ferner ist:

$\angle Eag = EaM - gaM = 90° - 84° 16' 12'' = 5° 43' 48''$

$\angle haf = haM - gaM = 88° 34' 3'' - 84° 16' 12'' = 4° 17' 39''$

$af = ah \,.\, \cos haf = 50 \,.\, \cos 4° 17' 39'' = 49{,}85 \ldots$ Ellen

$af = ah \,.\, \sin haf = 50 \,.\, \sin 4° 17' 39'' = 3{,}74 \ldots$ "

$$ag = \tfrac{1}{2} aq = \frac{r\sqrt{2\,(1 - \cos aMq)}}{2}$$

$$= \frac{1000\sqrt{2\,(1 - \cos 11° 27' 36'')}}{2} = 99{,}84 \ldots "$$

$gk = r \,.\, \sin \,.\, vers\, aMk = r \,.\, (1 - \cos aMk)$

$$= r\left(1 - \cos \frac{aMq}{2}\right)$$

$= 1000\,(1 - \cos 5° 43' 48'') = 4{,}99 \ldots$ "

$am = aq - mq = r\sqrt{2\,(1 - \cos aMq)} - af$

$= 1000\sqrt{2(1 - \cos 11° 27' 36'')} - 49{,}85$

$= 199{,}68 - 49{,}85 = 149{,}83 \ldots$ "

$mi = fh = 3{,}74 \ldots$ "

$aq = 199{,}68 \ldots$ "

Das Auftragen der nunmehr bestimmten Abscissen und Ordinaten der Punkte h, k .... unterliegt jetzt keinerlei Schwierigkeit, und man kann sich hierzu einer in der Richtung aq ausgespannten Schnur bedienen, längs welcher die Abscissen abgemessen werden; für die Ordinaten entweder des Winkelkreuzes oder besser eines Lattenwinkels, d. h. aus Latten zusammengestellten rechten Winkels, dessen einer Schenkel stets in die Richtung der Geraden aq zu bringen ist. Zur Prüfung endlich der auf solche Art gefundenen Bogenpunkte wird man durch directes Messen untersuchen, ob je zwei derselben, wie a h, h k . . . um die bedungene Größe — hier 50 Ellen — von einander abstehen.

Es leuchtet ein, daß zur Absteckung fernerer Punkte des Bogens obige Rechnung der Wiederholung nicht bedarf, sondern die Resultate derselben von Neuem anzuwenden sind. Man bringt das Winkelinstrument über den Punkt q und stellt dessen Lineal in der Richtung qp gehörig ein, was natürlich nur dadurch zu erreichen ist, wenn solches zuvor in der Richtung qa sich befunden hat. Letzteres wird aber da-

durch mit größerer Genauigkeit ausgeführt werden können, wenn nicht blos der Bogenanfang a durch einen Stab bezeichnet, sondern zugleich für thunlichst entfernte Richtobjecte X Z Sorge getragen wurde. Das Lineal ist aus der Lage qa um einen Winkel aqp = 2 . aqM = 2 . qaM = 2 . 84° 16′ 12″ = 168° 32′ 24″ zu bewegen, und wird sich jetzt in der Lage qp befinden, worin die vorhin berechneten Abscissen nur abgemessen und die denselben entsprechenden Ordinaten aufgetragen werden dürfen, um wiederum gleichweit von einander entfernte Punkte t, u . . . im geforderten Bogen zu erhalten. Versäumt man endlich auch nicht, in der Richtung qp einen Punkt Y auszuwählen, so wird dann um so zuverlässiger die nächste Aufstellung des Instrumentes über p gelingen.

Zusatz. Die gesammte Operation des Absteckens wird wesentlich erleichtert, auch das Rechnungsgeschäft sehr vereinfacht, sobald man von der Bedingung abgeht, daß die Punkte im Bogen einerlei Entfernung von einander haben sollen, dafür aber die Ordinaten in gleichen Abständen wählt. Auch sind dann mit Vortheil annähernde Bestimmungsmethoden anwendbar, deren Darlegung jedoch hier zu weit führen würde, daher wir solche übergehen, mit dem Bemerken, daß ihre Auffindung nach Erledigung obiger schärferen Absteckungsmethoden erheblichen Schwierigkeiten keinesweges unterliegt. Umfassend behandelt diesen Gegenstand: Stampfer's Anleitung zum Nivelliren u. s. w., Wien bei Gerold 1845, welchem Werke folgendes praktisch bequeme Absteckungsverfahren, das einzige hier noch — jedoch mit etwas verändertem Rechnungsgange — anzuführende, entlehnt worden ist.

§. 164.

Es sei a Fig. 175 der Bogenanfang, so messe man in der Tangente An desselben zwei einander gleiche Längen ak, kn ab, errichte in den Punkten k, n Perpendikel kb, nc und gebe diesen die erforderliche Größe, damit deren Endpunkte b, c Punkte des geforderten Bogens sind. Hierauf ist über kc eine Gerade kq abzustecken, solche wie vorhin an als Abscissenlinie zu wählen und auf derselben cp = pq = ak zu nehmen; dann in p die Ordinate pd = kb, ferner in q qe = nc darzustellen, wodurch neue Bogenpunkte d, e gewonnen werden. Jetzt führe man durch die Punkte ep die Gerade po und verfahre in ihr wie bei kq, so gelangt man zu den Punkten f, g, und steht nun ein, wie es einer bloßen Wiederholung dieser Operation bedarf, um beliebig viele Punkte im fraglichen Bogen zu erhalten.

Bezeichnet M das Centrum des Bogens, sind Ma, Mb, Mc = r bezüglich die Radien des Bogenanfangs und der Bogenpunkte bc, bm, cu Perpendikel auf Ma, ist ferner ak = kn = bm = D, kb = am = x, nc = z, dann findet man:

$$1)\ x = r - \sqrt{(r + D)(r - D)}$$

$$2)\ z = r - \sqrt{(r + 2D)(r - 2D)}.$$

Es sei z. B. r = 1500, D = 50 Ellen, so ist nach 1

$$x = 1500 - \sqrt{(1500 + 50)(1500 - 50)} = 0{,}83356 \ldots$$ Ellen,

nach 2

$$z = 1500 - \sqrt{(1500 + 100)(1500 - 100)} = 3{,}33704 \ldots$$ =

Unter Benutzung des Newton'schen Lehrsatzes lassen sich aus 1 und 2 für x, z annähernde, jedoch von der Wahrheit so wenig abweichende Werthe berechnen, daß die dadurch entstehenden Fehler in der Praxis unbedenklich vernachlässigt werden können, und dies um so mehr, je größer r im Vergleich zu D ist. Man hat nämlich:

$$x = r - \sqrt{r^2 - D^2} = r - r\sqrt{1 - \frac{D^2}{r^2}} = r - r\left(1 - \frac{D^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$r - r\left(1 - \frac{D^2}{2r^2} - \frac{D^4}{8r^4} - \frac{D^6}{16r^6} - \ldots\right) = \frac{D^2}{2r} + \frac{D^4}{8r^3} + \frac{D^6}{16r^5} + \ldots$$

und wenn in dieser Reihe nur das erste Glied beachtet wird,

$$3)\ x = \frac{D^2}{2r}.$$

Ebenso folgt:

$$z = r - \sqrt{r^2 - 4D^2} = \frac{2D^2}{r} + \frac{2D^4}{r^3} + \frac{4D^6}{r^5} + \ldots$$

oder wie vorhin

$$4)\ z = \frac{2D^2}{r}.$$

In Bezug auf obiges Beispiel würde hiernach

$$x = \frac{50^2}{2 \cdot 1500} = \frac{5}{6} = 0{,}83333 \ldots$$ Ellen

$$z = \frac{2 \cdot 50^2}{1000} = \frac{10}{3} = 3{,}33333 \ldots$$ =

also der Fehler für die erste Ordinate erst 0,00023, für die zweite 0,00371 Elle betragen und die Folge davon sein, daß die abgesteckten Bogenpunkte von dem wirklichen Bogen nach dessen converer

Seite hin gelegen wären, auch sich von demselben immer mehr entfernten. —

Fünftes Capitel.

Die Verticalmessungen.

§. 165.

Bei den bisher betrachteten Messungsoperationen kam es fortwährend auf die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten an, unter der Voraussetzung, daß dieselben horizontalen Ebenen angehörten, und es bildeten dieselben, wie bereits im §. 9 bemerkt wurde, in ihrer Gesammtheit den Inbegriff der Horizontalmessungen. Anders verhält es sich bei den Verticalmessungen, welche zwar auch die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten bezwecken, mit dem Unterschiede jedoch, daß diese in verticalen Ebenen liegend gedacht werden. Die Operationen der Verticalmessungen beruhen, wie jene der Horizontalmessungen, auf den Lehren der Elementargeometrie und Trigonometrie, mit Hinzuziehung einiger physikalischer Gesetze, besonders über die Eigenschaften der Luft und des Lichtes. Dabei werden Instrumente angewendet, welche, wie die vorher gebrauchten, zum Messen von Linien und Winkeln dienen, ja oft sind es dieselben, nur mit den zu Verticalmessungen erforderlichen Zuthaten; außerdem Instrumente zur Untersuchung des Luftzustandes u. a. m. Ehe wir jedoch diese und ihren Gebrauch näher betrachten, ist es nothwendig, den früher im §. 9 aufgestellten nur ganz allgemeinen Begriffen über Verticalmessungen besondere, das Wesen derselben speciell bezeichnende hinzuzufügen.

§. 166.

C Fig. 176 sei der Mittelpunkt der Erde, A und B mögen Punkte auf der Erdoberfläche bedeuten, ferner MN, PQ beziehungsweise die wahren Horizonte dieser Punkte, d. h. die Durchschnitte der Verticalebenen derselben mit Kugeloberflächen von den Halbmessern AC und BC. Ist nun $AC > BC$, dann sagt man, der Punkt A liege über B, auch höher als B, und B tiefer als A. Ist von der Höhe eines Punktes die Rede, dann wird auch zugleich angegeben, auf wel-

chen wahren Horizont dieselbe zu beziehen sei, oder geschieht dies nicht, stillschweigend ein solcher vorausgesetzt, z. B. bei der Angabe von Berghöhen die Meeresfläche. Die Größe aber, welche die Höhe eines Punktes über einem anderen bezeichnet, d. h. wodurch solche gemessen wird, ist nichts anderes, als die Differenz der Halbmesser ihrer wahren Horizonte; demnach für A in Bezug auf B

$$AD = AC - BC = AC - DC = EC - BC.$$

Ganz dasselbe gilt von der Tiefe eines Punktes unter einem anderen, für welche, wie für die Höhe, die Benennung Höhenunterschied der Punkte A und B üblich ist. Alle Punkte des einen wahren Horizontes haben folglich gleiche Höhen oder Tiefen hinsichtlich beliebiger Punkte eines anderen, oder liegen in einerlei Niveau, z. B. B und F. Größte Kreise wahrer Horizonte heißen wahre Horizontallinien, deren es für einen einzelnen Punkt auf einem wahren Horizonte unzählig viele giebt, während zu zwei Punkten desselben nur eine einzige gehört, wie für B, F nur PQ.

Vom wahren Horizonte eines Punktes ist dessen scheinbarer Horizont verschieden, insofern man nach §. 9 unter letzterem die Berührungsebene jenes Punktes an seinen wahren Horizont versteht. In der Figur zeigt die Gerade HK nur den Durchschnitt einer Verticalebene des Punktes F mit dessen wahrem Horizonte, d. i. eine scheinbare Horizontallinie für F an. So werden nämlich alle in einem scheinbaren Horizonte liegenden Geraden genannt. Unzählig viele scheinbare Horizontallinien können für einen einzigen Punkt eines scheinbaren Horizontes gedacht werden, eine einzige jedoch nur für zwei Punkte desselben, etwa für F und G. Liegen die Punkte einander nahe, so können deren wahre und scheinbare Horizonte als in einerlei Ebene zusammenfallend erachtet werden; dasselbe gilt nachher auch von der wahren und scheinbaren Horizontallinie eines jeden dieser Punkte; für entferntere, vielleicht mehrere Meilen weit auseinander liegende Punkte findet solches nicht mehr statt. Sind F und D sehr entfernte Punkte desselben wahren Horizontes PQ, dann bedarf es nur der Fortbringung der Verticalen DC des Punktes D bis zum Durchschnitt I des scheinbaren Horizontes von F, um in der Verlängerung DI die Höhe des Punktes I über dem wahren Horizonte von F darzustellen. Dieselbe wird für nahe liegende Punkte verschiedener Horizonte durch den Abstand ihrer scheinbaren Horizonte gemessen und ist dann zugleich die Höhe des einen Punktes in Bezug auf den anderen.

§. 167.

Die Höhe DI des Punktes I im scheinbaren Horizonte über dem wahren des Punktes F läßt sich bestimmen, sobald man den Erdhalbmesser FC und die Entfernung FI der Punkte F und I kennt, denn alsdann ist:

$$1)\quad DI = \sqrt{(CF^2 + IF^2)} - CF,$$

und wenn der Winkel FCI gegeben wäre, dann würde

$$2)\quad DI = CF\left(\frac{1 - \cos FCI}{\cos FCI}\right)$$

sein.

Es beträgt der mittlere Erdhalbmesser 3268159 Toisen = 6369761 Meter = 11246443 Dresdner Ellen; setzt man ihn = r, DI = a, FI = b, so folgt:

$$a = \sqrt{(r^2 + b^2)} - r = r\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)} - r = r\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - r$$

$$= r\left(1 + \frac{b^2}{2r^2} - \frac{b^4}{8r^4} + \ldots\right) - r$$

$$= \frac{b^2}{2r} - \frac{b^4}{8r^3} + \ldots,$$

und weil in den meisten Fällen nur das erste Glied dieser Reihe beachtet zu werden braucht, indem b gegen r gewöhnlich sehr klein ist,

$$3)\quad a = \frac{b^2}{2r} \text{ oder in Dresdner Ellen}$$

$$4)\quad a = \frac{b^2}{22492886}.$$

Wäre z. B. b = 1000 Ellen, dann würde man haben:

$$a = \frac{1000^2}{22492886} = 0{,}0444\ldots \text{ Ellen}$$

oder 1,065 Zoll

$$\text{tang ICF} = \frac{b}{r} = \frac{1000}{11246443}$$

$$\angle ICF = 0^\circ\, 0'\, 18'',$$

aus welchem Beispiele hervorgeht, bis zu welcher Grenze hin der scheinbare Horizont eines Punktes mit seinem wahren verwechselt werden kann.

§. 168.

Das Messen horizontaler Linien geschah entweder direct oder indirect; nicht anders werden wir beim Messen verticaler Linien, d. i. beim Höhenmessen verfahren, und wie dort vor der Anwendung complicirter Mittel zuerst die einfachsten durch die Elementargeometrie dargebotenen gebraucht wurden, ganz so wird der Verlauf auch hier sein. Hiernach wird das Höhenmessen zunächst ein blos geometrisches sein, diesem das trigonometrische sich anreihen, sodann im sogenannten Nivelliren ein sehr einfaches Verfahren der Höhenmessungen gezeigt werden, und den Beschluß eine Methode machen, welche auf den Gesetzen der Elasticität der atmosphärischen Luft beruht, nämlich das Höhenmessen mittelst des Barometers.

Meistentheils sieht man sich genöthigt, Höhen indirect zu messen, indem nur selten die Umstände directes Anlegen des Maßstabes oder das Aufhängen eines Lothes gestatten, in welchen Fällen das Bestimmen der Höhe einer Anleitung nicht erst bedarf; daher alle nun folgenden Höhenmessungen indirecte sein werden.

§. 169.

Vom geometrischen Höhenmessen.

Hiervon wird besonders zur Angabe der absoluten Höhe eines Gegenstandes, d. i. eines oberen Punktes von einem unteren, z. B. der Spitze eines Thurmes oder Baumes von dessen Fuße Gebrauch gemacht, und wenn es sich um größte Genauigkeit nicht handelt, indem die hierzu gebräuchlichen Meßgeräthschaften — gewöhnlich nur Stäbe — mehr als annähernde Resultate der Höhenbestimmung keinesweges zulassen, die jedoch praktischen Bedürfnissen in den meisten Fällen völlig genügen.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes zu bestimmen, bis zu dessen Fuß hin ungehindert gemessen werden kann.

Auflösung 1. Mittelst des Schattens dieses Gegenstandes.

Es sei AB Fig. 177 der zu messende Gegenstand, A dessen höchster Punkt, B der Fußpunkt seines Perpendikels auf dem wagerechten Boden, BC der auf diesem gebildete Schatten; ferner ab ein lothrecht gestellter Stab, welchem der Schatten bc zukommt, so hat man, da AC und ac als parallel anzusehen sind:

$$bc : ab = BC : AB$$

$$AB = \frac{ab}{bc} \cdot BC$$

und folglich AB bestimmt, weil alle Stücke dieser Gleichung bis auf AB durch directe Messung gefunden werden können.

Auflösung 2. Mittelst zweier Stäbe.

Sei wiederum AB Fig. 178 die zu bestimmende Höhe; dann werde in irgend einem Punkte der wagerecht gedachten Bodenfläche ein Stab CD lothrecht errichtet, hierauf auch ein zweiter FE dergestalt, daß dessen Endpunkt E in die Gerade AD hineinfällt. Sind nun die Stablängen, desgleichen die Entfernung BC, sowie die der Stäbe, nämlich FC, bekannnt, dann folgt, wenn DG parallel zu BC vorausgesetzt wird:

$$DK : KE = DG : GA, \text{ oder}$$

$$FC : FE - CD = BC : AB - CD, \text{ daher}$$

$$AB = \frac{BC\,(FE - CD)}{FC} + CD.$$

Zusatz. Dieselbe Formel kann auch bei geneigtem Boden BC Fig. 179 benutzt werden, doch hat man hier, wie im vorigen Falle, das lothrechte Aufstellen der Stäbe mit größter Sorgfalt zu bewerkstelligen, am einfachsten unter Anwendung eines Senkels, nicht minder darauf zu sehen, daß das Auge des hinter dem Stabe CD gedachten Beobachters möglichst weit von dem Stabende D sich befinde, während ein Gehülfe den Stab FE so lange bewegt, bis dessen oberstes Ende E in die Gesichtslinie DA des Beobachters hineintritt.

Auflösung 3. Unter Gebrauch eines Spiegels.

Mittelst einer Libelle wird ein Planspiegel pq auf der Bodenfläche in horizontale Lage gebracht, sodann ein Stab CD so lange bewegt, bis bei lothrechtem Stande desselben in der Gesichtslinie durch D das Bild des Punktes A im Spiegel erscheint, nunmehr CE und CB gemessen, worauf man hat, da bekanntlich $\angle BEA = \angle CED$:

$$BA : BE = CD : CE, \text{ oder}$$

$$BA : BC - CE = CD : CE, \text{ daher}$$

$$BA = \frac{CD\,(BC - CE)}{CE}.$$

Zusatz. Leicht würde mit dem Diopterlineal eines Meßtisches ein Spiegel zu verbinden sein, wodurch weit schärfere Höhenbestimmungen geschehen könnten.

Auflösung 4. Vermittelst des Lehmann'schen Diopterlineals.

Fig. 181 stellt ein solches dar und zeigt auf den ersten Blick dessen Uebereinstimmung mit dem beim Meßtischapparate erwähnten.

Nur durch eine Zuthat ist dasselbe von dem gewöhnlichen Diopterlineale verschieden, insofern am Objectivdiopter ein verschiebbarer Rahmen mn angebracht ist, in dessen Mitte sich ein Faden ausgespannt befindet, welcher, wenn das Diopterlineal auf dem horizontal gestellten Meßtische ruht, eine horizontale Lage hat. Außerdem bemerkt man zu beiden Seiten des letzteren Fadens eine Scala, die eine von 0 bis 45 auf-, die andere von 0 bis 45 abwärts schreitend und zur Ablesung des Gradmaßes von Winkeln geeignet. Auf der entgegengesetzten Seite des Objectivdiopters sind ebenfalls zwei Scalen angebracht, nämlich auf jeder Seite des verticalen Fadens eine. Diese zeigen die wahre Größe der Tangenten jener Winkel an, deren Beobachtung auf folgende Art geschieht. Im Niveau der Anfangspunkte beider Scalen sind am Ocular diopter feine Oeffnungen A, A′ angebracht, die von den übrigen Ocularöffnungen keinesweges verschieden, jedoch mit diesen darum nicht zu verwechseln sind, weil sie die äußersten bilden. Vor einer oder der anderen dieser beiden Oeffnungen befindet sich das Auge des Beobachters, und es sind dieselben als Scheitel der zu beobachtenden Winkel anzusehen, deren Schenkel in die dioptrische Ebene des Lineals hineinfallen. Einer derselben ist stets horizontal und entweder AB oder A′B′, je nachdem das anzuvisirende Höhenobject C, C′ über oder unter dem scheinbaren Horizonte der Ocularöffnung A liegt, d. h. je nachdem Höhen- oder Tiefenwinkel, auch Elevations- oder Depressionswinkel beobachtet werden sollen. Das Objectivdiopter ist — wie aus der Figur deutlich hervorgeht — so eingerichtet, daß es Behufs der Winkelbeobachtung von seinem gewöhnlichen Platze hinweggenommen und an die Stelle F gebracht werden kann, dergestalt, daß nun die Horizontale AD oder A′D′ zwischen je einer der Ocularöffnungen und den entsprechenden Nullpunkten der Tangentenscalen als Sinustotus erscheint, für welchen allein jene Scalen Gültigkeit haben. Da DD′ = AD ist, so können höchstens Winkel bis zu 45° beobachtet werden, was aber auch in den meisten Fällen hinreicht, so daß man nicht nöthig haben wird, das Objectivdiopter durch Drehung desselben um seine horizontale Axe in eine schiefe Lage zu bringen, vielleicht in die Lage D″D‴, um aus ihr die zur Angabe des Höhenwinkels BAG tauglichen Elemente zu entnehmen.

Aeußerst einfach ist das Verfahren bei der Beobachtung selbst und besteht darin, den Rahmen so lange zu verschieben, bis das vor der Ocularöffnung gedachte Auge des Beobachters einen bestimmten Punkt des Höhenobjectes durch das Fadenkreuz gedeckt findet. Zum nach-

folgenden Ablesen der Winkel in Graden oder deren Tangenten dient auf der einen Seite als Inder der horizontale Faden selbst, indem dieser unmittelbar auf der Ebene der Scala aufliegt, auf der Rückseite hingegen eine wirklich in dem Rahmen angebrachte Inderlinie. Eine jede der Scalen enthält Gruppen von 10 zu 10 Theilen, und es sind zu leichterer Ablesung die entsprechenden Zahlen angemerkt. Fällt der Inder zwischen zwei Theilstriche hinein, dann ist die Theilung nach dem Augenmaße zu schätzen; auch könnte zum schärferen Ablesen mit dem Rahmen ein Nonius verbunden werden.

§. 170.

Fortsetzung. Angenommen, der Meßtisch sei auf wagerechtem Boden vor einem Höhenobjecte AB Fig. 182 gehörig aufgestellt, es schneide der Inder des Rahmens im Augenblicke, für welchen das Fadenkreuz e den Punkt A deckt, an der inneren, 100 gleiche Theile der Entfernung Dk darstellenden Scala 73,25 derselben ab, und die Entfernung BC betrage 433 Ellen. Sei überdies Dk = 10 Zoll, so folgt:

$$Dk : ke = DG : GA, \text{ oder}$$

$$\frac{10}{24} : \frac{73{,}25 \,.\, 10}{100 \,.\, 24} = 433 : GA, \text{ d. i.}$$

$$1 : 0{,}7325 = 433 : GA, \text{ daher}$$

$$GA = 433 \,.\, 0{,}7325 = 317{,}17 \ldots . \text{ Ellen.}$$

Es betrage ferner die Höhe der Ocularöffnung D über dem Fußboden, nämlich CD = BG, 2,5 Ellen, dann ist die gesuchte Höhe:

$$AB = AG + GB = 317{,}17 \ldots + 2{,}5$$

$$= 319{,}67 \ldots \text{ Ellen.}$$

Zusatz. An der äußeren, die Größe des Winkels GDA in Graden ausdrückenden Scala ke würde man für diese Stellung des Fadenkreuzes 36,2° reichlich gehabt haben, genauer 36,22 . . . . Grade oder 36° 13′ 21″, und dürfte nur schließen:

$$DG : GA = 1 : \text{tang } GDA, \text{ woraus}$$

$$GA = DG \,.\, \text{tang } GDA = 433 \,.\, \text{tang } 36° \, 13' \, 21''$$

$$= 317{,}17 \ldots \text{ Ellen,}$$

wie vorhin.

§. 171.

Fortsetzung. Erhebt sich die Bodenfläche vom Instrumente aus nach dem Höhenobjecte AB Fig. 183 zu gleichmäßig, dann messe

man CB, auch die Entfernung DC, oder trage solche auf einen, neben das Instrument hin lothrecht gehaltenen Stab auf. Wird dieser Stab in die verticale Lage BG versetzt, d. h. mit AB zusammenfallend, also BG = CD gemacht, ferner der Höhenwinkel FDG, hierauf FDA beobachtet, oder die Tangente eines jeden derselben für den Halbmesser Dk, dann kann AB leicht berechnet werden.

Es ergiebt sich ohne Mühe:

1) $AB = CB\,(\text{tang FDA} - \text{tang FDG})\cos FDG + CD$

2) $AB = \frac{kb - ke}{\sqrt{(Dk^2 + ke^2)}} \cdot CB + CD.$

Wäre z. B. ∠ FDA = 42° 12′, ∠ FDG = 28° 45′, CB = 312 und CD = 2,75 Ellen, dann würde nach 1

$AB = 312\,(\text{tang } 42° 12' - \text{tang } 28° 45') \cdot \cos 28° 45' + 2{,}75$

$= 312\,(0{,}9067 - 0{,}5486)\,0{,}8767 + 2{,}75 = 100{,}71\ldots$ Ellen sein.

Oder sollten die wirklichen Tangentenlängen in Rechnung gebracht werden, ohne Berücksichtigung des Gradmaßes der ihnen zugehörigen Winkel, so würde, wäre das Diopterlineal gestellt, wie im Beispiele des vorigen §., statt finden:

kb = 9,067 . . . Zoll
ke = 5,486 . . . "
Dk = 10,000 . . . "
BC = 7488,000 . . . "
CD = 66,000 . . . ", daher nach 2

$$AB = \frac{9{,}067 - 5{,}486}{\sqrt{(10^2 - 5{,}486^2)}} \cdot 7488 + 66$$

$$= \frac{26816{,}46}{11{,}40} + 66 = 2417{,}08 \text{ Zoll}$$

$= 100{,}71\ldots$ Ellen.

Zusatz. Gewöhnlich werden Höhenmessungen mittelst des Lehmann'schen Diopterlineals während oder nach einer Meßtischaufnahme der betreffenden Gegend vorgenommen, wodurch das beschwerliche directe Messen der Entfernungen der Meßtischstationen von den Höhenobjecten hinwegfällt, da dann diese mittelst des Cirkels auf der Planchette nach dem verjüngten Maßstabe abzunehmen sind. Inzwischen läßt dieses Diopterlineal nur bei geringen Entfernungen einigermaßen brauchbare Resultate zu; bei größeren werden dieselben wegen Brechung der Lichtstrahlen unsicher.

Der Erinnerung bedarf es wohl kaum, daß genanntes Diopterlineal auch dann noch zur Beobachtung von Verticalwinkeln geeignet sei, wenn dessen Objectivdiopter seinen gewöhnlichen Platz behält; nur muß in diesem Falle bekannt sein, wie viel Theile der Tangentenscala auf den Abstand beider Dioptern kommen.

§. 172.

Auflösung 5. Mittelst des Winkler'schen Baummessers (Dentrometer).

Derselbe besteht aus zwei nach Art eines Cirkels um ein Charnier D Fig. 184 beweglichen, in Zolle und Linien abgetheilten Schenkeln Dg und Da aus Holz. Einer derselben, hier Dg, wird mittelst einer Libelle horizontal eingestellt und ist, um ihn an einen Stab oder ein Stativ befestigen zu können, mit einem Zapfen p versehen. Bei D, g und a sind Visire angebracht, einestheils um an dem Höhenobjecte den Durchschnitt G der Horizontalen anmerken, anderntheils um den Schenkel Da in die Lage DA bringen zu können. Längs Dg ist ein beweglicher, mit derselben Eintheilung versehener Winkelhaken km angebracht, dergestalt, daß, wenn derselbe von D aus um so viele Zolle und nach Befinden Linien eingestellt wird, als wirkliche Längeneinheiten in der Entfernung CB aufgehen, das Stück kn des Winkelhakens die Höhe GA in verjüngtem Maße darstellt.

Beträgt z. B. BC 30 Ellen, so ist der Winkelhaken km in Dk = 30 Zoll Entfernung vom Charnier D aus einzustellen und nun zuzusehen, wie viele Zolle auf km vom anderen Schenkel Da abgeschnitten werden. Fände man kn = $42\frac{1}{2}$ Zoll, so würde die Höhe des Punktes A über DG, d. i. AG, $42\frac{1}{2}$ Ellen betragen, zu welcher, um die Gesammthöhe AB zu haben, das Stück GB hinzugerechnet werden müßte.

§. 173.

Ein sehr einfaches Instrument zum Höhenmessen, wodurch der vorliegenden Forderung gleichfalls entsprochen werden kann, besteht in einer rectangulären Tafel pqts Fig. 185 aus Holz oder Metall, an welcher in deren Mittellinie im Punkte c ein durch einen Körper a gespannter Faden befestiget ist. Entweder wird die Tafel mit freier Hand gehalten oder zur Erlangung genauerer Resultate auf passende Art unterstützt, sei es durch einen bloßen Stab oder ein wirkliches Stativ. Beim Gebrauche dieses Instrumentes sucht man dessen obere Kante pq in die Richtung des Auges und des obersten Punktes des

zu messenden Höhenobjects zu bringen, und sorgt während dieser Operation dafür, daß die Tafel vertical gestellt sei, was durch das Senkel ca leicht erkannt werden kann. Auf der Tafelfläche ist eine Eintheilung angebracht, wodurch sich der Stand des Senkels für den Beobachtungsaugenblick angeben läßt. Die Eintheilung ist aus der Figur deutlich zu erkennen und besteht in zu einander parallelen und rechtwinkligen, bezüglich gleich weit entfernten Geraden. uv ist parallel zu pq und von c in derjenigen Entfernung, in welcher sich alle übrigen Parallelen zu pq von einander befinden. In denselben Abständen sind die anderen, jene ersteren rechtwinklig durchschneidenden Parallelen zu ps oder qt.

Betrachten wir nun das Instrument für den Augenblick, in welchem der obere, vielleicht mit Visiren versehene Rand pq Fig. 186 der Tafel in seiner Verlängerung den obersten Punkt A der zu messenden Höhe AB trifft. Die Mittellinie ec begegnet dem oberen Rande pq in D, und wenn durch diesen Punkt eine Horizontale DG, so wie eine Verticale DC gedacht wird, welche letztere den unteren Tafelrand st in k schneidet, so kommen zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke AGD und keD zu Stande, ähnlich aber auch dem Dreiecke nec, dessen Hypotenuse cn ein Theil des gespannten Fadens ca ist. Hiernach hat man:

$$ce : en = DG : GA$$

$$GA = \frac{en}{ce} \cdot DG,$$

und sieht ein, daß obige Eintheilung — welche in der Zeichnung nur für Gruppen von 10 zu 10 Einheiten dargestellt erscheint, die aber in Wirklichkeit bis auf die einzelnen Einheiten und selbst deren Theile sich erstrecken kann — jedwede Rechnung entbehrlich macht.

Es sei $DG = 50$ Ellen gefunden worden, und der Faden habe im Augenblicke der Beobachtung die in Fig. 185 angegebene Lage ca', dann ist auf der Tafel zunächst die um 50 Einheiten vom Punkte c entfernte Parallele zu pq aufzusuchen, was auf den ersten Blick gelingt, weil nur die Zahl 50 in der Mittellinie ce bemerkt zu werden braucht. Hierauf ist nachzusehen, in welcher Entfernung von ce der Faden diese Parallele durchschneidet; hier in der Entfernung gh $= 30$ Einheiten, demnach beträgt GA 30 Ellen. Dazu kommt noch die Instrumentshöhe $DC = BG$, und wenn diese $2\frac{1}{4}$ Ellen ausmacht, so ist die gesuchte Höhe $AB = 30 + 2\frac{1}{4} = 32\frac{1}{4}$ Ellen.

Zusatz. Noch mancherlei Auflösungsmethoden der vorliegenden

Aufgabe würden sich anführen lassen, doch mögen die hier dargelegten genügen, um so mehr, da nur selten directes Messen bis zur Höhenlinie AB ausführbar ist.

§. 174.

Aufgabe. Die Höhe eines unzugänglichen Gegenstandes zu bestimmen.

Auflösung 1. Mittelst zweier ungleich langer Stäbe. Diese Auflösungsmethode besteht in einer wiederholten Anwendung der durch Fig. 178 vergegenwärtigten. Man setze mit Bezug auf Fig. 187 den Unterschied beider Stablängen $FE - DC = F'E' - D'C' = d$, deren Entfernungen in beiden Aufstellungen, nämlich $CF = a$, $C'F' = a'$, $CC' = b$, $AG = x$, $BC = y$, dann ist:

$$a : d = y : x$$

$$a' : d = y - b : x, \text{ daher}$$

$$y = \frac{ab}{a - a'},$$

$$x = \frac{db}{a - a'};$$

folglich die gesuchte Höhe $AB = \frac{db}{a - a'} + CD$.

Zusatz. Wäre die Bodenfläche BC nicht wagerecht, sondern geneigt, dann ist auf dieselbe Weise zu verfahren. Auch leuchtet ein, daß die Beobachtungen und Messungen mit größter Sorgfalt zu bewerkstelligen sind, wenn anders von der Wahrheit nicht allzusehr abweichende Resultate erlangt werden sollen. Besonders hat man b thunlichst groß zu wählen.

§. 175.

Auflösung 2. Vermittelst eines Spiegels.

Auch diese Methode besteht nur in der Wiederholung einer früheren, nämlich durch Fig. 180 bereits dargestellten, insofern statt einer einzigen Beobachtung deren zwei nach einander zu vollziehen sind.

E, E' Fig. 188 zeigen die Lage des Planspiegels an den zwei Beobachtungsstellen des horizontalen Bodens. Nun sei die Stablänge $CD = C'D' = l$, der Stäbe Abstand $CC' = a$, ferner $CE = m$, $C'E' = m'$, $AB = x$, $BC = y$, dann folgt:

$$m : l = y - m : x$$

$$m' : l = y - a - m' : x, \text{ daher ist}$$

$$y = \frac{am}{m - m'}$$

$$x = \frac{l\,(a - m - m')}{m - m'}.$$

Zusatz. Offenbar läßt sich der Forderung auch durch wiederholte Anwendung des Lehmann'schen Diopterlineals, und zwar genauer entsprechen, als nach obigen Verfahrungsarten. Auch leuchtet für sich ein, daß hierbei eine einzige Beobachtung hinreichen wird, sobald vorher die Länge der Horizontalen BC, nach einer oder der anderen der im §. 47 und sonst dargelegten Methoden der Messung unzugänglicher Geraden, ermittelt worden ist.

§. 176.

Trigonometrische Höhenmessung.

Dieselbe erfolgt mittelst dazu besonders eingerichteter Winkelinstrumente von mannigfaltiger Art, wovon wir bereits im Lehmann'schen Diopterlineale ein sehr einfaches kennen gelernt haben. In welcher Gestalt dieselben auch erscheinen mögen, durchgängig sind sie zum Messen verticaler, d. h. solcher Winkel geeignet, deren Schenkel in verticalen Ebenen liegend gedacht werden können. Hauptbestandtheile dieser Winkelinstrumente sind: ein voller in Grade und deren Theile eingetheilter Kreis, der Verticalkreis, oder nur ein Theil des Kreises, Gradbogen genannt, dessen Ebene beim Gebrauch des Instrumentes in verticale Lage gebracht wird. Mit demselben steht ein Diopterlineal oder gewöhnlich ein Fernrohr dergestalt in Verbindung, daß solches um eine, durch den Mittelpunkt des Verticalkreises gedachte und zu dessen Ebene rechtwinklige Axe drehend bewegt werden kann, während welcher Bewegung die dioptrische Ebene oder die optische Axe des Fernrohres beständig zu dieser Axe rechtwinklig bleibt. Ein damit verbundener Index oder Zeiger dient zum Ablesen der vom Lineale zurückgelegten Winkelbewegung, und es wird dieser Apparat entweder auf die horizontale Planchette eines Meßtisches aufgestellt oder von einem besonderen Stative getragen. Zu den ersteren gehört die schon früher erwähnte Kippregel, zu den letzteren der Theodolit.

§. 177.

Die Kippregel. Durch Vereinigung der Worte kippen, d. h. neigen, und Regel oder Lineal ist die Benennung Kippregel

entstanden, und zwar für ein in der niederen Feldmeßkunst äußerst nützliches Instrument, indem solches gleichzeitig zum Ziehen von Visirlinien und zum Höhenmessen dient.

In der Mitte eines Messinglineales ab Fig 189 a oder dessen einem Ende, etwa a näher als dem andern Ende b, ist eine Säule c befestiget und dazu bestimmt, vermittelst eines an deren oberem Ende angebrachten Zapfenlagers d dem Fernrohre ef als Stütze zu dienen; dergestalt, daß letzteres durch daran angebrachte Zapfen drehend bewegt oder gekippt werden kann. Mit dem Fernrohre fest verbunden ist ein Gradbogen gk, der sich folglich beim Kippen des Fernrohres mit bewegt. Dabei gleitet derselbe vor einem an der Säule c befestigten Nonius mn vorbei, welcher die durch Fig. 15 dargestellte und im §. 22 erläuterte Einrichtung hat, so daß hierdurch der Gradbogen von 5 zu 5 Minuten oder auch, je nach der übrigen Construction des Instrumentes, noch weiter eingetheilt erscheint. Vergeblich würde es sein, sobald der Nonius das Ablesen der Winkel am Gradbogen von 2 zu 2 Minuten oder selbst einzelner Minuten gestattete, während beim Horizontalstellen der Planchette MN, des Trägers der Kippregel, eine Unsicherheit von 3 bis 5 Minuten nicht vermieden werden könnte. Gewöhnlich ist aus diesem Grunde das Ablesen der Winkel von 5 zu 5 Minuten.

Wird das Lineal ab auf der horizontalen Planchette ruhend vorausgesetzt, dann liegen die Kante desselben und die optische Axe ef des Fernrohrs in einerlei Verticalebene. Zeigt der Inder des Nonius auf 0 des Gradbogens, so ist ef horizontal; giebt er einen anderen Winkel, z. B. 13° 25′ an, dann entspricht diese Größe zugleich der Neigung der Fernrohraxe ef gegen den Horizont*), um welchen Betrag das Fernrohr entweder aufwärts oder abwärts gerichtet erscheint, je nachdem es sich um einen Höhen- oder Tiefenwinkel handelt. Die Drehungsaxe des Fernrohres muß auf das Genaueste horizontal sein, und zu ihr rechtwinklig ef. Zwischen dem Ocular- und Objectivglase des Fernrohres, im Brennpunkte des ersteren, etwa bei i, befindet sich ein, durch Fig. 189 b dargestelltes Fadenkreuz, bestehend in zwei rechtwinklig an einander anliegenden äußerst feinen Fäden tu, vw, z. B. Spinnfäden, welche in einem Ringe festgehalten werden, der einen Knopf r hat, um ihn mittelst desselben im Ocularrohre je nach der individuellen Sehweite des Beobachters stellen zu

*) Wird, wie es hier und auch vorher mehrmals geschah, vom Horizont schlechtweg gesprochen, so ist darunter stets der scheinbare Horizont gemeint.

können. Einer der Fäden, hier tu, ist vertical, mithin der andere vw horizontal und ihr Durchschnitt s ein Punkt der optischen Axe ef des Fernrohres. tu hat sonach die Bedeutung des Verticalfadens im gewöhnlichen, vw hingegen die des Querfadens im Lehmann'schen Diopterlineale.

Zieht man längs der Kante des Diopterlineales eine Gerade auf der Planchette, so stellt sie die Horizontalprojection der Fernrohraxe ef dar, und man begreift jetzt, daß die Kippregel zum Aufzeichnen von Winkeln ebenso wie das gemeine Diopterlineal geeignet sei. Aus der durch die Physik als bekannt vorauszusetzenden Theorie des Fernrohres folgt aber, daß die Kippregel das gemeine Lineal weit übertrifft, da mittelst desselben Visirlinien nach sehr entfernten Objecten mit Sicherheit gezogen werden können, und nach näher liegenden selbst dann noch, wenn das gewöhnliche Lineal seine Dienste längst versagt hat, wie z. B. zur Zeit der Abenddämmerung.

In der Regel ist das Fernrohr ein terrestrisches, d. h. es zeigt die Gegenstände aufrecht, wenn schon auch astronomische, nämlich solche Fernröhre, welche umgekehrte Bilder darstellen, gebraucht werden. Dabei sind die besseren Fernröhre stets achromatische, worunter diejenigen verstanden werden, welche achromatische Linsengläser enthalten, deren Bestimmung dahin geht, die bei gewöhnlichen Linsen entstehenden, der Deutlichkeit der Bilder so nachtheiligen Farbenringe aufzuheben.

§. 178.

Prüfung der Kippregel. Eins der wesentlichsten Erfordernisse einer guten Kippregel besteht darin, daß dessen Visirebene, welche von der Axe des bewegten Fernrohres beschrieben wird, rechtwinklig zur Drehungsaxe sei. Um in dieser Hinsicht die Kippregel zu untersuchen, so bringe man dieselbe auf die Planchette des zuvor horizontal gestellten Meßtisches, wähle irgend eine Richtung und stecke in derselben möglichst weit entfernt einen Stab aus, einen zweiten ungefähr in der Mitte zwischen demselben und dem Instrumente. Hierauf wird das Fernrohr bei unverrückter Lage des Lineals umgekehrt, und nun nach der entgegengesetzten Seite in Bezug auf die vorige neuerdings in thunlichster Entfernung ein Stab in der Richtung der Visirebene ausgesteckt, vielleicht auch ein zweiter. Jetzt begiebt man sich hinter einen der äußersten Stäbe und sieht zu, ob mit diesem die übrigen in einerlei Verticalebene liegen, in welchem Falle der Kippregel die genannte erste Eigenschaft zukommt, während außerdem durch

Benutzung der zu diesem Behufe vorhandenen Stellschrauben so lange versucht werden muß, bis jener Bedingung entsprochen wird.

Nachdem die optische Axe des Fernrohres rechtwinklig zu dessen Drehungsaxe befunden worden ist, so hat man zweitens zu untersuchen, ob letztere und die Planchettenebene zu einander parallel sind. Zu diesem Behufe wird die Kippregel auf die Planchette mn Fig. 190 des nur annähernd horizontal gestellten Meßtisches gebracht, hierauf das Fernrohr ab nach einem möglichst hohen Objecte A gerichtet, sodann nach einem tief gelegenen B. Nun dreht man das Fernrohr bei unveränderter Lage des Lineales fg um seine Axe cd ganz herum, darauf auch das Lineal, so daß f nach g und g nach f hin zu liegen kommen, richtet das Fernrohr wiederum auf das Object A und bewegt es nun drehend abwärts, da dann, wenn cd zu mn parallel ist, das Object B von selbst in der Fernrohraxe angetroffen werden wird, während solche außerdem vor B vorbeigeht, vielleicht nach dem Objecte B′ hin. Letzteren Falles ist von den am Instrumente vorhandenen Stellschrauben Gebrauch zu machen und so lange zu operiren, bis sich das Eintreten des Objectes B in der Fernrohraxe verwirklicht. Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen und es genügt hierzu, darauf aufmerksam zu machen, daß fg und cd als zwei in parallelen Ebenen liegende Gerade anzusehen sind, welche durch die Gerade ek mit einander in Verbindung stehen. Während der Umdrehung des Lineals, die so vollzogen gedacht werden kann, daß fg fortwährend in der Planchettenebene verbleibt, beschreibt die Drehungsaxe cd, bei richtiger Lage, eine zu mn parallele Ebene, außerdem aber eine conische in k ihren Scheitel habende Oberfläche.

Hat die Kippregel beide Prüfungen bestanden, oder ist solche je nach deren Befunde berichtigt worden, dann eignet sie sich ohne Weiteres zum Messen von Verticalwinkeln; inzwischen noch keineswegs zum Höhenmessen, wenn nicht zugleich die Axe des Fernrohres während dessen Bewegung eine mit der Linealkante zusammenfallende oder doch zu ihr parallele Ebene beschreibt. Um auch in dieser Beziehung das Instrument zu prüfen, werden in die Planchettenfläche rechtwinklig zu ihr zwei äußerst feine Nadeln eingesteckt und hierauf die Planchette gedreht, bis beide Nadeln auf ein möglichst weit entferntes Object eingerichtet erscheinen, bei welcher Operation es unerläßlich ist, daß der Beobachter einige Schritte von der Planchette entfernt sei, um beide Nadeln gleichzeitig wahrnehmen zu können. Wird hierauf die Planchette festgestellt, der Rand des Lineals an beide Nadeln angelegt, und zeigt sich nun das gewählte Object in der dioptrischen Ebene,

dann genügt das Fernrohr obiger Forderung, während außerdem wiederum am Instrumente durch die hierzu angebrachten Vorrichtungen so lange nachgeholfen werden muß, bis auch diese Bedingung erfüllt wird.

§. 179.

Noch erübrigt die Prüfung des Gradbogens an der Kippregel. Hierbei hat man zu untersuchen, ob, wenn die Fernrohrare mit der Planchettenebene parallel ist, der Inder des Gradbogens auf 0° desselben einsteht. Wäre dies nicht der Fall, sondern fände eine Abweichung des Inder vom Nullpunkte der Theilung am Gradbogen statt, so ist es unerläßlich, die Größe dieser Abweichung, welche der Collimationsfehler heißt, mit in Rechnung zu bringen. Auf mancherlei Weise läßt sich dieser Fehler bestimmen, doch wollen wir hier nur die einfachsten Methoden anführen.

Zuvörderst erinnern wir an die Einrichtung des Gradbogens und bemerken, daß die Theilung desselben vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten hin, d. i. nach g und k zu fortschreitet, bis zu 45° oder auch weiter, und daß folglich zur Messung von Elevationswinkeln die linke Hälfte des Gradbogens dient, während die rechte Depressionswinkel anzuzeigen bestimmt ist. Nun sei der Nullpunkt der Eintheilung des Gradbogens bei horizontalem Stande der Fernrohrare um die Größe u links vom Inder entfernt, dann leuchtet ein, daß alle Elevationswinkel um diesen Betrag zu klein, die Depressionswinkel hingegen zu groß sich darstellen werden, während das Gegentheil eintreten würde, wäre der Nullpunkt eben so weit zur Rechten des Inder gelegen. Sind daher α, α' bezüglich die am Gradbogen abgelesenen Elevations- und Depressionswinkel für einerlei wahre Neigung $= \beta$ der Fernrohrare gegen den Horizont, so folgt:

$$\beta = \alpha \pm u$$

$$\beta = \alpha' \mp u$$

$$\alpha \pm u = \alpha' \mp u$$

$$\alpha - \alpha' = \mp 2u$$

$$\mp u = \frac{\alpha - \alpha'}{2}.$$

Um daher den Collimationsfehler der Kippregel zu bestimmen, bringe man in der Richtung der horizontalen Axe des Fernrohres ab Fig. 191 an einem möglichst langen lothrechten, vom Instrumente aus gemessen, weit entfernten Stabe ein Zeichen C an, richte sodann

das Fernrohr auf einen höheren Punkt A desselben und lese für diesen Stand am Gradbogen den Winkel ab; er sei $= 23° 15'$. Hierauf visire man nach einem Punkte B des Stabes, der so tief unter C liegt, als A sich darüber befand, und lese wiederum den betreffenden Winkel ab, der $23° 12'$ betragen mag. Folglich ist der Collimationsfehler $= \frac{23° 15' - 23° 12'}{2} = 0° 1' 30''$, um welchen die abgelesenen Elevationswinkel zu vermindern und die Depressionswinkel zu vermehren sind, so daß nun der wahre Winkel $AkC = BkC = 23° 15' - 0° 1' 30'' = 23° 12' + 0° 1' 30'' = 23° 13' 30''$ ist.

Der Nullpunkt der Eintheilung am Gradbogen liegt in diesem Falle bei horizontalem Stande der Fernrohrare $0° 1' 30''$ zur Rechten des Inder.

Gewöhnlich ist mit dem Fernrohre eine Röhrenlibelle entweder fest verbunden, oder wird nur zur Bestimmung des Collimationsfehlers mitten auf das Fernrohr aufgesetzt, was durch an der untern Fläche des Libellengestelles angebrachte Gabeln leicht erreicht werden kann. Die Libelle ist so justiret, daß für ihren horizontalen Stand auch die optische Axe des Fernrohres eine horizontale Lage hat, daher ohne Weiteres der Collimationsfehler erkannt werden kann.

Endlich besteht ein drittes hier zu betrachtendes Verfahren der Bestimmung des Collimationsfehlers darin, daß man die Kippregel auf die Planchette des Meßtisches aufstellt, längs der Linealkante eine Gerade zieht, das Fernrohr ab Fig. 192 nach dem Augenmaße horizontal richtet und in dieser Lage an zwei ausgesteckten Stäben Merkmale m, n anbringt. Hierauf wird das Lineal an der entgegengesetzten Seite jener Geraden angelegt, mit der Vorsicht jedoch, daß das Fernrohr seine Lage zur Planchettenebene nicht ändert, was ein Leichtes ist, da der Zapfen des Fernrohres mit einiger Reibung sich im Zapfenlager bewegt. Nach dieser Seite hin wird genau wie vorher neuerdings an einem in der Richtung der Fernrohrare aufgestellten Stabe ein Zeichen angebracht, und nun zugesehen, ob die drei Zeichen n, m, p in einer geraden Linie liegen. Wäre dies nicht der Fall, so bedarf es nur einer anderen Neigung des Fernrohres und dann der Wiederholung des nämlichen Verfahrens, welches überhaupt so lange fortzusetzen ist, bis die drei Zeichen in einerlei Gerade p′m′n′ hineinfallen. Sodann aber kann der Collimationsfehler am Gradbogen abgelesen werden.

§. 180.

Um mittelst der Kippregel Vistrlinien ziehen zu können, ist es unerläßlich, daß das Lineal derselben ab Fig. 189 a unmittelbar auf der Planchette ruht. Eine Handhabe p erleichtert dann die Führung des Instruments. Kommt es aber zugleich auf die Messung von Verticalwinkeln an, so bedarf es wohl kaum der Erinnerung, daß diese nur bei völlig wagerechtem Stande der Planchette zuverlässige Ergebnisse herbeiführen werde. Von selbst schließt diese Bedingung eine andere in sich ein, nämlich daß die Oberfläche der Planchette einer Ebene möglichst nahe kommt. Da nun bei Planchetten aus Holz dieser Anforderung nicht immer, wenigstens nicht mit Dauer Genüge geschieht, so hat man mit dem Lineal an dessen oberer Seite eine Libelle, hier eine Dosenlibelle, fest verbunden, damit in jeder Richtung des Lineals sogleich dessen horizontaler Stand beobachtet werden könne. Hierdurch wird die Unvollkommenheit der Planchettenfläche zwar erkannt, indessen nicht beseitiget. Allein es ist in dieser Zuthat ein Mittel geboten, für jede besondere Lage des Lineals dessen horizontalen Stand zu ermöglichen, was freilich nur unter Benutzung der am Meßtische zu diesem Behufe vorhandenen Stellschrauben erreicht werden kann, auch wohl, wenn schon weniger günstig, durch ferneres Eindrücken der Fußspitzen des Meßtisches in den Erdboden. Es ist dies eine Operation, welche nur dann der gleichzeitig auszuführenden Horizontalmessung unbeschadet vollzogen werden kann, sobald durch ein Versicherungsdiopter, dessen Vistrebene in die Richtung zweier sehr weit entfernten Richtobjecte hineinfällt, Gelegenheit dargeboten erscheint, die Planchette stets vollständig wieder in ihre ursprüngliche Lage zu versetzen.

Um für bloße Höhenmessungen, bei schon bekannten Horizontalentfernungen, von der Beschaffenheit der Planchettenfläche ganz unabhängig zu sein, hat man dem Lineale drei Stützen l, h ertheilt, wovon jedoch in der Figur nur zwei sichtbar sind, indem die dritte durch l gedeckt wird. Fig. 189 c und 189 d stellen dieselbe vom Lineale abgesondert dar und lassen deutlich erkennen, auf welche Art das Lineal mit diesen Stützen in Verbindung steht. Das Querstück $\psi\varphi$ dient zur unmittelbaren Aufnahme des Lineals, bietet diesem in der Vertiefung $\nu\varrho$ eine Lagerfläche dar und ist mit dem Lineale durch Schrauben fest verbunden. Zum Ueberfluß erhebt sich aus dieser Vertiefung ein die Linealplatte durchdringender Stift γ und schützt solche gegen seitliche Verrückung. Auf ähnliche Art geschieht die Unterstützung

des Lineals an dessen Ende bei a. Hier ruht dasselbe in der Vertiefung $\tau\theta$ des Stückes $\theta'\theta$ und ist davon mittelst einer Schraube λ und des Stiftes μ fest eingeschlossen. ω ist eine durch $\theta'\theta$ hindurch dringende Stellschraube, welche in einer Kugel endiget, die ihr Lager in einer kreisrunden Platte hat, und darin mit so wenig Reibung geht, daß diese Platte beim Drehen der Schraube ruhig liegen bleibt. Eine Schraube bei θ' dient dazu, jener Schraube ω einen mehr oder weniger leichten Gang in ihrer Schraubenmutter zu verschaffen. Eben so sind die Stellschrauben δ, ε eingerichtet. Letztere dienen dazu, der Linealplatte eine horizontale Drehungsare zu verschaffen, was durch das Anziehen der einen oder der anderen zu bewerkstelligen ist, während man darauf sieht, daß die Mitte der Luftblase der Libelle q und die Libellenare in einerlei Ebene hineinfallen. Ist dies erreicht, so bedarf es offenbar nur der Benutzung der Stellschraube ω, um zu bewirken, daß die Mitte der Luftblase in die Axe der Libelle hineintritt, für welchen Augenblick die Linealplatte eine horizontale Lage hat.

Anmerkung. Eine andere, in jeder Hinsicht vorzüglichere Einrichtung der Kippregel zeigt Fig. 193, welche von der vorigen dadurch abweicht, daß bei ihr zunächst der Gradbogen auf beiden Seiten des Nullpunktes bis 90° fortsetzt, hauptsächlich aber durch die Art der Verbindung des Fernrohres mit dem Träger a. Die Drehungsaxe ist nicht unmittelbar an dem Fernrohre angebracht, sondern dasselbe ruht in zwei Gabeln b, c, und wird in denselben entweder durch Stellschrauben, oder besser durch ringförmige Haken festgehalten, welche das Fernrohr umschlingen, dergestalt, daß nach Zurücklegung der Haken das Fernrohr ungehindert aus seinen Lagern herausgenommen werden kann.

§. 181.

Für die Zwecke der niedern Feldmeßkunst, wobei weder Krümmung der Erdoberfläche noch Brechung der Lichtstrahlen in Betracht kommen, eignet sich die Kippregel vor allen anderen Instrumenten zum Höhenmessen am meisten; also bei verhältnißmäßig kurzen Horizontaldistanzen der zu messenden Höhenobjecte, unter andern in den nachfolgend verzeichneten Fällen.

Erster Fall. AB Fig. 194 sei die zu bestimmende Höhe $=$ h, der beobachtete Elevationswinkel $GDA = bac = \alpha$, $DC = BG = m$ die bekannte Höhe der Ocularöffnung des Fernrohres über dem Fußboden, und $CB = DG = a$ die gemessene Horizontale zwischen C und B, dann ist:

$$h = a \,.\, \text{tang}\, \alpha + m.$$

Zusatz. Statt der Höhe DC der Ocularöffnung des Fernrohres über dem Boden kann offenbar die Höhe der Drehungsare desselben,

nämlich aC′ gewählt werden, was die Horizontaldistanz C′B nach sich zieht. Ja man wird diese Höhe oder überhaupt eine constante Höhe stets annehmen, wenn nicht, wie hier, blos eine einzelne Winkelmessung vorgenommen werden soll, sondern deren mehrere geschehen müssen.

Zweiter Fall. Der Boden zwischen dem Standorte des Instrumentes und der zu messenden Höhe AB Fig. 195 sei nach dieser hin geneigt; der horizontale Abstand des Instrumentes von dem Höhenobjecte AB, nämlich DG, bekannt und = a, der beobachtete Elevationswinkel GDA = α, sowie der Depressionswinkel GDB = β. Hiernach hat man die gesuchte Höhe

$$AB = a\,(\tang\alpha + \tang\beta)$$

$$= \frac{a\,.\,\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}.$$

Beispiel. Ist a = 173 Ellen, α = 13° 12′, β = 27° 40′, dann folgt:

$$AB = 173\,(\tang 13^\circ\,12' + \tang 27^\circ\,40')$$

$$= \frac{173\,.\,\sin(13^\circ\,12' + 27^\circ\,40')}{\cos 13^\circ\,12'\,.\,\cos 27^\circ\,40'}$$

$$= 131{,}275\ldots\text{Ellen}.$$

Dritter Fall. Vom Instrumente aus steige der Boden nach dem Höhenobjecte AB zu, und es sei die Schräge CB direct gemessen, auch die Instrumenthöhe CD von B aus auf BA aufgetragen, also BG = CD = m gemacht worden. Ferner mögen die beobachteten Elevationswinkel FDA und FDG bezüglich durch α und β ausgedrückt sein, so ergiebt sich daraus, wenn überdies GD′ = BC = n gesetzt wird:

$$n : GA = \sin(90^\circ - \alpha) : \sin(\alpha - \beta),\ \text{oder}$$

$$n : GA = \cos\alpha : \sin(\alpha - \beta)$$

$$GA = \frac{n\,.\,\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$$

$$AB = GA + BF = \frac{n\,.\,\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha} + m.$$

Beispiel. Es sei n = 114, m = $2\frac{1}{2}$ Ellen, α = 37° 30′, β = 12° 45′, dann ist:

$$AB = \frac{114\,.\,\sin(37^\circ\,30' - 12^\circ\,45')}{\cos 37^\circ\,30'} + 2{,}5$$

$$= 60{,}158\ldots + 2{,}5 = 62{,}658\ldots\text{Ellen}.$$

Vierter Fall. Im Standorte C Fig. 197 habe man bei der

Instrumenthöhe CD = m den Elevationswinkel GDA = α beobachtet, sei nachher im Alignement CB dem Höhenobjecte AB näher getreten, nach C′, und habe hier bei der Instrumenthöhe C′D′ = m′ den Winkel G′D′A = α' gemessen. Ist nun die Horizontale CC′ = n bekannt, dann läßt sich AB auf folgende Art bestimmen, wobei m > m′ vorausgesetzt werden mag.

Nachdem G′D′ bis E verlängert und DD′ gezogen worden, so ist:

$$DD' = \sqrt{n^2 + (m - m')^2}$$

$$\text{tang } DD'E = \frac{ED}{ED'} = \frac{m - m'}{n}.$$

Hieraus ergiebt sich der Winkel DD′E, welcher = φ gesetzt werden mag, und nun:

$$\angle AD'D = 180° - (\alpha' + \varphi)$$

$$\angle D'AD = \alpha' - \alpha$$

$$DD' : AD = \sin(\alpha' - \alpha) : \sin[180° - (\alpha' + \varphi)], \text{ oder}$$

$$\sqrt{n^2 + (m - m')^2} : AD = \sin(\alpha' - \alpha) : \sin(\alpha' + \varphi)$$

$$AD = \frac{\sin(\alpha' + \varphi)\sqrt{n^2 + (m - m')^2}}{\sin(\alpha' - \alpha)}$$

$$AD : GA = 1 : \sin\alpha$$

$$GA = AD \cdot \sin\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha' + \varphi)\sqrt{n^2 + (m - m')^2}}{\sin(\alpha' + \alpha)}$$

$$AB = GA + BG = GA + m.$$

Ebenso würde AG′ mittelst AD′ bestimmt werden können, was eine Controle für die vorige Rechnung gewährt.

Das Rechnungsgeschäft gestaltet sich sehr einfach, wenn die Instrumenthöhen DC und D′C′ einander gleich sind, oder sobald, wenn man sich aus E den Visirstrahl EA denkt, $\angle$ G′EA = $\angle$ GDA gesetzt wird, was in der Praxis unbedenklich geschehen kann.

Beide Voraussetzungen führen zu der Formel

$$AB = \frac{n \sin\alpha' \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} + m.$$

Beispiel. Man habe $\alpha = 25° 5'$, $\alpha' = 41° 30'$, n = 79, m = $2\frac{3}{4}$, m′ = $2\frac{1}{2}$ Ellen, dann ist:

$$DD' = \sqrt{79^2 + (2\tfrac{3}{4} - 2\tfrac{1}{2})^2} = 79{,}253 \ldots \text{ Ellen.}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{\frac{1}{4}}{79} = \frac{1}{316}$$

$$\log \text{tang}\, \varphi = 7{,}5003129$$

$$\varphi = 0^\circ\, 10'\, 52''$$

$$GA = \frac{\sin 25^\circ\, 5' \,.\, \sin (41^\circ\, 30' + 0^\circ\, 10'\, 52'') \,.\, 79{,}253}{\sin (41^\circ\, 30' - 25^\circ\, 5')}$$

$$= 79{,}054\,..\ \text{Ellen}$$

$$AB = 79{,}054 + 2{,}75 = 81{,}804\,..\ \text{Ellen.}$$

Ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der Instrumenthöhen findet man:

$$AB = \frac{79 \,.\, \sin 41^\circ\, 30' \,.\, \sin 25^\circ\, 5'}{\sin (41^\circ\, 30' - 25^\circ\, 5')} + 2{,}75$$

$$= 81{,}271\,..\ \text{Ellen,}$$

demnach um 0,532 Elle zu klein.

Der Fehler wird jedoch in Wirklichkeit weit kleiner sein, weil eine so bedeutende Differenz der Instrumenthöhen, wie die hier angenommene von $\frac{1}{4}$ Elle, selten vorkommt, auch leicht vermieden werden kann, daher in den meisten Fällen die zweite der obigen Formeln für AB hinreichende Genauigkeit gewährt.

§. 182.

Fünfter Fall. Wiederum sei AB Fig. 198 das an seinem Fuße B unzugängliche Höhenobject, und von diesem aus der Boden abfallend geneigt. In C habe man bei der Instrumenthöhe CD den Elevations- und Depressionswinkel $GDA = \alpha$, $GDB = \beta$ beobachtet, darauf den Meßtisch über C′ gebracht und ihn daselbst im Alignement CB eingerichtet, nachdem vorher in C ein Stab mit einem Merkmale D zurückgelassen worden ist. Bei der nämlichen Instrumenthöhe, d. i. bei $C'D' = CD$, mögen die Elevationswinkel $AD'G' = \alpha'$, $DD'G' = \beta'$ gemessen worden sein, sowie endlich die Länge $CC' = DD' = l$ oder deren Horizontalprojection $EC' = n$ gegeben werde.

Hiernach findet statt:

$$DD' : AD = \sin DAD' : \sin AD'D, \text{ d. i.}$$

$$l : AD = \sin [(90^\circ - \alpha') - (90^\circ - \alpha)] : \sin (\alpha' - \beta')$$

$$l : AD = \sin (\alpha - \alpha') : \sin (\alpha' - \beta')$$

$$AD = \frac{l \sin (\alpha' - \beta')}{\sin (\alpha - \alpha')}; \text{ ferner}$$

$$AB : AD = \sin ADB : \sin ABD, \text{ oder}$$

$$AB : AD = \sin (\alpha + \beta) : \sin [180^\circ - (\beta + 90^\circ - \alpha)]$$

$$AB : AD = \sin (\alpha + \beta) : \sin (90^\circ + \alpha - \beta)$$

$$1)\ AB = \frac{AD \,.\, \sin(\alpha+\beta)}{\sin(90^\circ+\alpha-\beta)} = \frac{AD \,.\, \sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{l \,.\, \sin(\alpha'-\beta') \,.\, \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\alpha') \,.\, \cos(\alpha-\beta)}.$$

Oder ist die Horizontalprojection n der Länge l bekannt, wie dies der Fall sein könnte, wenn die Umgegend des Höhenobjectes bereits mit dem Meßtische aufgenommen worden wäre, dann schließe man:

$$CC' : CE = 1 : \cos CC'E$$

$$l : n = 1 : \cos\beta'$$

$$l = \frac{n}{\cos\beta'}, \text{ daher}$$

$$2)\ AB = \frac{n \,.\, \sin(\alpha'-\beta') \,.\, \sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta' \,.\, \sin(\alpha-\alpha') \,.\, \cos(\alpha-\beta)}.$$

Beispiel. Es sei $n = 182$ Ellen, $\alpha = 43^\circ\,15'$, $\beta = 10^\circ\,5'$, $\alpha' = 27^\circ\,45'$ und $\beta' = 15^\circ\,10'$, dann ist:

$$AB = \frac{182 \,.\, \sin(27^\circ\,45' - 15^\circ\,10') \,.\, \sin(43^\circ\,15' + 10^\circ\,5')}{\cos 15^\circ\,10' \,.\, \sin(43^\circ\,15' - 27^\circ\,45') \,.\, \cos(43^\circ\,15' - 10^\circ\,5')}$$

$$= \frac{182 \,.\, \sin 12^\circ\,35' \,.\, \sin 53^\circ\,20'}{\cos 15^\circ\,10' \,.\, \sin 15^\circ\,30' \,.\, \cos 33^\circ\,10'}$$

$$\log AB = 1{,}3453038$$

$$AB = 22{,}146\ldots \text{ Ellen.}$$

§. 183.

Sechster Fall. Verhindern Umstände die Aufstellungen des Instrumentes im Alignement zum Höhenobjecte AB Fig. 199, dann kann eine seitlich desselben gewählte Standlinie, in Verbindung mit an den Endpunkten derselben vorzunehmenden Winkelbeobachtungen, zur fraglichen Höhenbestimmung führen, und zwar unter Benutzung des Meßtisches und der Kippregel auf folgende Art.

Der Meßtisch wird in einem, durch möglichst weit entfernte Richtobjecte XY bezeichneten Alignement eingerichtet, die Alignementslinie auf der Planchette gezogen, in derselben beliebig ein den Standort C des Instrumentes darstellender Punkt gewählt, sodann von ihm aus der Elevationswinkel ADG beobachtet, nicht minder der Depressionswinkel BDG, nun der Meßtisch nochmals in diesem Alignement aufgestellt, etwa über C, und neuerdings aus dem, den zweiten Standpunkt auf dem Felde bedeutenden Punkte der Alignementslinie der Elevationswinkel

AD'G' ermittelt, zugleich auch der Depressionswinkel BD'G', endlich der horizontale Abstand beider Stationen gemessen. Wäre aber die Bodenfläche geneigt, so müßte die Größe der Neigung bestimmt und die auf der geneigten Fläche gemessene Standlinie auf jene horizontale reducirt werden, was ein Leichtes ist, indem zu diesem Behufe nur, während das Instrument sich noch in C befindet, im künftigen Standpunkte C' ein Stab lothrecht aufgestellt und an demselben in der Höhe CD' = CD des Instruments ein Zeichen D' angebracht zu werden braucht. Ein Visirstrahl DD' nach diesem Zeichen hin zeigt dann sofort bezüglich durch seine Erhebung oder Senkung unter den Horizont von D die geforderte Neigung C'CY der Bodenfläche an, und es ist die Horizontalprojection der gemessenen Länge CC' : CE = CC' . cos C'CY, z. B. für eine Bodenneigung von 9° 45' und eine 217,55 Ellen gemessene Länge = 217,55 . cos 9° 45' = 214,408 . . Ellen. Versäumte man nicht, aus den Stationen C, C' Visirlinien nach dem Höhenobjecte AB hin zu ziehen, so sind hierdurch alle zur Berechnung der Höhe AB nöthigen Stücke dargeboten.

Nach irgend einem sorgfältig eingetheilten Maßstabe messe man die Seiten des verjüngten Dreieckes auf der Planchette, dessen drei Eckpunkte beziehungsweise die Endpunkte der Standlinie CC' und das Höhenobject bedeuten, führe die Rechnung auf Grund der hierbei erlangten Messungsergebnisse bis zum Schluß, d. h. bis zur Angabe der Höhe AB in Einheiten des gewählten Maßstabes fort, und sehe endlich zu, welcher wahren Länge das gefundene Resultat entspricht. Da die geforderte Höhe, nach den oben entwickelten Formeln, entweder mittelst der Horizontalen CK = DG und der Winkel ADG, BDG, oder unter Benutzung von EK = D'G' nebst den Winkeln AD'G', BD'G' berechnet werden kann, so bietet sich in diesem Umstande Gelegenheit dar, beide Rechnungsresultate durch einander zu controliren.

Leicht würde es jetzt sein, die Höhe des Punktes C' über C, d. i. C'E zu bestimmen — wäre anders dieselbe nicht schon durch die Länge CC' und ihre Neigung C'CE bekannt — indem es hierzu offenbar nur der Subtraction der relativen Höhen AG und AG' bedürfte, d. h. so viel A höher über C, als über C' liegt, um diesen nämlichen Betrag ist C tiefer als C' gelegen.

Gesetzt es sei nach dem gewählten Maßstabe die verjüngte Standlinie CE = 27,56, die Horizontale von C nach AB, d. i. CK = DG = 25,23, ebenso von C' nach AB, nämlich C'G = D'G' = EK = 20,34, ferner ∠ ADG = 37° 12', ∠ BDG = 9° 30', ∠ AD'G' = 35° 19', und ∠ BD'G' = 23° 45', dann ist:

$$AB = GD\,(\text{tang } ADG + \text{tang } BDG) = 25{,}23\,(\text{tang } 37^\circ 12' + \text{tang } 9^\circ 30')$$
$$= 23{,}363 \ldots \text{ oder}$$
$$AB = G'D'\,(\text{tang } AD'G' + \text{tang } BD'G') =$$
$$20{,}34\,(\text{tang } 35^\circ 19' + \text{tang } 23^\circ 45')$$
$$= 23{,}360 \ldots$$

um 0,003 von der vorigen Angabe abweichend. Wird als die wahrscheinlichste Höhe das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten genommen, so ergiebt sich $AB = \frac{23{,}363 + 23{,}360}{2} = 23{,}361 \ldots$ Einheiten des gewählten Maßstabes, folglich ist $AB = \frac{23{,}361 \,.\, 214{,}408}{27{,}56}$ $= 181{,}741 \ldots$ Ellen.

Nun ist die relative Höhe des Punktes A über D, nämlich $AG = DG \,.\, \text{tang } ADG = 25{,}23 \text{ tang } 37^\circ 12' = 19{,}149 \ldots$, diejenige über D' oder $AG' = D'G' \,.\, \text{tang } AD'G' = 20{,}34 \,.\, \text{tang } 35^\circ 19' = 14{,}411$; folglich die relative Höhe des Punktes D' über D oder, was einerlei ist, von C' über C, d. h. $C'E = CC' \,.\, \sin C'CE = AG - AG' =$ $217{,}55 \,.\, \sin 9^\circ 45' = 19{,}149 - 14{,}411 = 4{,}738$ Maßstabseinheiten $= \frac{214{,}408 \,.\, 4{,}738}{27{,}56} = 36{,}860 \ldots$ Ellen, welches Resultat die oben angeführte Bodenneigung bestätigt.

§. 184.

Noch leichter und selbst zuverlässiger kann der Forderung des vorigen Falles mittelst eines Winkelinstrumentes entsprochen werden, welches das Messen horizontaler und verticaler Winkel zugleich gestattet, z. B. eines Thodoliten. Denn hat man mit demselben außer den dort in Rechnung gebrachten Verticalwinkeln auch noch die Horizontalwinkel KCE und CEK gemessen, dann führen folgende Schlüsse zur Angabe der Höhe AB:

$$CE : CK = \sin CKE : \sin CEK$$
$$CE : DG = \sin [180^\circ - (KCE + CEK)] : \sin CEK$$
$$CE : DG = \sin (KCE + CEK) : \sin CEK$$
$$DG = \frac{CE \,.\, \sin CEK}{\sin (KCE + CEK)}, \text{ daher}$$
$$AB = \frac{CE \,.\, \sin CEK\,(\text{tang } ADG + \text{tang } BDG)}{\sin (KCE + CEK)}$$
$$= \frac{CE \,.\, \sin KCE\,(\text{tang } AD'G' + \text{tang } BD'G')}{\sin (KCE + CEK)}.$$

§. 185.

Der Theodolit ist kein Instrument der niedern Feldmeßkunst, und wir bemerken daher nur, daß derselbe hauptsächlich aus zwei auf die mannigfaltigste Art mit einander verbundenen Kreisen besteht, einem Horizontal- und einem Verticalkreise. Dieselben sind mit Gradeintheilungen und überdies mit Nonien versehen, um das Ablesen der beobachteten Winkel je nach Erforderniß weit genug bewerkstelligen zu können, bis auf einzelne Minuten, ja selbst Secunden. Am Verticalkreise ist ein um eine horizontale Axe bewegliches Fernrohr mit Fadenkreuz angebracht, dergestalt, daß die optische Axe desselben in allen Lagen des Rohres rechtwinklig zu dieser Axe verbleibt, d. h. stets in einer Verticalebene enthalten ist. Fernrohr und Verticalkreis sind in unveränderliche Verbindung mit einander gebracht, daher letzterer sich um die nämliche Horizontalaxe drehend mit bewegt. Dabei gleitet der Verticalkreis vor einem Index vorbei, welcher an einem der Träger der Fernrohraxe befestiget ist, ein Umstand, welcher die Möglichkeit der Messung verticaler Winkel bedingt. Andererseits ruhen die Träger der Fernrohraxe auf einer horizontalen, um einen verticalen Zapfen beweglichen und am Rande einen Index enthaltenden Scheibe, dem Alhidadenkreise. Dieselbe wird von dem, mit dem Stative des Theodoliten fest verbundenen Hauptkreise ringförmig eingeschlossen. Letzterer enthält die Gradeintheilung und gestattet so das Messen horizontaler Winkel. Das Stativ ist dem eines Meßtisches ähnlich, nur wegen der im Verhältniß zur Planchette größeren Last dauerhafter gebaut; auch steht mit demselben ein Versicherungsfernrohr in Verbindung, welches vor Beginn der Beobachtungen auf ein Object scharf eingestellt wird, und durch welches man von Zeit zu Zeit hindurchsieht, um sich von der unverrückten Lage des Instrumentes zu überzeugen. Dies die Einrichtung des Theodoliten in ihren rohesten Contouren, deren weitere Ausführung ohne Zuziehung einer detaillirten Zeichnung nicht wohl möglich ist, am besten aber an der Hand des wirklichen Instrumentes gelingt.

Von vorzüglichem Rufe sind die Theodoliten aus dem mechanischen Institute von T. Ertel in München.

§. 186.

Vom Nivelliren.

Diese Operation ist vom Höhenmessen nicht wesentlich verschieden, insofern solche wie dieses die Angabe des Höhenunterschiedes von

Punkten auf der Erdoberfläche bezweckt. Nur durch die Wahl der Mittel weichen beide von einander ab, da beim Höhenmessen aus beobachteten Verticalwinkeln und gemessenen Standlinien auf die gesuchte Höhe geschlossen wird, während hier, d. i. beim Nivelliren, Alles darauf ankommt, den lothrechten Abstand eines Punktes von dem scheinbaren Horizonte eines anderen durch unmittelbares Ablesen an einem Maßstabe zu bestimmen, unabhängig von gemessenen Standlinien und Verticalwinkeln. Der Apparat zum Nivelliren enthält daher als Hauptbestandtheile zwei hierzu dienliche Stücke, wovon das eine den scheinbaren Horizont darzustellen bezweckt, das andere aber den Abstand desselben von irgend einem gegebenen Punkte auszudrücken bestimmt ist. Jenes wird durch das eigentliche Nivellirinstrument oder Niveau erreicht, dieses durch einen in Zolle oder andere gleiche Theile eingetheilten Stab, die Nivellirlatte. Das Niveau erscheint in mannigfaltigster Gestalt, als Setzwage, Wasser- oder Quecksilberniveau, als Libellenniveau mit Dioptern oder Fernrohr. Ebenso verhält es sich mit der Nivellirlatte, die entweder nur aus einem einzelnen Stabe besteht, oder deren zwei Stäbe mit einander verbunden erscheinen. Für niedere Zwecke, bei welchen es auf größte Genauigkeit nicht ankommt, bedient man sich der einfacheren Nivellirgeräthschaften, gewöhnlich der Setzwage, während im Gegentheil, d. h. sobald die Höhenunterschiede von Punkten sehr genau, z. B. bis auf Bruchtheile einer Linie zu bestimmen sind, auch die hierzu geeigneten Instrumente ausgewählt werden; letzterenfalls in der Regel das mit einem Fernrohr versehene Libellenniveau. Ganz dasselbe gilt von der Nivellirlatte.

Da das Lehmann'sche Diopterlineal und die Kippregel ebenfalls zur Darstellung des scheinbaren Horizontes geeignet sind, so müssen wir beide Instrumente mit zu den Niveau's zählen.

§. 187.

Die Setzwage und ihr Gebrauch. In einfachster Gestalt erscheint dieselbe als ein dreiseitiges Bret abc Fig. 200, woran in e ein Loth ek befestigt ist, dessen Gewicht k — gewöhnlich eine Bleikugel — in einer Führung mn sich ungehindert bewegen kann, sobald das Dreieck abc eine verticale Lage angenommen hat. Auf dem Brete ist eine zu ab rechtwinklige Linie ek angemerkt, so daß ab horizontal gelegen sein wird, falls der Faden des Lothes diese Linie deckt. Es vergegenwärtigt also ab einen scheinbaren Horizont, welcher dadurch beliebig erweitert werden kann, daß man die Setzwage

auf eine gerade zugerichtete Latte df aufsetzt. Ist dessen untere Kante uv der oberen parallel, so stellt auch diese einen scheinbaren Horizont dar. Wird nun diese Latte auf den Köpfen u und v zweier lothrecht in den Erdboden eingesteckter Pfähle uh, vp ruhend gedacht, dann bedarf es jetzt nur der Subtraction der über dem Erdboden hervorragenden Pfahllängen uh und vg, um sogleich im gebliebenen Reste die Höhe des Punktes g über h oder das Gefälle zwischen beiden Punkten zu erhalten. Denn werden hp und gq als parallel zu uv vorausgesetzt, so ist gp = pv — gv = hu — gv.

Die Richtigkeit der Setzwage wird daran erkannt, daß der Faden des Lothes auch dann noch den vorgezeichneten Strich ek deckt, wenn der Setzwage eine entgegengesetzte Stellung ertheilt, nämlich b nach a und umgekehrt gebracht worden ist.

Eine bessere Einrichtung der Setzwage zeigt Fig. 201. Auf einer Latte uf erhebt sich eine andere rechtwinklig und ist durch Streben ac, be gestützt. Im Punkte e des Mittelstückes ist das Loth ek aufgehängt, welches sich wie vorhin ungehindert in einer bogenförmigen, mit einem Gradbogen versehenen Führung mn bewegen kann. Loth und Gradbogen befinden sich in einem, durch eine Glastafel bedeckten Gehäuse, so daß mit dieser Setzwage auch während des Windes gearbeitet werden kann. Da die Latte uf mehrere Ellen lang ist, so bedarf es bei ihr nicht, wie bei der vorigen, einer Unterlatte, sondern es kann diese Setzwage unmittelbar auf die Köpfe in den Boden eingeschlagener Pfähle gestellt werden. Der Gradbogen, welcher auf beiden Seiten des in die Lothlinie ek hineinfallenden Nullpunktes höchstens bis auf 10° fortschreitet, macht es möglich, auf der Erdoberfläche Linien von gegebener, 10° nicht übersteigender Neigung abzustecken, daher diese Setzwage besonders bei der Anlage von Canälen und Straßen angewendet wird.

§. 188.

Soll ein Nivellement mit der Setzwage vollzogen, vielleicht das Gefälle zwischen den Punkten a, b Fig. 202 angegeben, d. h. der durch das Perpendikel aq gemessene Abstand der scheinbaren Horizonte qb und ap beider Punkte gefunden werden, dann ist es gleichgültig, von welchem dieser Punkte aus die Operation ihren Anfang nimmt. Gesetzt, man habe bei a begonnen, nämlich mittelst der Setzwage einen Stab gc dergestalt über a in horizontale Lage gebracht, daß das Stabende c den Erdboden berührt, und hierauf den lothrechten Abstand ag des Punktes a vom scheinbaren Horizonte für c gemessen,

dann übersieht man leicht, wie es nur der Wiederholung dieses nämlichen Schrittes bedarf, um die Höhe eines anderen Punktes, etwa d über c, zu erlangen. d sei der höchste Punkt des Terrains zwischen a und b, so ist die bis zu ihm hin erstiegene Höhe = ag + ch = pn + om = pm. Angelangt in d habe man den Stab di wagerecht eingestellt und durch einen Gehülfen das Perpendikel ie messen lassen. Um den Betrag desselben liegt e tiefer als d, daher ist die Höhe von d über a = pm — ie = pm — mn. Ferner habe man f um die Größe kf tiefer als e, desgleichen b um lb tiefer als f liegend befunden, dann ist die Tiefe von b unter d offenbar = ie + kf + lb = mn + nl + lb = mb, folglich das gesuchte Gefälle zwischen a und b, nämlich aq = mb — mp, d. h. gleich der algebraischen Summe der einzelnen Perpendikel, sobald die zu höher liegenden Punkten führenden als positive, diejenigen aber, welche auf scheinbare Horizonte tiefer liegender Punkte des Terrains Bezug haben, als negative Größen angesehen werden.

Beispiel. Es sei gefunden worden: ag = 12, ch = 7, ie = 3, kf = 20 und lb = 15 Zoll, dann ist das Gefälle zwischen a und b, nämlich

aq = (12 + 7 — 3 — 20 — 16) = 19 — 39 = — 20 Zoll,

d. h. um 20 Zoll liegt der Punkt b unter dem scheinbaren Horizonte des Punktes a.

Zusatz. Das Gegentheil würde statt gefunden haben, wäre die algebraische Summe der einzelnen Perpendikel positiv ausgefallen, so daß man also aus der Beschaffenheit dieser Summe auch sogleich erkennt, welcher von den beiden Punkten a und b der höher oder tiefer liegende sei.

§. 189.

Die hydrostatische Wage oder Canalwage. Sie beruht auf dem aus der Physik bekannten Satze, daß für den Gleichgewichtszustand einer in einem communicirenden Rohre befindlichen Flüssigkeit die Oberflächen derselben in einerlei Niveau liegen, und heißt Wasser- oder Queckſilberwage, je nachdem als Flüssigkeit Wasser oder Quecksilber angewendet wird. Fig. 203 zeigt eine Wasserwage; a stellt in ihr eine Röhre aus Blech dar, an deren Enden sich gehörig eingekittete Glascylinder erheben. Wird in das auf solche Art zu Stande gekommene Gefäß Wasser — mit irgend einem Stoffe gefärbt — bis zu beliebiger Höhe hineingefüllt, dann zeigen, nachdem

dasselbe zur Ruhe gekommen ist, dessen Oberflächen b, c einen Horizont an, und es kann ein vor c oder b gedachter Beobachter erkennen, ob in diesem Horizonte ein Object, etwa x, gelegen ist. Das Blechrohr ist mit einer Hülse d versehen, um es mittelst derselben auf einem Stabe zu befestigen, welcher der Wasserwage als Stativ dient.

Da nicht durch die Glasröhren hindurch, sondern neben denselben vorbei zu sehen ist, so gewährt das Instrument in der gegenwärtigen Gestalt wenig Zuverlässigkeit. Werden nach de la Hire der Wage Dioptern beigefügt, Haardioptern, welche auf Holzcylindern angebracht sind und im Wasser schwimmen, dann läßt sich schon mit mehr Genauigkeit ein Horizont darstellen. Nur setzt dies voraus, daß die Schwimmer — so werden die mit Dioptern versehenen Holzcylinder genannt — hinsichtlich ihrer Dimensionen und Gewichte völlig mit einander übereinstimmen, wovon man sich leicht, und zwar durch bloße Verwechselung der Schwimmer, überzeugen kann.

Keith führte statt des Wassers Queckſilber ein, welches in mehr als einer Hinsicht vor dem Wasser den Vorzug verdient. Ein Keith'sches Queckſilberniveau ist in Fig. 204 abgebildet worden. Dasselbe besteht aus einem rechtwinklig vierseitigen Holzprisma ab Fig. 204 a, in dessen Innern das communicirende Rohr c ausgearbeitet ist, welches an beiden Enden in zwei lothrechte Weitungen d, e von quadratischem Querschnitt übergeht. In dieses Rohr hinein wird mittelst eines Trichters das Queckſilber gegossen, und auf dessen Oberflächen werden sodann die mit Dioptern versehenen Schwimmer f, g gestellt. Zur Aufbewahrung derselben beim Nichtgebrauch des Instrumentes, so wie des Trichters aus Horn und der Flasche mit dem Queckſilber sind in dem Holzstück besondere, den Formen dieser Gegenstände entsprechende Vertiefungen angebracht, auch ist die Wage mit einem in Charnieren beweglichen Deckel versehen, der überdies beim Gebrauch der Canalwage als Schutzwand gegen Wind und Sonnenstrahlen dient. Fig. 204 b zeigt einen Schwimmer von der Seite, und läßt eine feine Ocularöffnung h und einen mit dieser in einerlei Horizont liegenden ausgespannten Faden k erkennen. Der Schwimmer f ist mit dem Schwimmer g bis auf die Stellung des Fadens von gänzlich gleicher Beschaffenheit, insofern dieser sich der Ocularöffnung des Schwimmers g gegenüber befindet, dergestalt, daß ein vor h gedachtes Auge mittelst des Querfadens bei f wahrzunehmen vermag, ob irgend ein Object, etwa x, im scheinbaren Horizonte der Ocularöffnung h gelegen sei, was voraussetzt, daß h so wie der Faden des Schwim-

mers f von den Queckſilberſpiegeln in der communicirenden Röhre einerlei Abſtand habe.

Die Würfel ſelbſt, deren Kantenlänge etwa einen Zoll beträgt, hat man aus Elfenbein oder Ebenholz, und es iſt der Abſtand ihrer lothrechten Seitenflächen von den ſie umgebenden, mit Eiſenblättchen ausgefütterten Wänden des Canals weit geringer, als ſolches in der Figur dargeſtellt erſcheint — kaum ¼ Linie —, ſo daß dieſe Wände als Führungen für die Würfel dienen, worin ſie ſich mit einiger Reibung bewegen, ohne beträchtlichen Seitenſchwankungen ausgeſetzt zu ſein. Das Gewicht eines Schwimmers beträgt gegen 4 Loth, und deſſen Einſenkung im Queckſilber ca. 0,4 Linie, daher iſt die Vertiefung, welche der Schwimmer auf der Queckſilberoberfläche veranlaßt, ſehr gering. Sie ſoll gleichmäßig ſein, was offenbar nur dann ſtattfinden wird, wenn der Schwerpunkt des Schwimmers in ſeine durch den Mittelpunkt der Baſis gedachte verticale Axe hineinfällt, ein Umſtand, welcher bei der Anfertigung der Schwimmer nicht immer berückſichtigt worden iſt. Um letzterer Bedingung zu genügen, iſt es unerläßlich, den durch Bildung des Rahmens für den Objectivfaden k entſtandenen Maſſenwegfall auf der Seite der Ocularöffnung h entſprechend auszugleichen.

§. 190.

Gewöhnlich wird das Queckſilberniveau nicht durch ein beſonderes Stativ geſtützt, ſondern unmittelbar auf die vorher horizontal gerichtete Planchette eines Meßtiſches hingeſtellt, ſo daß für alle Lagen des Niveau's die Ocularöffnungen und Querfäden der Schwimmer ſtets im nämlichen ſcheinbaren Horizonte ſich befinden, was nicht der Fall ſein würde bei geneigter Lage der Planchette. Denn ſind ag, be Fig. 205 gleich weite verticale und durch das horizontale Rohr ab mit einander verbundene Schenkel einer Canalwage, ſo iſt in beiden Schenkeln eine gleich große Menge der Flüſſigkeit, ſei dieſe nun Waſſer oder Queckſilber, enthalten, d. h. $ac = bd$, daher liegen c und d im nämlichen ſcheinbaren Horizonte xy. Wird nun die Canalwage geneigt, vielleicht um b herum drehend abwärts bewegt und dadurch in die Lage $g'a'b'e'$ verſetzt, dann müßte, wenn die Oberflächen c und d beider Schenkel noch im Horizonte xy liegen ſollten, $bd' + a'c' = bd + ac$ ſein, weil der Inhalt der Flüſſigkeit im Rohre ab ſich nicht verändert hat. Offenbar iſt aber $bd' > bd$, $a'c' > ac$, folglich $bd' + a'c' > bd + ac$. Es müßte alſo in der geneigten Lage der Canalwage Flüſſigkeit hinzugefügt werden, damit die Oberflächen derſelben in den Schenkeln

im Horizonte xy gelegen wären. Da dies aber nicht geschieht, so befindet sich der Horizont der Flüssigkeitsoberflächen in beiden Schenkeln unter dem Horizonte xy. Hieraus geht hervor, daß der Canalwage eine horizontale Unterlage geboten, d. h. die Planchette des Meßtisches, auf welcher sie ruht, horizontal gestellt werden muß, wenn anders dieselbe in allen Richtungen einerlei scheinbaren Horizont anzeigen soll.

§. 191.

Gebrauch der Canalwage. Um zu zeigen, wie mittelst der Canalwage das Gefälle ae zwischen zwei Punkten a und b Fig. 207, 208, 209 auf dem Felde zu bestimmen sei, mögen diese Punkte in geringer, etwa 100 Ellen betragender Entfernung von einander gedacht werden, auch setzen wir voraus, daß man sich des auf die Planchette eines Meßtisches aufzustellenden Queckſilberniveau's bediene.

Der Meßtisch wird über einem jener zwei Punkte, etwa über a Fig. 206 aufgestellt, im anderen b ein Stab lothrecht aufgerichtet, und an diesem in d, d. h. wo ihn die horizontale Vistrebene der Dioptern beider Schwimmer trifft, ein Zeichen angebracht, hierauf die Höhe db desselben über den Fuß des Stabes, sowie endlich die Instrumenthöhe ca, nämlich die Höhe der Vistrebene über dem Punkte a, gemessen. Man nennt dieses Verfahren das Nivelliren aus einem Ende und hat nun, wenn die fragliche Höhe ae = h, die Zeichenhöhe bd = n und die Instrumentshöhe ac = m, sowie af parallel zu cd und eb gesetzt wird:

$$bf = ae = bd - fd = bd - ac, \text{ d. i.}$$

$$1) \quad h = n - m.$$

In diesem Falle wird sonach das Gefälle bestimmt, indem man von der Zeichenhöhe die Instrumenthöhe subtrahirt; dahingegen, wie leicht einzusehen, von letzterer erstere zu subtrahiren sein würde, sobald der Punkt b über dem Horizonte von a gelegen wäre.

Wird der Meßtisch auch über dem Punkte b Fig. 207 aufgestellt, in a ein Stab eingesetzt und an ihm die Höhe des Zeichens k über a gemessen, nicht minder die Instrumenthöhe gb, dann folgt, wenn $ak = n'$, $gb = m'$ gesetzt wird:

$$bf = ae = bg - gf = bg - ak, \text{ oder}$$

$$2) \quad h = m' - n',$$

und sobald hiermit 1 verbunden wird:

$$2h = n - m + m' - n', \text{ d. i.}$$

$$3)\quad h = \frac{n + m' - (n' + m)}{2}.$$

Dieses Verfahren ist unter dem Namen Nivelliren aus beiden Enden bekannt, und dient dem ersten als Controle. Die wörtliche Deutung für das Ergebniß 3 würde sein, daß man von der Summe der Instrument- und Zeichenhöhe der einen Station die Summe der Instrument- und Zeichenhöhe der andern abzuziehen, den Rest aber durch 2 zu theilen hat. Sind — wie bei der Wasserwage Fig. 203 sich dies ereignen kann — die Instrumenthöhen in beiden Stationen einander gleich, dann fallen aus 3 die Glieder m' und m hinweg, und man hat $h = \frac{n - n'}{2}$, d. h. die gesuchte Höhe ae ist in diesem Falle dem halben Unterschiede der Zeichenhöhe beider Stationen gleich, dabei positiv oder negativ, je nachdem a über oder unter dem Horizonte von b liegt.

Von der Instrumenthöhe unabhängig ist die fragliche Höhenbestimmung bei dem durch Fig. 208 dargestellten Nivelliren aus der Mitte. Hier wird der Meßtisch ungefähr in die Mitte zwischen den beiden Punkten a, b aufgestellt und zugesehen, an welchen Stellen k, d die horizontale Vistrebene der Dioptern der Canalwage Stäbe trifft, welche beziehungsweise in a und b vertical eingesetzt worden sind. Diese Stellen k und d werden durch Zeichen, z. B. Einschnitte in den Stab oder auf andere weiter unten zu besprechende Art bemerkbar gemacht, und die Entfernung eines jeden vom Fuß des Stabes gemessen. Sei $ak = n$, $bd = n'$ und $ae = h$, so ist:

$$ae = ek - ak = bd - ak, \text{ oder}$$

$$4)\quad h = n' - n,$$

d. h. dem Unterschiede beider Zeichenhöhen gleich, und zwar positiv oder negativ, je nachdem a über oder unter dem Horizonte von b liegt.

Diese Methode pflegt in der Regel angewendet zu werden, da bei ihr das Aufstellen des Instruments über den Endpunkten wegfällt — was sehr oft nicht einmal thunlich ist — nicht minder das leicht zu Fehlern Anlaß gebende Messen der Instrumenthöhe. Auch sieht man ein, daß das Instrument nicht in der Verticalebene der Endpunkte, sondern seitlich derselben beliebig seinen Platz finden kann.

§. 192.

Liegen die Punkte a und b Fig. 209 in größerer Entfernung von einander, oder gestattet das Terrain sonst nicht, durch eine

einzige Aufstellung des Instrumentes das Gefälle zwischen beiden zu bestimmen, sieht man sich vielmehr zu einer mehrmaligen Aufstellung desselben genöthigt, dann ist im Wesentlichen auf die im §. 188 gezeigte Art zu verfahren.

I bezeichne die erste Station, d. h. den ersten Standort des Meßtisches, von welchem aus an den in a und c errichteten Stäben die Zeichenhöhen ak und cl gemessen worden sein mögen, in Folge dessen das Gefälle zwischen a und c der Differenz ak — cl entspricht. Um diesen Betrag liegt mithin der Punkt c höher als a, da ak > cl vorausgesetzt werden mag. Während der Stab in c unverrückt an seinem Platze geblieben ist, sei das Instrument nach der Station II gebracht und nun ein fernerer Punkt auf dem Felde, nämlich d, gewählt worden, dergestalt, daß für ihn und den vorigen Punkt c die Zeichenhöhen dn, cm gelten, überdies dn > cm sein möge. Demgemäß liegt der Punkt d um die Größe dn — cm tiefer als c, folglich beträgt der Höhenunterschied der Punkte a und d: (ak — cl) — (dn — cm) = ak + cm — cl — dn, wobei das Vorzeichen der Summe dieser Zeichenhöhen darüber entscheidet, welcher von den Punkten a und d der höher oder tiefer liegende ist. d würde höher als a liegen, wäre obige Summe negativ, und umgekehrt. Das Instrument werde, indessen der Stab in d seine Lage nicht verändern darf, auf die Station III gebracht, alsdann neuerdings ein Punkt f gewählt, und für ihn sowie für d die Zeichenhöhe gemessen. Setzen wir fp > do, so liegt f um die Größe fp — do tiefer als d, mithin ist das Gefälle zwischen den Punkten a und f: (ak + cm — cl — dn) — (fp — do) = ak + cm + do — cl — dn — fp. Auf diese Weise fortfahrend, d. h. wenn das Instrument noch in den Stationen IV und V aufgestellt wird, findet man das gesuchte Gefälle zwischen den Endpunkten a und b der Profillinie ac . . . . gb, nämlich ae = h = ak + cm + do + fg + gs — cl — dn — fp — gr — bt, welches Ergebniß der Regel des §. 188 vollständig entspricht, die nun einer Umgestaltung fähig ist, insofern man die positiven Zeichenhöhen als hintere, die negativen als vordere ansieht.

Nivellements dieser Art können, zur Unterscheidung von den im vorigen §. erläuterten einfachen, zusammengesetzte genannt werden, und eignen sich nicht allein zur Angabe des Gefälles der Endpunkte a und b, sondern auch desjenigen aller zwischen beiden liegenden Punkte. Würden dabei endlich noch die Stäbe stets in derselben Richtung ausgesteckt und ihre horizontalen Abstände gemessen, dann sind hierdurch alle zur graphischen Darstellung eines Erdprofils

tauglichen Elemente geboten, d. h. einer Figur, welche in verjüngtem Maße den Durchschnitt einer Verticalebene mit der Erdoberfläche zeigt.

Beispiel. Es sei ak = 3,6, cl = 1,4, cm = 1,9, dn = 3,8, do = 2,4, fp = 3,5, fq = 4,2, gr = 3,1, gs = 1,9 und bt = 5,1 Ellen, dann ist:

$$h = 3{,}6 + 1{,}9 + 2{,}4 + 4{,}2 + 1{,}9 - 1{,}4 - 3{,}8 - 3{,}5 - 3{,}1 - 5{,}1$$
$$= 14 - 16{,}9 = -2{,}9 \text{ Ellen}$$

d. h. um diesen Betrag liegt a über dem Horizonte von b.

Sind die Zwischenpunkte c, d, f .... in der Verticalebene der Endpunkte a, b gewählt, und zugleich die horizontalen Entfernungen je zweier derselben gemessen worden, dann bedarf es zur graphischen Darstellung des Terrainprofiles nur noch der Angabe ihrer Höhenunterschiede in Bezug auf einen willkürlich gewählten Horizont. Dieser, Fundamental- oder Haupthorizont genannt, wird gewöhnlich durch den tiefsten Punkt gedacht und erscheint hier in der Geraden be. Werden auf ihn von jenen Punkten aus Perpendikel vorausgesetzt, cu, dv, fw ...., dann sieht man ein, daß es — da solche als bekannt anzusehen sind — blos darauf ankommt, auf dem Papiere eine Gerade zu ziehen, die Abstände dieser Perpendikel nach einem verjüngten Maßstabe aufzutragen und perpendiculäre Linien in diesen Abständen zu errichten. Giebt man sodann einem jeden Perpendikel die erforderliche Länge und vereinigt die Endpunkte a, c, d .... durch gerade Linien oder solche, welche von den gekrümmten ac, cd, df so wenig als möglich abweichen, so entsteht hierdurch ein Erdprofil, welches der Wahrheit desto mehr sich anschließen wird, je näher die Zwischenpunkte einander liegen. Ist die Entfernung der Endpunkte a und b beträchtlich, vielleicht eine oder mehrere Meilen, wie dies bei Straßenprojecten vorzukommen pflegt, dann giebt man, um zur Auftragung des Profils nicht allzuviel Raum zu benöthigen, die horizontalen und verticalen Dimensionen nach zwei verschiedenen Maßstäben an, letztere z. B. nach einem zwei- bis viermal kleineren als erstere.

Möge nun das zusammengesetzte Nivellement blos die Angabe des Höhenunterschiedes beider Endpunkte bezwecken oder auf die Erwerbung eines Terrainprofils Bezug haben, stets sind die während desselben anzusammelnden Stücke, nämlich horizontale und verticale Dimensionen, zur Vermeidung von Irrungen sorgfältig aufzuzeichnen, am passendsten in ein dazu besonders vorbereitetes Register. Minder nöthig erscheint diese Vorsicht bei einfachen, nur wenige Dimensionen ergebenden Nivellements.

Für das gewählte Beispiel eines zusammengesetzten Nivellements kann folgende — von dem Schema Stampfer's nicht wesentlich verschiedene — Tabelle dienen, wobei wir den Anfang des Nivellements in a, den Haupthorizont durch den tiefsten Punkt b voraussetzen und die durch eingeschlagene Pfähle oder sonstwie markirten Terrainpunkte a, c, d bezüglich mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 . . . . bezeichnen wollen.

Stand des Instruments	Rückwärts		Vorwärts		Gefälle		Distanz zwischen den benachbarten Terrainpunkten	Höhe des Terrainpunktes über dem Haupthorizonte	Anmerkung.
	Nach dem Terrainpunkte Nr.	Zeichenhöhe	Nach dem Terrainpunkte Nr.	Zeichenhöhe	Einzeln	Zusammen			
		Ellen		Ellen	Ellen	Ellen	Ellen	Ellen	
I	0	3,6	1	1,4	+ 2,2	+ 2,2	37	2,9	9 Ellen von 2 nach 3 wird das Erdprofil vom Abzugsgraben einer Quelle durchschnitten.
II	1	1,9	2	3,8	— 1,9	+ 0,3	37	5,1	
III	2	2,4	3	3,5	— 1,1	— 0,8	41	3,2	
IV	3	4,2	4	3,1	+ 1,1	+ 0,3	40	2,1	
V	4	1,9	5	5,1	— 3,2	— 2,9	46	3,2	

Bei wichtigem Anlaß, z. B. der Ermittelung des Gefälles eines Baches, Behufs der Beurtheilung der durch ihn gebotenen Wasserkraft, wird man das Nivellement mindestens zweimal ausführen, überhaupt so oft, bis die Ergebnisse möglichste Uebereinstimmung zeigen.

§. 193.

Anlangend das Messen der Zeichenhöhen, so würde diese Operation nicht nur umständlich und zeitraubend sein, wollte man solche unter directer Anlegung eines Maßes an den Stab bewerkstelligen, sondern auch leicht zu den gröbsten Fehlern Anlaß geben. Daher wird der Stab selbst mit einer, Zolle oder andere Längen enthaltenden Eintheilung, überdies mit einem längs desselben beweglichen Zeichen versehen und heißt nun Nivellirlatte. Dieselbe ist 6 bis 10 Ellen lang und von einer dieser Länge angemessenen Breite und Dicke. Fig. 210 a, b und c stellen eine Nivellirlatte von der gewöhnlichsten Einrichtung dar. d zeigt den in Zolle eingetheilten, zur Verhinderung des Werfens aus mehreren Stücken der Länge nach zusammengesetzten Stab von quadratischem Querschnitt. An seinem unteren Ende ist der Stab mit einem aus einer harten Stahlplatte versehenen Schuh versehen; am oberen mit einer messingenen Leitrolle, über welche eine

Schnur gelegt wird, um vermittelst derselben die, nach Art eines Schachbretes in schwarze und weiße Felder eingetheilte Zieltafel e an der Latte auf- und abwärts bewegen zu können. An der Zieltafel ist eine Hülse g aus starkem Messingblech angebracht, welche der Tafel bei jener Bewegung als Führung dient. Zur Seite derselben befindet sich eine Preßschraube n, durch deren bezügliches Anziehen bewirkt wird, daß die Zieltafel mit weniger oder mehr Kraftaufwand längs der Latte bewegt werden kann. An der hinteren Seite der Hülse ist eine vierseitige Unterbrechung bemerkbar, an deren einer Grenze eine Linienscala sich befindet, für welche der sie treffende Theilstrich eines Zolles der Nivellirlatte als Inder dient, deren Nullpunkt jedoch in den Horizont der Mittellinie fk der Zieltafel hineinfällt. Hierdurch ist man im Stande, an der von unten herauf fortschreitenden Eintheilung der Latte Zolle, Linien und mittelst des Augenmaßes selbst Bruchtheile der letzteren abzulesen. Der Anfangspunkt der Zollscala auf der Latte fällt nicht in die Unterfläche des Schuhes w, sondern darüber, was offenbar für das Nivelliren aus der Mitte und aus beiden Enden gleichgültig ist, während beim Nivelliren aus einem Ende zur gefundenen Zeichenhöhe jener Abstand hinzugerechnet werden muß. Die Nivellirlatte soll während der Beobachtung möglichst genau vertical aufgerichtet sein, was vom Gehülfen mittelst eines daran gehaltenen Senkels leicht zu erreichen ist, aber auch Seitens des Beobachters wesentlich gefördert werden kann, sobald sich im Diopter des Schwimmers Fig. 205 außer dem Horizontalfaden auch noch ein Verticalfaden befindet.

Die Praxis des Gehülfen besteht darin, bei lothrechtem Stande der Nivellirlatte die Zieltafel mittelst der Schnur t so lange auf- und abwärts zu bewegen, bis vom Beobachter das Zeichen zum Innehalten ertheilt wird, was nicht eher geschieht, als nachdem der Horizontalfaden des Diopters am Schwimmer die Mittellinie fk der Tafel gedeckt hat. In diesem Augenblicke zieht der Gehülfe die Schraube n noch mehr an, um sicher zu sein, daß während des Ablesens die Tafel ihren Stand an der Latte nicht ändert. Nimmt er wahr, daß die Tafel sehr hoch, d. h. für seine Hand nicht mehr erreichbar zu stehen kommen werde, dann muß die Schraube n schon vorher entsprechend angezogen sein, damit später beim Neigen der Latte Behufs des Ablesens der Zeichenhöhe die Zieltafel unverrückt ihre Lage beibehält.

Andere Vortheile sind durch den Gebrauch der Latte selbst zu erwerben, sicherer als durch deren wörtliche Darlegung.

Es giebt Zieltafeln von kreisrunder Gestalt; diese heißen dann Zielscheiben, und was die Abtheilung der Felder anlangt, so finden auch in dieser Hinsicht mancherlei mehr oder weniger erhebliche Abweichungen statt. Endlich besteht die Latte nicht stets — wie hier — aus einem einzelnen Stabe, sondern oft aus zwei in- oder nebeneinander zu verschiebenden Stäben.

§. 194.

Was für Nivellirinstrumente wir immer betrachten mögen, entweder gehören sie zur Classe derjenigen, bei welchen durch ein Senkel die verticale Richtung und folglich durch eine darauf Rechtwinklige die horizontale angezeigt wird, oder sie stellen letztere durch die Oberfläche einer Flüssigkeit unmittelbar dar. Zu ersteren gehören die Setzwage und der Gradbogen, zur Classe der letzteren alle mit Libellen versehenen Nivellirinstrumente, als da sind das Libellenniveau mit Dioptern und Fernrohr. Nur bei einigen der wichtigeren dieser Instrumente gedenken wir hier zu verweilen, und zwar zunächst beim Gradbogen und seinem Gebrauche.

Fig. 211 zeigt einen von Lingke in Freiberg gefertigten Gradbogen in $\frac{1}{4}$ der linearen Größe. Derselbe ist aus federhartem Messingbleche ausgearbeitet und wiegt ca. 3 Loth. Er wird mittelst zweier Haken c, d an einer straff ausgespannten Schnur ef aufgehängt und deren Neigung gegen den Horizont am Gradbogen unmittelbar durch das in dessen Mittelpunkte a befestigte, aus einem Menschenhaare nebst daran angebrachtem Gewichte b bestehende Senkel ab angezeigt. Die übrige Einrichtung ist aus der Zeichnung zur Genüge deutlich, und wir führen nur noch an, daß jeder Grad in fünf gleiche Theile eingetheilt erscheint, Zehntelgrade also mit ziemlicher Sicherheit abgelesen werden können, sowie daß der Gradbogen beim Nichtgebrauch in einem geeigneten Etui aufbewahrt wird.

Um ihn zu prüfen, bedarf es blos der Verwechselung der Aufhängepunkte desselben an der in beliebiger Richtung gegen den Horizont ausgespannten Schnur, da dann das Senkel stets die nämliche Anzahl Grade anzeigen muß. Der Collimationsfehler wird wie beim Gradbogen der Kippregel bestimmt.

Vom Gradbogen wird besonders zum Nivelliren in unterirdischen Räumen, z. B. Kellern, Bergwerken u. s. w., überhaupt alsdann Gebrauch gemacht, wenn andere Nivellirgeräthschaften nicht wohl angewendet werden können. Die Schnur, welche die Stärke eines gewöhnlichen Bindfadens hat, ist zu diesem Behufe besonders sorgfältig

gefertigt, d. h. gleichmäßig gedreht, 100 Ellen lang, selbst darüber, und wird auf einer Rolle aufgewickelt. An ihren Enden wird sie auf passende Art befestigt, etwa über die Schäfte von Stiften gewunden, welche mit Nagelbohrern Aehnlichkeit haben, Markscheideschrauben heißen und die man in besonders vorbereiteten Spreizen anbringt oder wie es sonst möglich ist. Auch bedient man sich bei anhaltenden und öfters wiederkehrenden Nivellements mittelst des Gradbogens transportabler Stützen, sogenannter Markscheideböcke, einer Art hölzerner Dreifüße, vorzüglich aber nur dann, wenn über Tags, d. h. auf der Erdoberfläche operirt werden soll.

§. 195.

Sei nun ab Fig. 212 die gehörig ausgespannte und an ihren Enden wohl befestigte Schnur, so wird der Gradbogen entweder annähernd in der Mitte der Schnur aufgehängt und der Winkel gcd abgelesen, oder man hängt ihn in der Nähe der Enden auf und nimmt aus beiden hier beobachteten Winkeln das arithmetische Mittel für den Neigungswinkel abc der Schnur gegen den Horizont bc. Ist sodann die Länge der Schnur ab bekannt, indem an dieselbe irgend ein Maß, gewöhnlich eine Meßkette, deren Glieder aus dünnem Messingdraht bestehen — die Lachterkette — angelegt worden ist, dann kann die Höhe ae des Punktes a über dem Horizont oder dessen Gefälle leicht berechnet werden, denn man hat: $ae = ab \cdot \sin gcd$.

Würde nicht durch einmaliges Ausspannen der Schnur der Höhenunterschied zweier Punkte, etwa a und b Fig. 213, zu bestimmen sein, wäre man vielmehr genöthigt, die Schnur mehrmals nach einander auf- und abwärts auszuspannen, dann sieht man sogleich ein, daß, wie beim zusammengesetzten Nivelliren mit der Setz- oder Canalwage, die Höhen steigender Schnüre als positive, jene der fallenden als negative Größen anzusehen sind, oder umgekehrt, und der gesuchte Höhenunterschied ae der algebraischen Summe dieser Größen gleichkommt.

Es ist
$$ae = gq + ci - gp - fm - ck$$
$$= ag \cdot \sin gaq + cd \cdot \sin cdi - gf \cdot \sin gfp - fd \cdot \sin fdm - cb \cdot \sin cbk.$$

Beispiel. Es sei $ag = 16{,}4$, $gf = 19{,}2$, $fd = 20{,}12$, $cd = cb = 23$ Ellen; ferner $\angle gaq = 22° 12'$, $gfp = 10° 48'$, $fdm = 21° 34'$, $cdi = 11° 32'$ und $\angle cbk = 16° 40'$, dann ist das Gefälle zwischen den Punkten a und b, nämlich:

ae = 16,4 . sin 22° 12′ + 23 . sin 11° 32′ — 19,2 . sin 10° 48′
— 20,12 . sin 21° 34′ — 23 . sin 16° 40′ = 6,1965 + 4,5985
— 3,5977 — 7,3957 — 6,5964 = 10,7950 — 17,5898 =
— 6,7948 Ellen.

Anmerkung. Zur Vermeidung von Irrungen werden die Messungs- und Beobachtungsergebnisse während der Operation in ein leicht anzuordnendes, die Rubriken, Länge der Schnur, steigt, fällt u. s. w. enthaltendes Register eingetragen. Dasselbe ist zu erweitern, falls man sich nicht blos mit der Angabe der Länge der Schnur und ihrer Neigung begnügt, sondern zugleich die Richtung der Verticalebene derselben gegen eine unveränderliche verticale Ebene, z. B. die Meridianebene ermittelt. Es geschieht dies durch das Aufhängen eines Compasses an der Schnur, und man nennt nach der bergmännischen Sprache den Winkel der Verticalebene der Schnur mit der Meridianebene das Streichen der Schnur, und bezeichnet solches als östlich oder westlich, je nachdem die Schnur an der östlichen oder westlichen Seite des Meridians gelegen ist. Es werden sonach horizontale und verticale Winkel zugleich gemessen, welche in Verbindung mit den Schnurlängen Elemente bieten, die eine weit umfassendere Anwendung gewähren, im Vergleich zur bloßen Angabe der Neigungen der Schnüre gegen den Horizont, und in der Markscheidekunst, d. h. demjenigen Theile der praktischen Geometrie, welcher die Aufnahme von bergmännischen Räumen zum Gegenstand hat, zur Erledigung selbst der verwickeltsten Aufgaben genügen.

§. 196.

Das Libellenniveau mit Dioptern. Kaum ein anderes Meßinstrument erscheint in so mannigfaltiger Gestalt, als dieses; inzwischen lassen sich zweierlei Arten desselben unterscheiden, da bei der einen auf der Platte eines gewöhnlichen mit Horizontalfäden versehenen Diopterlineals eine Libelle entweder damit fest verbunden ist, oder nur darauf gestellt, und dem Instrumente die Planchette eines Meßtisches als Unterlage geboten wird, bei der anderen hingegen das Lineal selbst unmittelbar mit einem besonderen Stative in Verbindung steht. Ein Libellenniveau der ersten Art stellt Fig. 214 dar. a ist die Unterplatte desselben, an deren Enden sich die mit Horizontal- und Verticalfaden, sowie mit Ocularöffnungen versehenen Dioptern c, d nach Art der Schwimmer beim Queckstlberniveau erheben. Beide Horizontalfäden und Ocularöffnungen sind von der Lagerfläche der Unterplatte a gleich weit entfernt und stellen folglich, wenn diese selbst horizontal ist, einen scheinbaren Horizont dar, welcher nach den oben mitgetheilten Nivellirmethoden zur Angabe des Höhenunterschiedes benutzt werden kann. Ja das bloße Diopterlineal, so wie es hier erscheint, eignet sich ohne weitere Zuthat für diesen Zweck, sobald nur

die Planchettenfläche eine horizontale Lage hat. Da dem jedoch nicht so ist, vielmehr selbst bei der größten Sorgfalt im Horizontalstellen die Planchettenoberfläche — aus früher erwähnten Ursachen — eine, wenn auch nur geringe Neigung behält, eine Neigung, welche für die graphische Darstellung horizontaler Winkel ganz unschädlich ist, Behufs der Darstellung verticaler Winkel aber, besonders bei weit entfernten Richtobjecten, also beim Nivelliren, sobald die Nivellirlatte in verhältnißmäßig großem Abstande vom Instrumente aufgestellt wird, schlechterdings nicht übersehen werden darf, indem hierdurch, wie leicht begreiflich, und besonders beim zusammengesetzten Nivelliren auf große Distanzen beträchtliche Fehler in der Gefällsangabe erwachsen können, so sichert man sich dagegen durch die Anbringung einer Röhrenlibelle e. Dieselbe ist an dem einen Ende h mit einem Zapfen versehen, dessen Axe bei horizontalem Stande des Instruments auch horizontal gelegen ist. Er bildet die Drehungsaxe für die Libelle und ruht in einem Lager, welches sich an dem oberen Ende eines aus der Linealplatte hervorragenden Trägers befindet. Am anderen Ende k wird die Libelle durch eine in die Linealplatte eindringende Schraube gestützt. Der Ansatz bei k hat für den Schraubenschaft eine entsprechend weite Oeffnung — nicht eine Schraubenmutter — und damit die Libelle sich nicht nach diesem Ende auf die Linealplatte herabneigt, so ist zwischen derselben und jenem Ansatze eine schraubenförmig gewundene Stahlfeder n eingesetzt. Je nachdem man also die Stellschraube kn auf die eine oder andere Seite dreht, wird die Röhrenlibelle gehoben oder gesenkt werden.

Alles kommt beim Gebrauch des Nivellirinstrumentes darauf an, daß die Luftblase der Libelle den horizontalen Stand wirklich anzeigt, sobald die Lagerfläche der Unterplatte horizontal gelegen ist oder, was auf eins hinauskommt, die Querfäden der Dioptern in einerlei Niveau enthalten sind. Bevor man daher mit demselben zu nivelliren beginnt, muß dieses Verhalten gehörig geprüft worden sein. Ueberhaupt wird zu untersuchen sein, ob die horizontale Visirebene zur Lagerfläche der Linealplatte a, sowie ob zu dieser Fläche die Drehungsaxe h der Libelle parallel ist, endlich ob diese Axe zum Hauptzapfen der Planchette eine rechtwinklige Lage hat.

Was die erste dieser Prüfungen anlangt, so läßt sich dieselbe ganz auf ähnliche Art ausführen, wie dies bei Prüfung der Kippregel gezeigt und durch die Figuren 191, 192 erläutert worden ist. Sei a'b' Fig. 191 das auf der Planchette ruhende, nach dem Zeichen A der in 60 bis 80 Ellen Entfernung vom Instrument aufgestellten Nivellir-

latte gerichtete Libellenniveau, AB die Zeichenhöhe, so werde längs des Linealrandes eine feine Linie gezogen, um hierauf bei unverrückter Lage der Planchette das Niveau an die entgegengesetzte Seite der gezogenen Geraden anlegen, also um 180° herumdrehen zu können. Nach Vollziehung dieser Operation wird entweder die Vistrebene des Niveau's wieder durch das Zeichen A hindurchgehen, oder eine andere Stelle, etwa B, der Latte treffen, je nachdem beide Querfäden gleiche oder ungleiche Entfernungen von der Unterfläche des Lineals haben. Letzterenfalls ist das Zeichen in die Mitte C zwischen A und B einzustellen, und nun das eine der Dioptern so lange zu verschieben, bis die Fäden beider in einerlei Ebene mit dem Zeichen C fallen, was freilich eine hierzu geeignete Einrichtung der Dioptern voraussetzt.

Oder man richte die Vistrebene ab Fig. 192 des Instrumentes auf zwei entfernte Stäbe, lasse an denselben die durch solche getroffenen Stellen m, n bemerken, kehre hierauf das Lineal um 180° herum, lasse auch nach der entgegengesetzten Seite des Instrumentes Merkmale — wie p ein solches ist — an ausgesteckten Stäben anbringen und sehe zuletzt zu, ob sämmtliche Zeichen in gerader Linie liegen. Wäre dies nicht der Fall, so müßte eine Verschiebung des einen Diopters statt finden, das Verfahren wiederholt und so lange fortgesetzt werden, bis jener Bedingung Genüge geschieht.

Hinsichtlich der zweiten, den Parallelismus der Libellenare mt zur Lagerfläche vw des Lineals und folglich auch zur Vistrebene pq betreffenden Prüfung ist zu bemerken, daß dieselbe am einfachsten dadurch erfolgt, indem man das Niveau auf die Planchette des Meßtisches bringt und diese so lange stellt, bis die Luftblase in der Mitte der Libelle sich befindet, hierauf das Niveau bei ungestörter Lage der Planchette um 180° herumdreht und beobachtet, ob die Luftblase genau wieder dieselbe Stelle wie vorhin einnimmt, in welchem Falle die Libelle auch der zweiten Forderung entsprechen würde. Sollte die Luftblase hingegen nicht in der Mitte erscheinen, dann nöthigt man dieselbe durch die Stellschraube k, um die Hälfte der Abweichung sich fortzubewegen, worauf die andere Hälfte mittelst der Horizontalstellung des Meßtisches nachgebracht wird. Nun dreht man nochmals das Niveau um 180°, bringt es also in seine erste Lage, und sieht zu, ob die Luftblase der Libelle in der Mitte der Röhre steht; wäre dies nicht der Fall, so müßte dieses Verfahren wiederholt werden.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, und wir dürfen hierzu vorerst nur an die Bedeutung der Libellenare erinnern,

worunter man diejenige Gerade mt verstand, um welche herum, als um eine feste Drehungsaxe, der Kreisbogen bewegt wurde, nach welchem das Innere des Glasrohres der Libelle abgerundet war. Sei nun kh Fig. 215 die horizontale Libellenaxe, km ihre Verlängerung. hs und kn mögen die ungleich langen, aus der Unterfläche ns hervorragenden und zu einander parallelen Stützen der Libellenaxe bedeuten, Axe wie Stützen in einerlei Verticalebene liegend vorausgesetzt. Wird ns bis zum Durchschnitt m mit der erweiterten hk verlängert, so schließt die Libellenaxe hk mit der die Fußpunkte ihrer Stützen vereinigenden und zur Unterfläche des Lineales parallelen Geraden sn den Winkel hms ein, was offenbar auch noch der Fall sein wird, wenn man die Libellenaxe um 180° herumführt, dergestalt, daß solche in die Lage h'k' gelangt, worin sie die vorige im Punkte o schneidet. Es ist sonach $\angle$ h'm'm = $\angle$ hmm', und $\angle$ h'ok = $\angle$ hok' = $\angle$ h'm'm + $\angle$ hmm' = 2 $\angle$ hmm', mithin $\angle$ hmm' = $\frac{1}{2}$ $\angle$ h'ok. Die Correction der Libellenaxe wird folglich dadurch geschehen müssen, daß man erstens dieselbe mittelst der Stellschraube bei k nöthigt, um den halben Winkel h'ok nach n zu abwärts sich zu neigen, hierauf solche zweitens unter Benutzung der Horizontalstellung des Meßtisches um die andere Hälfte des Winkels h'ok herabführt, wodurch h'k' in die Lage kh gelangt, und folglich obige Justirung der Libelle gerechtfertigt erscheint.

Von selbst versteht es sich hierbei, daß man nicht versäumen werde, die Libelle hierauf in ihre erste Lage zu bringen, um zu sehen, ob für diesen Stand die Luftblase einspielt, widrigenfalls aber dasselbe Verfahren wiederholen.

Besteht endlich die Libelle diese Probe vollkommen, so ist sie bei horizontaler Unterlage geeignet, einen horizontalen Visirstrahl zu gewähren, wenn schon aus dem beschriebenen Verfahren nur erst hervorgeht, daß die Axe der Libelle zur Horizontalebene der Linie ns parallel sei, durchaus noch nicht, ob sie auch parallel zu jener Geraden ist, welche die Fußpunkte der beiden Stützen der Libelle verbindet. Weil diese aber als eine Parallele zu den Linealkanten angesehen werden muß, so bedarf es jetzt nur einer Neigung des Lineales um eine dieser Kanten, da dann die Luftblase ihre Stelle zwischen den Stegen r und u Fig. 214 a nicht ändern darf. Bei manchen Libellen ist durch seitlich des Libellengehäuses angebrachte Stellschrauben Gelegenheit geboten, auch diese Correction zu bewerkstelligen.

§. 197.

Ob endlich drittens die dem Libellenniveau als Basis dienende Planchettenebene rechtwinklig zu ihrer Umdrehungsaxe sei, davon kann man sich bald und auf mehrfache Weise überzeugen; minder leicht geschieht jedoch Abhülfe, sobald die Planchette nicht mit den hierzu erforderlichen Correctionsschrauben versehen ist. Gewöhnlich finden sich derartige Schrauben am Meßtische nicht vor; inzwischen können die bloßen Befestigungsschrauben der Planchette an das Stativ, deren wir hier drei um 120° von einander abstehende voraussetzen wollen, mit Vortheil zur fraglichen Justirung gebraucht werden. Hat man die Libelle, welche die im vorigen §. abgehandelten ersten beiden Prüfungen bestand, auf der Planchettenoberfläche unter Benutzung der Horizontalstellung des Meßtisches zum Einspielen gebracht, so führe man die Planchette, bei unveränderter Lage des Libellenniveau's, um 180° herum, und nehme wahr, ob auch jetzt noch die Luftblase der Libelle in der Mitte zwischen den Stegen r und u sich befindet; wo nicht, so ist die Justirung der Drehungsaxe der Planchette auf folgende Art zu bewerkstelligen.

a, b, c Fig. 216 stellen die um 120° von einander abstehenden Schraubenmuttern für die Befestigungsschrauben der Planchette dar; m bedeutet den Mittelpunkt des um a, b, c — diese als bloße Punkte gedacht — beschriebenen Kreises und zugleich den Durchschnitt der Planchette mit deren Ebene. ed, fh, gk sind gerade Linien in derselben durch m und je einen der obigen drei Punkte. Die Füße des Meßtisches mögen in eine solche Lage gebracht sein, daß die durch ihre Spitzen A, B, C und jene Drehungsaxe gedachten Ebenen bezüglich die Punkte a, b und c in sich enthalten. Setzen wir nun, die Schraube bei a sei nicht bis zur tiefsten Stelle ihrer Schraubenmutter vorgedrungen, jedoch so weit, daß dadurch die feste Verbindung der Planchette mit dem Stativ nicht beeinträchtigt ist, dann übersieht man leicht, wie durch Bewegung dieser Schraube ein Drehen, d. h. Auf- oder Abwärtsneigen der Planchette um die durch b und c gedachte Gerade als um eine feste Drehungsaxe statt findet. Nun werde die Linealkante, oder besser die Mittellinie der Linealplatte, an die, entweder auf der Planchette völlig ausgezogene oder nur durch ihre Enden angemerkte Gerade de angelegt, alsdann sei, durch Hebung oder tieferes Eindrücken des Fußes mA, vermittelst vorhandener Stellschrauben oder der Schraube bei a selbst, die Planchette bis zum völligen Einspielen der Libelle gebracht, und der Verticalfaden des Objectivdiopters

auf ein entferntes Object eingerichtet. Führt man jetzt die Planchette um ihren Centralzapfen drehend herum, bei unverrückter Lage des Libellenniveau's, bis jenes Object im Verticalfaden desjenigen Diopters erscheint, welches vorher Ocular diopter war, mit anderen Worten, dreht man das Instrument um 180° herum, und spielt jetzt die Luftblase der Libelle wiederum ein, so würde hieraus folgen, daß die Axe des Centralzapfens rechtwinklig zur Geraden de sei. Entgegengesetzten Falls würde man die Luftblase um die Hälfte ihrer Abweichung durch die Schraube bei a, um die andere durch Bewegung des Fußes mA berichtigen; wobei darauf zu sehen wäre, daß die Mittellinie dieses Fußes diejenige Ebene nicht verläßt, worin sie sich vorher befand. Wird hierauf die Planchette neuerdings um 180° herumgeführt und spielt nun die Luftblase der Libelle genau ein, dann ist man hinsichtlich der rechtwinkligen Lage der Geraden de gegen die Axe des Centralzapfens versichert, außerdem aber zur Wiederholung dieses Verfahrens genöthigt.

Ob aber alle auf der Planchette gedachten Geraden z. B. die durch b und c gehenden hf, kg derselben Bedingung genügen, also die Planchettenebene zu ihrer Umdrehungsaxe rechtwinklig sei, dies folgt aus jenem ersten Versuche keineswegs, vielmehr erst alsdann, sobald nach den Richtungen hf und kg dasselbe Verfahren wiederholt worden ist, wobei bezüglich die Schrauben bei b und c die Stelle von a einnehmen.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Prüfungsmethode ist wie jener für die Justirung der Libellenaxe zu führen. Auch läßt sich das durch Fig. 192 vergegenwärtigte Prüfungsverfahren mittelst Aussteckung einiger Stäbe und daran bemerkten Zeichen zu vorliegender Prüfung anwenden.

§. 198.

Ein mit dem Stative in unmittelbarer Verbindung stehendes Libellenniveau mit Dioptern — nach Stampfer's Angabe — zeigt Fig. 217. Das eigentliche Diopterlineal nebst der darauf angebrachten Libelle ist vom vorigen auf die Planchette zu stellenden Niveau nicht verschieden. Der Unterschied wird erst in der Art der Horizontalstellung desselben bemerkbar, indem zu diesem Behufe an der Unterfläche der Linealplatte ein aus der Figur deutlich zu ersehender Horizontalzapfen a angebracht ist, vermittelst dessen das Lineal mit dem verticalen Centralzapfen ab des Instrumentes in Verbindung stehe. An diesem Zapfen, und mit ihm zugleich drehend beweglich, ist ein

Querstück cd angebracht, welches an dem einen Ende von einer Stellschraube eg durchdrungen wird, durch deren Bewegung die Drehung des Lineals um die horizontale Are bei a erfolgt. Damit das Lineal nicht von selbst auf die entgegengesetzte Seite herabsinken könne, so ist dort eine Stahlfeder h an das Lineal angeschraubt.

Justirung und Gebrauch dieses Niveau's sind nach dem Vorigen für sich einleuchtend.

§. 199.

Ein anderes in neuerer Zeit, besonders zu ökonomischen Nivellements, namentlich bei Anlage von Kunstwiesen gebräuchliches Nivellirinstrument ist das Spiegelniveau von Romershausen, dargestellt in Fig. 218. Die Totalform desselben stimmt mit der eines Fernrohres überein, insofern an ihm nicht nur eine Ocularöffnung a, sondern auch ein Linsenglas b zu bemerken ist. Im Innern des Rohres ist unter 45° Neigung zur Röhrenare ab ein metallener Planspiegel c angebracht, dessen geradlinige Grenze in die Verticalebene von ab hineinfällt, dergestalt, daß neben diesem Spiegel vorbei gesehen werden kann. Vor dem Mittelpunkte b der Linse, welche ein bloßes Planglas ist, befindet sich ein feiner Querfaden, welcher bei horizontaler Lage von ab mit dieser Geraden in der nämlichen Horizontalebene liegt. Ueber dem Planspiegel ist eine Röhrenlibelle d angebracht und dessen Gehäuse in seiner Mitte ober- und unterhalb durchbrochen. In der Mitte des Glasrohres der Libelle, sowie von ihr zu beiden Seiten gleich weit entfernt, befinden sich zarte Einschnitte e, h, k, zwischen welchen die Luftblase bei horizontalem Stande des Niveau's hineintritt. Oberhalb der Libellenmitte ist das völlig cylindrische Blechrohr m durchbrochen, so daß Lichtstrahlen durch diese Oeffnung in das Innere des Rohres eindringen können. Das Eigenthümliche dieses Niveau's besteht nun darin, daß bei vorausgesetztem Parallelismus der Libellen- und Rohrare und horizontaler Lage beider das Bild des mittleren Theilstriches e, nämlich e' in der Are ba reflectirt wird, das Auge des Beobachters also dieses Bild, den Horizontalfaden bei b und nach Befinden die horizontale Grenze der Felder auf dem Zielbrete gleichzeitig wahrnimmt. Zugleich spiegeln sich die äußeren Theilstriche k, h mit im Planspiegel c und es werden ihre Bilder gleichfalls dem Auge zugeführt. Mit den Bildern der drei Theilstriche erscheint gleichzeitig das Bild der Luftblase, und nun leuchtet ein, daß, wenn dieses von den Bildern k', h' gleich weit entfernt erscheint, die Vistrlinie ab horizontal sein muß.

Um die Mitte des Rohres wird ein Spannring gelegt, mittelst dessen das Niveau mit einem, gewöhnlich in einem einzelnen Stabe bestehenden Stative in Verbindung gebracht werden kann.

§. 200.

Das Libellenniveau mit einem Fernrohre. Bei diesem Nivellirinstrumente ist es die optische Axe des Fernrohres, wodurch der scheinbare Horizont dargestellt wird. Einerseits dient zu dessen Bezeichnung die Ocularöffnung, andererseits das im Brennpunkte der Ocularlinse angebrachte Fadenkreuz des Fernrohres. Die Libelle, mittelst welcher das Einstellen der Fernrohrare erfolgt, ist entweder lose oder auf Dauer mit dem Fernrohre verbunden. Außerdem lassen sich zwei Classen dieser Nivellirinstrumente unterscheiden, insofern bei der einen die Drehung des Fernrohres um eine, an dieses selbst unmittelbar angebrachte Horizontalaxe geschieht, bei der anderen hingegen diese Drehungsaxe an dem Träger des Fernrohres sich befindet, das Fernrohr selbst aber von diesem Träger hinweggenommen, d. h. eine Verwechselung seiner Lage geschehen kann. Unmöglich können hier alle die verschiedenen Fernrohrinstrumente beschrieben werden, vielmehr wollen wir nur eins der zweiten Classe betrachten, und zwar ein solches, dessen Werth in neuester Zeit stets mehr und mehr, wegen seiner merkwürdigen Vorzüge beim Nivelliren, namentlich auf verhältnißmäßig große Distanzen, Anerkennung gefunden hat; ich meine das Nivellirinstrument Stampfer's. Es wird ein solches, aus der mechanischen Werkstatt von Lingke in Freiberg hervorgegangenes als Beispiel dienen, und wir bemerken vorläufig, daß die Erwerbung der Kenntniß anderer Nivellirinstrumente ungemein gefördert wird, sobald nur ein einziges zu völliger Klarheit gebracht wurde, indem gewisse Bestandtheile derselben sich an allen übrigen unter mehr oder weniger verschiedener Gestalt zu wiederholen pflegen.

§. 201.

Fig. 219 stellt dieses Instrument in ein Drittel linearer Verjüngung dar; Fig. 220 bis 222 dienen zur Versinnlichung einiger Details. Das Fernrohr a, dessen Linsenstellung im Ocularrohre durch punktirte Linien vergegenwärtigt erscheint, ist ein terrestrisches von ca. dreifacher Vergrößerung und ruht mittelst besonderer Ringe b b in zwei gabelförmigen Trägern c c, woselbst es durch Haken d d festgehalten wird. Das Fadenkreuz ist, wie beim Fernrohre der Kippregel, in einem mit Stellschrauben e e versehenen Ringe eingeschlossen

und unter 45° zum Horizont geneigt, welcher Neigung die Grenzen der Felder auf der Zielscheibe entsprechen. Unterhalb des Fernrohres ist ein Zapfen g angebracht, dazu dienend, dem Fernrohre oben jene Lage zu ertheilen, für welche die bezeichnete Neigung der Fäden des Fadenkreuzes gilt, die in dem Augenblicke eintritt, sobald g beim Drehen des Fernrohres um seine Axe auf das in der Schraube f oder f' dargebotene Hinderniß trifft. Mittelst der gabelförmigen Stützen c c steht das Fernrohr mit dem Untergestelle in Verbindung, welches in seiner Totalform einem Dreifuße gleichkommt, woraus sich eine Säule h erhebt, die zunächst ein mit ihr fest verbundenes Querstück i zu tragen bestimmt ist.

Das Instrument ruht mittelst an den Enden der Arme k k k angebrachter, zugleich die Horizontalstellung desselben bezweckender Schrauben l l l entweder unmittelbar auf der Oberfläche eines Stativs m oder zunächst auf kreisrunden Platten n n n, welche an ihren Unterflächen mit je drei feinen Stahlspitzen versehen sind. Den Stellschrauben l l l läßt sich unter Benutzung der horizontalen Schrauben o o o, je nach Erforderniß, ein leichterer oder schwererer Gang ertheilen. Die Schraube p vertritt die grobe Stellung des Instruments, insofern durch deren Gebrauch die Umdrehung der Säule h in dem Hohlcylinder q verhindert werden kann. Letzterer ist mit dem Dreifuße k k . . nicht aus einem Stücke, sondern in diesem selbst beweglich, geht in einen Hebelarm r aus, und dieser ist mit einer Stahlfeder s versehen, welche auf einen Stift t drückt und in Folge dessen den Arm r an diesen Stift heranziehen würde, hinderte nicht hieran eine Horizontalschraube u, die feine Stellung. Von ihr wird zur genauen Einstellung des Fadenkreuzes auf das Centrum der Zielscheibe Gebrauch gemacht.

Zwischen den Gabeln c c ist auf eine aus der Figur deutlich ersichtliche Art die Libelle v angebracht. Zu beiden Seiten des Steges w sind auf dem Glasrohre der Libelle Theilstriche aufgezeichnet, und es machen diese ein völlig genaues Einspielen der Luftblase möglich. Die Libellenaxe ist zur Fernrohraxe parallel, daher, käme weiter nichts zum Instrument hinzu, selbiges schon jetzt zur Darstellung eines scheinbaren Horizontes, folglich zum Nivelliren geeignet und von den gewöhnlichen Instrumenten keineswegs wesentlich verschieden sein würde.

Die Gabeln c c sind jedoch mit dem Querstücke i nicht aus dem Ganzen, sondern in folgender Weise an demselben beweglich angebracht. Eine derselben — in der Figur die linke — steht mittelst zweier Schrauben x x dergestalt mit i in Verbindung, daß um die

Axen derselben, als um eine gemeinschaftliche Drehungsaxe, eine Bewegung der Gabel c, also auch des Fernrohres erfolgen kann. Ermöglicht wird diese Bewegung durch eine, mit der Gabel c zur Rechten verbundene Mikrometerschraube, welche ihre Mutter im Kopfe Q selbst hat, nach Art eines Schraubenbolzens, so daß durch Umdrehung des Kopfes Q die Fernrohraxe in einer Verticalebene gehoben oder gesenkt werden kann. Um zu bestimmen, wie viel diese Bewegung beträgt, also den Winkel anzugeben, um welchen die Fernrohraxe aus einer vorigen Lage sich entfernt hat, ist an dem Prisma ein Inder y angemerkt, welcher neben einem mit der Gabel c fest verbundenen Gradbogen z vorbeigleitet, dessen Nullpunkt mit der Drehungsaxe durch x in einerlei Horizontalebene liegt. Der Gradbogen umfaßt nur 5°, nämlich 2° über und 3° unter dem Nullpunkte, aus dem Grunde, weil man öfter Elevations- als Depressionswinkel zu messen hat.

Die Spindel der Mikrometerschraube wurde so gewählt, daß die Höhe eines Ganges derselben der Tangente des dritten Theils eines Grades oder 20 Minuten der Scala für den Halbmesser xz gleich kommt; was jedoch keinesweges Bedingung ist, indem jede sorgfältig construirte Schraube, d. h. von völlig gleicher Gangweite, hierzu verwendet werden kann, da dann der Winkelwerth eines Schraubenganges ein anderer sein wird. Auch bedarf es nicht einer nach dem Halbmesser xy gekrümmten Scala, sondern diese kann auf einer abgeebneten Fläche aufgetragen sein, indem für so kleine Winkelbewegungen, wie solche der Höhe eines Schraubenganges entsprechen, in Absicht auf die Zwecke dieses Instrumentes, Tangenten- und Bogenlänge unbedenklich für einander gesetzt werden können. Auf der Außenfläche eines, mit dem Schraubenkopfe Q fest verbundenen Cylinders M ist eine Kreiseintheilung, 100 gleiche Theile in Gruppen von 10 zu 10 darstellend, aufgetragen, mittelst welcher unter Benutzung des Inder P Hundertel des Winkelwerthes eines Schraubenganges genau bestimmt, Tausendtel aber leicht geschätzt werden können. Der Inder P ist an ein sechsseitiges Prisma N befestigt und dieses wiederum an dem Querstücke i.

Zur Vermeidung des todten Ganges der Mikrometerschraube, hauptsächlich aber, um die Fernrohraxe zum Steigen zu nöthigen, ist dieselbe von einer schraubenförmig gewundenen Feder umschlossen, in der Art, wie solches durch Fig. 222 dargestellt erscheint, welche Figur aber auch sonst noch über diesen wichtigen Theil des Instrumentes Auskunft gewährt. Unter Anderm läßt dieselbe erkennen, daß die Mikrometerschraube im Gabelstücke c angebracht ist und gewissermaßen

von diesem lothrecht abwärts hängt. Die Mikrometerschraube ist an ihrem oberen Ende abgerundet, mit welchem abgerundeten Ende sie sich in einer Aushöhlung bewegen läßt, nach Art eines Kugelgelenkes. Zunächst umgiebt die Mikrometerschraube ein lothrechter Cylinder α, welcher mittelst zweier zugespitzten Schrauben β, β fest und um die Mikrometerschraube herum schwebend erhalten wird. Auch dieser Cylinder läßt sich sonach drehend bewegen, und zwar um die Spitzen der Stellschrauben β, β herum. Der Cylinder α reicht nicht bis auf den Grund des Schraubengehäuses, sondern erst ein zweiter, von dem ersten zum Theil eingeschlossener. Jener dient als Schutz für die Mikrometerschraube, dieser verhindert das allzuweite Hervortreten derselben aus ihrem Gehäuse. In Fig. 222 erscheint dieselbe ungefähr in der Mitte der Mutter, welches dem Augenblicke entspricht, wofür der Inder y dem Nullpunkte des Gradbogens gegenüber sich befindet. Dreht man die Schraubenmutter mittelst ihres Kopfes Q zur rechten Seite hin, so dringt die Spindel in die Mutter tiefer ein, in Folge dessen das Fernrohr sinkt; geschieht die Drehung links, dann muß nothwendig ein Steigen des Fernrohres eintreten, bis zur äußersten Grenze, für welche die Schraubenmutter Q die Spindel verläßt.

§. 202.

Vermöge dieser Einrichtung ist das Instrument nicht nur als gemeines Libellenniveau zu gebrauchen, sondern es läßt auch, wie wir sogleich erkennen werden, die Bestimmung des Höhenunterschiedes gegebener Punkte, selbst bei geneigter Lage der Fernrohrare, zu, ja sogar Distanzen können mittelst dieses Instrumentes, innerhalb gewisser jedoch für die meisten praktischen Fälle ausreichender Grenzen, mit Genauigkeit gemessen werden. Der Raum dieses Buches gestattet nur eine gedrängte Darlegung der betreffenden Operationen. Gründliche Belehrung findet der Leser in dem bereits oben angeführten Werke Stampfer's über das Nivelliren.

Bevor wir jedoch diese erwähnen, erscheint es unerläßlich, die Berichtigung des Fadenkreuzes, sowie der optischen Are des Fernrohres, d. h. deren Parallelismus zur Libellenare, alsdann aber auch die Art und Weise der Horizontalstellung der Fernrohrare anzugeben. Anlangend die Prüfung des Fadenkreuzes, welches, wie bereits früher bemerkt, aus Spinnfäden gebildet und in einem besonderen Ringe, dem Diaphragma, eingeschlossen ist, so kommt es hierbei darauf an, zu untersuchen, ob der Durchschnittspunkt beider Fäden in der Fernrohrare enthalten sei. Zu diesem Behufe bedarf es nur einer

Drehung des Fernrohres um seine Axe in den Lagern c, c. Bleibt dieser Durchschnitt während der Drehung unverändert mit einem Punkte eines in angemessener Entfernung gewählten Objectes stehen, so ist derselbe in der Fernrohrare enthalten, widrigenfalls die Stellschrauben e, e zu gebrauchen sind, bis zur Verwirklichung dieser Bedingung; wobei jedoch zur Verhütung einseitiger Biegung des Diaphragma's vorsichtig zu Werke gegangen werden muß. Der Parallelismus der Fernrohr- und Libellenare wird bewerkstelligt, wie solches beim Libellenniveau mit Dioptern gezeigt wurde, und es dient hierzu die Correctionsschraube λ, in Verbindung mit den Theilstrichen auf der Libellenröhre. Die Prüfung jedoch dieses Parallelismus erfolgt nach Stampfer dadurch, daß man das Instrument über irgend einen, durch einen Pflock bezeichneten Punkt A Fig. 223 gehörig aufstellt, die Libelle genau zum Einspielen bringt und zusteht, in welcher Höhe BK = l die über B aufgestellte Nivellirlatte getroffen wird, wobei B von A 100 bis 200 Ellen entfernt zu wählen, daselbst aber, wie bei A, ein Pflock einzuschlagen ist. Zugleich messe man die Instrumenthöhe AC = I, d. h. den Abstand der Fernrohrare von dem wagerecht abgeschnittenen Kopfe des Pflockes A, wofür, da CK von der Horizontalen CN nur äußerst wenig abweichen wird, unbedenklich die Perpendikellänge von der Ocularöffnung auf den Kopf des Pflockes genommen werden kann. Sei nun die Länge, um welche der Visirstrahl CK über dem scheinbaren Horizonte CN die Latte trifft, nämlich NK = x, ferner der Unterschied dieses Horizontes vom wahren = f, dann ist das Gefälle zwischen A und B = l − x − I − f. Hierauf werde das Instrument über B auf dieselbe Art wie über A aufgestellt, die Nivellirlatte jedoch auf den Kopf des Pflockes bei A hingestellt, und an ihr, nachdem wiederum die Libelle gehörig eingespielt hat, die Zeichenhöhe = l′ abgelesen, desgleichen die Instrumenthöhe = I′ gemessen. Da x und f unverändert bleiben, so folgt, als zweiter Ausdruck für das Gefälle zwischen A und B, l′ − x − I′ − f, daher, weil die Summe beider Gefälle = 0 sein muß:

$$l - x - I - f + l' - x - I' - f = 0, \text{ und}$$

$$1)\quad x = \frac{l + l'}{2} - \frac{I + I'}{2} - f,$$

oder mit Vernachlässigung von f

$$2)\quad x = \frac{l + l'}{2} - \frac{I + I'}{2}.$$

Fände man durch Eintragung der Zahlenwerthe für die Zeichen- und Instrumenthöhen x = 0, so würde daraus die Richtigkeit des

Parallelismus der Fernrohr- und Libellenare folgen, während außerdem der Werth für x positiv oder negativ ausfallen könnte, je nachdem die Fernrohrare über oder unter dem scheinbaren Horizonte CN gelegen wäre. Im ersten Falle wird die Scheibe an der Latte um den Betrag x abwärts, im zweiten aufwärts von K zu verschieben, und nun die Fernrohrare mittelst der Mikrometerschraube Q auf das Scheibencentrum einzustellen sein, worauf genannte Axe den scheinbaren Horizont CN vergegenwärtigt. Weil durch diese Operation die Libellenare eine Neigung erhält, so hat man endlich unter Benutzung der Correctionsschraube λ die Libelle genau zum Einspielen zu bringen, worauf der geforderte Parallelismus sich ergiebt, der durch Wiederholung des nämlichen Verfahrens zu bestätigen ist.

§. 203.

Hinsichtlich der Horizontalstellung des Instruments, d. h. der Fernrohrare ist zu bemerken, daß solche mittelst der Stellschrauben l, l, l unter gleichzeitiger Benutzung der Mikrometerschraube Q geschieht. Zu diesem Ende wird die grobe Stellung p geöffnet und nun nach dem Augenmaße die Fernrohrare in die Ebene der Mittellinie eines der Füße k, k, k gebracht, darauf p wiederum etwas angezogen, damit das Fernrohr nicht durch zufälliges Berühren mit der Hand sich seitlich bewegen könne. Jetzt ist nachzusehen, wie weit die Mitte der Luftblase von der durch den Steg w bezeichneten Mitte der Libellenröhre entfernt sei, d. h. um wie viel Libellentheile dieselbe abweicht, sodann aber die eine Hälfte dieser Abweichung durch die Mikrometer-, die andere durch die Stellschraube l zu berichtigen. Nun wird nach Oeffnung der groben Stellung das Fernrohr um 180° herum bewegt und zugesehen, ob die Luftblase in dieser neuen Lage wiederum einspielt, wo nicht, dasselbe Verfahren wiederholt. Man bringt hierauf das Fernrohr in die Richtung der Mittellinie eines zweiten Fußes k, verfährt hier ebenso, wie vorhin, darnach über den dritten Fuß, und setzt diese Operation bis zur völligen Zufriedenstellung fort, d. h. bis während der Umdrehung des Fernrohres um die verticale Axe h die Luftblase der Libelle unverändert ihren Stand beibehält.

In gewissen Fällen reicht die Einstellung des Fernrohres über einen Fuß schon hin, nämlich dann, wenn in der Richtung desselben die Nivellirlatte sich befindet.

§. 204.

Um vermittelst dieses Instrumentes das Gefälle zwischen den Punkten A und B Fig. 224 und 225 zu finden, werde dasselbe über A horizontal aufgestellt und an der Scala z Fig. 221 der Stand des Index abgelesen, nämlich untersucht, um wie viel Schraubenwindungen derselbe vom Anfangspunkte der Scala absteht, natürlich mit Berücksichtigung der Bruchtheile der Höhe eines Schraubenganges. Das Ergebniß dieser Ablesung sei $= h$. Hierauf wird die Nivellirlatte über den Punkt B eingelothet, die Fernrohrare nach zwei möglichst weit von einander entfernten Punkten c, d der Latte eingestellt und für eine jede Stellung die entsprechende Anzahl der Gänge der Mikrometerschraube wahrgenommen. In Bezug auf den oberen Zeichenstand c sei dieselbe o, hinsichtlich d, d. i. des unteren, $= u$, der Abstand beider Zeichen $cd = w$. Ist überdies H der Abstand des unteren Zeichens d vom scheinbaren Horizonte ab, dann folgt, weil die Winkelbewegungen des Fernrohres sehr klein, also den entsprechenden Gangzahlen der Mikrometerschraube, und diese den gegenüberliegenden Dreiecksseiten cd, bd proportionirt gesetzt werden können:

$$cd : bd = w : H = o - u : h - u$$

$$1) \quad H = w\left(\frac{h-u}{o-u}\right).$$

Setzt man $w = 1$, z. B. einer Klafter, einem Meter oder einer anderen Längeneinheit gleich, so ist bezüglich für dieselbe

$$2) \quad H = \frac{h-u}{o-u}$$

und es ist leicht einzusehen, daß, wenn $h - u$ positiv ausfällt, der Punkt d, wie in Fig. 224, unterhalb, im Gegentheil oberhalb des Horizontes ab liegen muß, falls $h - u$ negativ wird, wie bei Fig. 225.

Zur Bestimmung des Gefälles zwischen A und B ist vorerst zu H die untere Zeichenhöhe Bd zu addiren, darauf von dieser Summe die Instrumenthöhe Aa zu subtrahiren; im zweiten Falle hingegen hat man Bd von H zu subtrahiren, sodann aber die Instrumenthöhe zum Rest zu addiren.

Beispiel. Mit Bezug auf Fig. 224, für welche das obere Zeichen c′ an der Visirlatte über dem Horizont ab liegt, sei $h = 9{,}382$, $o = 4{,}984$, $u = 11{,}583$, $w = 5$, $Bd = 0{,}23$, und die Instrumenthöhe $Aa = 1{,}52$ Meter, dann ist nach 1:

$$H = 5\left(\frac{9{,}382 - 11{,}583}{4{,}984 - 11{,}583}\right) = 1{,}667,$$

mithin das gesuchte Gefälle zwischen A und B = 1,667 + 0,23 — 1,52 = 0,377 Meter.

§. 205.

Entschiedenen Vorzug verdient das Stampfer'sche Instrument bei Nivellements in gebirgigem Terrain, insofern mittelst desselben offenbar bei einer geringeren Anzahl von Aufstellungen zum Ziele zu gelangen ist, als dies durch ein gemeines Niveau zu ermöglichen wäre. So war nach einer im XX. Bande der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes zu Wien enthaltenen, vergleichenden Uebersicht von acht Nivellements nach der gewöhnlichen Methode und der neuen, von Stampfer daselbst zuerst veröffentlichten, bei 4° 34′,4 Bodenneigung, die Anzahl der Aufstellungen 40 für das gewöhnliche Niveau, hingegen nur 5 unter Gebrauch des hier beschriebenen.

Wie beim gewöhnlichen, einfachen oder zusammengesetzten Nivelliren das Nivelliren aus der Mitte dem aus einem oder beiden Enden aus mehr als einem Grunde vorzuziehen ist, so verhält es sich nun auch bei dieser neuen Nivellirmethode. Sei A Fig. 226 der Standort des Instrumentes, in B die eine und in C die andere Nivellirlatte errichtet, oder falls nur eine Latte zur Hand ist, mögen B, C die aufeinanderfolgenden Lattenaufstellungen bezeichnen. Bedeutende Erleichterung des Nivellirgeschäfts gewährt jedoch der erstere Umstand, besonders auch, wenn statt einer einzigen Zielscheibe deren zwei an jeder Latte angebracht sind, welche während der Operation thunlichst in constanter Entfernung erhalten, d. h. nur dann verschoben werden, wenn das Terrain dies fordert. Jedenfalls ist die untere Scheibe nicht zu verändern, deren Abstand vom Fuß der Latte, nämlich Bd = Cd′ = m sein mag.

Mit Benutzung der vorigen Bezeichnung ist sonach die Höhe des scheinbaren Horizontes der Fernrohrare, nämlich ac über $B = m + w\left(\frac{h-u}{o-u}\right)^r$, über $C = m + w\left(\frac{h-u}{o-u}\right)^v$, wobei r und v keineswegs die Bedeutung von Exponenten haben, sondern nur Andeutungen der vor- oder rückwärts geschehenen Winkelbeobachtungen sind. Das Gefälle zwischen den Punkten B und C beträgt daher:

$$m + w\left(\frac{h-u}{o-u}\right)^r - m - w\left(\frac{h-u}{o-u}\right)^v = w\left[\left(\frac{h-u}{o-u}\right)^r - \left(\frac{h-u}{o-u}\right)^v\right]$$

oder für w = 1

$$\left(\frac{h-u}{o-u}\right)^r - \left(\frac{h-u}{o-u}\right)^v.$$

Wie beim zusammengesetzten Nivelliren aus der Mitte mit dem gewöhnlichen Niveau, hat man dann für mehrere Aufstellungen des Instruments das gesuchte Gefälle

$$= w\left[\left(\frac{h-u}{o-u}\right)^r_1 + \left(\frac{h-u}{o-u}\right)^r_2 + \left(\frac{h-u}{o-u}\right)^r_3 + \ldots\right.$$
$$\left. - \left(\frac{h-u}{o-u}\right)^v_1 - \left(\frac{h-u}{o-u}\right)^v_2 - \left(\frac{h-u}{o-u}\right)^v_3 - \ldots\right]$$

und es leuchtet für sich ein, daß zur Vermeidung von Irrungen auch für diese Nivellirmethode Register angelegt und in solche die Beobachtungs- und Rechnungsergebnisse eingetragen werden können.

§. 206.

Endlich bleibt noch zu zeigen übrig, wie dieses Instrument als Distanzmesser zu benutzen sei. Das Instrument werde über A Fig. 227 aufgestellt gedacht, die Visirlatte über B; $ab = D$ sei die zu bestimmende Distanz, $\angle cad = \alpha$ der Verticalwinkel zwischen den Scheibenmittelpunkten. Da α stets nur sehr klein ist, so wird man mit Beibehaltung obiger Bedeutung für w setzen können:

$$w = D \,.\, \text{tang}\, \alpha, \text{ und}$$
$$\text{tang}\, \alpha = C\,(o - u),$$

wobei C eine unveränderliche, jedem derartigen Instrumente eigenthümliche und vor der Benutzung desselben zum Distanzmessen zu bestimmende Größe ist. Man hat sonach:

$$w = D \,.\, C\,(o - u), \text{ folglich}$$

$$1) \quad D = \frac{w}{C\,(o-u)}.$$

Die Größe C, nichts anderes als die wirkliche Weglänge, welche der Index zurückgelegt hat, damit die Fernrohrare aus der Lage ad in jene von ac gelangte, d. i.

$$C = \frac{w}{D\,(o-u)},$$

ergiebt sich, sobald man nur D kennt, da die übrigen Stücke der Gleichung bekannt sind. Daher bedarf es nur einer sehr genauen Messung der Horizontale ab, wobei das im ersten Capitel Bemerkte Anwendung erleidet. Um die Formel 1 für den praktischen Gebrauch bequemer einzurichten, sei $\frac{1}{C} = K$, dann ist:

$$2)\quad D = \frac{K \,.\, w}{o - u} \text{ oder für } w = 1$$

$$3)\quad D = \frac{K}{o - u}.$$

Anmerkung. Für das hier beschriebene Instrument fand ich nach mehreren Versuchen K = 167,14, daher nur allein für dasselbe die Formel $D = \frac{167{,}14 \,.\, w}{o - u}$ Gültigkeit hat. Zugleich ergaben diese Versuche die Unsicherheit im Visiren zu 0,00578 Schraubengang, d. i. = 7,93 ... Secunden. Der Werth eines Libellentheiles, d. h. der Winkel, um welchen die Fernrohraxe sich bewegen muß, damit die Luftblase von einem Theilstrich auf der Libellenröhre zum nächstfolgenden gelangt, betrug 0° 1′ 48″.

§. 207.

Berücksichtigung des durch Brechung der Lichtstrahlen in der Luft entstehenden Visirfehlers. Aus der Physik wissen wir, daß Lichtstrahlen, wenn sie durch Mittel verschiedener Dichte hindurchgehen, ihre ursprüngliche Richtung ändern, um so mehr, je größer die Verschiedenheit der Dichten der Mittel ist, und daß man diese Richtungsänderung der Lichtstrahlen ihre Brechung oder Refraction nennt. Allgemein wird daher das Auge des Beobachters ein Object nie an seinem relativen Orte im Raume wahrnehmen, sondern von diesem um so mehr abweichend, je entfernter dasselbe gelegen und je verschiedener die Dichte der Stoffe oder Mittel ist, durch welche die von ihm ausgehenden Lichtstrahlen ihren Weg nehmen mußten, um zum Auge zu gelangen. Da nun die Dichte der atmosphärischen Luft mit ihrer Entfernung von der Erde abnimmt, so werden Objecte, mögen sie aus tiefer oder höher liegenden Standpunkten betrachtet werden, stets in anderen Richtungen erscheinen, als diejenigen sind, welche durch gerade Linien vorgezeichnet werden, die man sich von den Objecten nach dem Auge gezogen denkt. Die Größe dieser Richtungsänderung würde mit Sicherheit bei Beobachtungen in Rechnung zu bringen und ihr gemäß ein jeder Visirstrahl zu corrigiren sein, änderte sich die Dichte der Luft nicht zugleich mit der Temperatur derselben, und wäre diese nicht wiederum von der Tageszeit und so manchen zufälligen Umständen abhängig. Man richte nur des Morgens ein Fernrohr auf ein etwas weit entferntes Object, versichere sich der unverrückten Lage des Instruments, und sehe gegen Mittag wieder durch das Fernrohr hindurch, dann wird das Object nicht mehr an derselben Stelle im Gesichtsfelde des Fern-

rohres erscheinen, sondern von dieser um so mehr abweichen, je bedeutender die Temperaturänderung der Luft gewesen ist.

Sei GEAF Fig. 228 der wahre Horizont des beobachtenden Auges A, AB dessen scheinbarer. Wird nun in der Richtung desselben — d. h. in der Tangente einer Curve für den Berührungspunkt A — ein Object B wahrgenommen, so befindet sich dasselbe bei gewöhnlichem Zustande der Luft unter B etwa in D. Nach den Versuchen Delambre's ist der Refractionswinkel BAD = 0,08 ACB, falls C das Erdcentrum bedeutet. Da, wenn die Geraden BC, AD und AE als gezogen gedacht werden, die Winkel BAD und BAE stets sehr klein sind, so wird man setzen können:

$$BD : BE = BAD : BAE,$$

oder weil

$$BAE = \frac{ACB}{2},$$

$$BD : BE = 0{,}08\,ACB : \frac{ACB}{2} = 0{,}16 : 1,$$

demnach

$$BD = 0{,}16\,BE,$$

d. h. das Object wird um 0,16 der Höhe des scheinbaren Horizontes über dem wahren tiefer wahrgenommen.

Anmerkung. Da beim Nivelliren aus der Mitte die Correction wegen Refraction der Lichtstrahlen an beiden Latten erfolgt und gleichviel beträgt, die Werthe der Correctionen aber wie die der Zeichenhöhen entgegengesetzte Größen sind, so ist diese Nivellirmethode vom Einflusse der Refraction ganz unabhängig und empfiehlt sich schon aus diesem Grunde, abgesehen von der mit ihr verbundenen geringeren Anzahl von Instrumentaufstellungen, im Vergleich zu den übrigen Nivellirmethoden.

§. 208.

Barometrisches Höhenmessen.

Die Anwendung des Barometers zum Höhenmessen ist gegenwärtig so gewöhnlich und durch die Bemühungen ausgezeichneter Naturforscher selbst Leuten von geringer mathematischer Vorbildung zugänglich gemacht worden, daß ich kein Bedenken getragen habe, sie mit zu den Operationen der niedern Feldmeßkunst zu zählen.

Die Einrichtung des Barometers setzen wir aus der Physik als bekannt voraus und erinnern nur, daß, wenn man im Horizonte der Meeresfläche eine über 3 Fuß lange, an einem Ende zugeschmolzene

Glasröhre mit Queckſilber füllt, dieſelbe umkehrt und in ein Gefäß mit Queckſilber taucht, die Queckſilberſäule in der Röhre zwar immer um etwas fällt, inzwiſchen ſtets nur bis zu einer beſtimmten Tiefe hinab. Darauf beträgt die Höhe der Queckſilberſäule ca. 28 Pariſer Zoll oder 0,76 Meter, und es hält dieſe Säule einer Luftſäule das Gleichgewicht, welche den Querſchnitt der Röhre zur Grundfläche und den Abſtand des freien Queckſilberſpiegels vom Ende der Atmoſphäre zur Höhe hat. Wird die Höhe der drückenden Luftſäule durch Erhebung der Glasröhren über jenen Horizont vermindert, dann nimmt auch ihr Gewicht ab, und ſie vermag nun nicht mehr, eine Queckſilberſäule von der vorigen Länge zu tragen, vielmehr wird dieſelbe deſto kleiner ſein, in je beträchtlichere Höhe das Rohr gelangt. Das Gegentheil muß offenbar eintreten, ſobald das Rohr unter den bezeichneten Horizont verſetzt wird, z. B. in die Tiefe eines Bergwerks. Wären nun die gegenſeitigen Beziehungen der Höhe der drückenden Queckſilberſäule zu jener der Luftſäule völlig beſtimmt, d. h. vermöchte man genau anzugeben, bis zu welcher Höhe oder Tiefe man ſich mit dieſem Rohre — dem Barometer — von einem gegebenen Horizonte aus entfernen müßte, damit die Queckſilberſäule im Rohre — der Barometerſtand — einer gegebenen Größe entſpräche, dann würde es in der That kein einfacheres Mittel zu Höhenmeſſungen oder Nivellements geben, als das Barometer.

Seit den Entdeckungen Pascal's, Mariotte's und Halley's über das Verhalten der Elaſticität der Luft zu ihrem Volumen, beſonders ſeit der Begründung des Mariotte'ſchen Geſetzes, iſt man bis auf die neueſte Zeit bemüht geweſen, jenen Zuſammenhang zwiſchen dem Barometerſtande und der ihm zukommenden Höhe über einem gegebenen Horizonte feſt zu begründen, damit das Barometer ſtets mehr und mehr zu genauen Höhenbeſtimmungen geeignet werde.

§. 209.

Auf folgende Weiſe kann das Geſetz, nach welchem die Barometerſtände bei Erhebungen deſſelben über einen gegebenen Horizont abnehmen, dargethan werden.

A Fig. 229 ſtelle einen Punkt der Erdoberfläche dar, für welchen der Barometerſtand b betragen möge, AZ eine beliebige Höhe, bis zu welcher man ſich mit dem Barometer zu erheben gedenkt. Setzt man AZ in n außerordentlich kleine Theile AB = BC = CD = ... = k eingetheilt voraus, dann wird die Elaſticität der Luft innerhalb eines jeden dieſer Theile als ſich gleich bleibend angenommen werden können.

Nun sei zu Anfang B des zweiten Theiles BC das Barometer gefallen und dessen Stand $= b_1$ geworden, dann ist die Höhe der Queckſilberſäule, welche der Luftſäule AB das Gleichgewicht hält: $b - b_1$. Sei ferner der Querſchnitt der Queckſilberſäule $= 1$, das Gewicht einer Volumeneinheit derſelben $= c$, dann ist das Gewicht dieſer Queckſilberſäule $=$

$$1) \quad c(b - b_1).$$

Ist p das Gewicht einer Volumeneinheit Luft beim Barometerſtande $a = 0{,}76$ Meter, dann folgt nach dem Mariotte'ſchen Geſetze, wenn x das Gewicht einer Volumeneinheit Luft beim Barometerſtande b bezeichnet:

$$a : b = p : x, \text{ daher}$$

$$x = \frac{b}{a} \cdot p,$$

mithin das Gewicht der Luftſäule AB

$$2) \quad k \cdot \frac{b}{a} \cdot p = \frac{kbp}{a}.$$

Da nun die Werthe 1 und 2 einander gleich ſein müſſen, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{kbp}{a} = c(b - b_1), \text{ d. i.}$$

$$3) \quad b_1 = b\left(1 - \frac{kb}{ac}\right).$$

In der zweiten Schicht BC ſei das Barometer bis zum Betrage b_2 geſunken, dann ergiebt ſich wie vorhin das Gewicht der die Luftſäule BC im Gleichgewicht haltenden Queckſilberſäule zu

$$4) \quad c(b_1 - b_2),$$

und dasjenige der Luftſäule BC beträgt:

$$5) \quad \frac{kb_1p}{a},$$

daher durch Vergleichung beider letzteren Ausdrücke:

$$\frac{kb_1p}{a} = c(b_1 - b_2), \text{ folglich}$$

$$b_2 = b_1\left(1 - \frac{kp}{ac}\right),$$

d. i. wegen 3

$$6) \quad b_2 = b\left(1 - \frac{kp}{ac}\right)^2.$$

Auf gleiche Art findet man, wenn b_3 den Barometerstand für die dritte Luftschicht CD bedeutet:

$$7) \quad b_3 = \left(1 - \frac{kp}{ac}\right)^3,$$

und nun für die nte Luftschicht, mit welcher das Ziel Z erreicht sein mag:

$$I. \quad b_n = b\left(1 - \frac{kp}{ac}\right)^n.$$

Die Elasticität der Luft nimmt also in einer geometrischen Progression ab, beim Emporsteigen in derselben nach einer arithmetischen Progression.

§. 210.

Schreibt man h statt des Barometerstandes b_n in der Höhe AZ, d. i. in der nten Luftschicht, dann ist:

$$h = b\left(1 - \frac{kp}{ac}\right)^n,$$

woraus, wenn

$$\frac{p}{ac} = \varphi$$

gesetzt wird,

$$n = \frac{\log h - \log b}{\log (1 - k\varphi)}$$

folgt.

Nun war die Höhe einer Luftschicht $= k$, folglich ist die gesammte Höhe $AZ = nk = H$, und daher

$$1) \quad H = \frac{\log h - \log b}{\log (1 - k\varphi)} \cdot k.$$

Bekanntlich hat man:

$$\log \text{nat} (1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots$$

und

$$\log N = 0{,}4342944 \cdot \log \text{nat} N$$
$$= m \cdot \log \text{nat} N,$$

daher

$$\log (1 - z) = m\left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots\right),$$

folglich, wenn $z = k\varphi$ gesetzt wird:

$$\log (1 - k\varphi) = m\left[-k\varphi - \tfrac{1}{2}(k\varphi)^2 - \tfrac{1}{3}(k\varphi)^3 - \ldots\right].$$

Weil jedoch k als außerordentlich klein vorausgesetzt worden ist, so wird man nur das erste Glied dieser Reihe zu beachten brauchen und alsdann haben:

$$\log(1 - k\varphi) = -mk\varphi, \text{ mithin wegen 1}$$

$$2) \quad H = \frac{1}{m\varphi}(\log b - \log h).$$

Da $\varphi = \frac{p}{ac'}$, a = 0,76 Meter, und der Erfahrung gemäß die Dichte der atmosphärischen Luft im Verhältniß zu derjenigen des Queckſilbers bei 0° C, nämlich $\frac{p}{c} = \frac{1}{10466,82}$ ist, so folgt durch Substitution dieser numerischen Werthe in die Formel 2:

$$H = \frac{10466,82\,(\log b - \log h)}{0,4342944} \text{ oder}$$

I. $H = 18316,58\,(\log b - \log h)$ Meter, d. i.

II. $H = 56386,53\,(\log b - \log h)$ Pariser Fuß.

§. 211.

Es bedürfen diese Formeln noch einiger Correctionen, und zwar:

1) hinsichtlich der Temperatur des Queckſilbers, indem solche zu 0° der Centesimalscala vorausgesetzt wurde. Nach Versuchen von Dulong und Petit beträgt der Ausdehnungscoefficient des Queckſilbers für jeden Grad C $\frac{1}{5550}$; daher würden nach §. 7, 1 die Barometerstände, wenn sie bei τ und τ'° C bezüglich b und h wären, bei 0° C

$$b\left(1 - \frac{\tau}{5550}\right) \text{ und}$$

$$h\left(1 - \frac{\tau'}{5550}\right)$$

sein.

Werden diese auf den Gefrierpunkt reducirten Barometerstände in die Gleichung I. des vorigen §. eingetragen, dann erhält man statt

$$H = 18316,58\,(\log b - \log h) = 18316,58\,.\,\log\frac{b}{h}$$

den Ausdruck

$$H = 18316,58 \log\left[\frac{b\left(1 - \frac{\tau}{5550}\right)}{h\left(1 - \frac{\tau'}{5550}\right)}\right],$$

wofür als Annäherungswerth

$$H = 18316{,}58 \log \left[\frac{b}{h}\left(1 - \frac{\tau - \tau'}{5550}\right)\right]$$

$$= 18316{,}58 \left[\log \frac{b}{h} + \log\left(1 - \frac{\tau - \tau'}{5550}\right)\right]$$

gesetzt werden kann.

Allein auch dieser Ausdruck ist unter Benutzung obiger Reihe

$$\log (1 - z) = - m (z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \ldots)$$

einer Vereinfachung fähig, da, wenn man in ihr $\frac{\tau - \tau'}{5550}$ für z einführt und die höheren Potenzen dieses Bruches vernachlässigt, erhalten wird:

$$\log\left(1 - \frac{\tau - \tau'}{5550}\right) = - 0{,}4342944 \cdot \frac{\tau - \tau'}{5550} = - \frac{\tau - \tau'}{12500}.$$

Es ist daher:

$$\text{I.} \quad H = 18316{,}58 \left[\log \frac{b}{h} - \frac{\tau - \tau'}{12500}\right].$$

2) Da ferner in der ursprünglichen Formel I. §. 210 die Temperatur der Luft zu 0° C vorausgesetzt worden ist, so wird man die Höhe der Luftsäule für die Temperaturen t und t', welche beziehungsweise bei den beobachteten Barometerständen b, h statt fanden, zu corrigiren haben. Nun ist nach Gay-Lussac der Ausdehnungscoefficient der atmosphärischen Luft bei mittlerem Feuchtigkeitszustande für jeden Grad der Centesimalscala $\frac{1}{266{,}67} = 0{,}00375$.

Die Erfahrung lehrt, daß, wenn man aus den Temperaturen t und t' das arithmetische Mittel nimmt und dieses für die Temperatur der den Barometerständen entsprechenden Luftsäulen ansieht, der Wahrheit hinreichend entsprochen, d. h. eine Zahl erhalten wird, welche von jener nicht sehr abweicht, die sich ergiebt, sobald an mehreren, zwischen jenen äußersten Beobachtungsorten gewählten Punkten Temperaturbeobachtungen angestellt und aus den Ergebnissen das arithmetische Mittel genommen wird.

Ist also die Länge der Luftsäule bei 0° = 1, dann beträgt sie bei der Temperatur $\frac{t + t'}{2}$

$$1 + \left(\frac{t + t'}{2}\right) . 0{,}00375,$$

und nun hat man für die verbesserte Höhe aus I:

II. $H = 18316{,}58 \left[\log \frac{b}{h} - \frac{\tau - \tau'}{12500}\right] \left[1 + \frac{(t + t')}{2} . 0{,}00375\right]$.

Noch pflegt man diese Höhe weiter zu corrigiren, z. B. auf die Abnahme der Beschleunigung der Schwere nach dem Aequator zu Rücksicht zu nehmen, ferner auf die Entfernung der Beobachtungsorte oder Stationen vom Erdmittelpunkte, desgleichen auf den Feuchtigkeitszustand der Luft, d. h. auf die Elasticität des in ihr enthaltenen Wasserdunstes. Inzwischen da die Beobachtungsfehler meistentheils die Mängel obiger Formeln überwiegen, so wollen wir hier auf eine weitere Ausbildung derselben verzichten und nur noch bemerken, daß zur Umgehung aller dieser Correctionen d'Aubuisson de Voisin den barometrischen Coefficienten zu 18394 angenommen hat, wonach sich ergiebt:

III. $H = 18394 (\log b - \log h)$ Meter.

§. 212.

Behufs der Erleichterung wirklicher Höhenberechnungen hat man besondere Tabellen entworfen, unter welchen diejenigen von Gauß wegen ihrer außerordentlichen Einfachheit und Bequemlichkeit obenan stehen. Rühlmann's früher angeführte Logarithmentafeln enthalten als werthvolle Beigabe jene barometrischen Tafeln und es wird daselbst auch deren Gebrauch an einem Beispiele gezeigt. Hier wollen wir uns mit der Berechnung eines einzigen besonderen Falles begnügen und dabei von der Formel II. des vorigen §. Gebrauch machen.

Beispiel. Eine Elle über der Sohle des Hofes der Königl. Gewerbschule zu Chemnitz und $1\frac{1}{4}$ Elle unter der Seigerschelle des Hauptstadtthurmes daselbst wurden den 1. Juli 1846 Nachmittags 4 Uhr, bei gänzlicher Windstille, gleichzeitig an zwei correspondirenden Barometern Beobachtungen angestellt, und es ergab sich für die untere Station der Barometerstand $b = 27'' 4{,}50'''$ Pariser Maß, die Queckfilbertemperatur $\tau = 20{,}5°$ C, die Temperatur der Luft $t = 21{,}25°$ C; an der oberen Station war $h = 27'' 2{,}50'''$, $\tau' = 20{,}3°$ C, $t' = 21{,}06°$ C.

Hiernach ist, wenn die Barometerstände in Linien ausgedrückt werden, der Höhenunterschied beider Beobachtungsorte:

$$H = 18316{,}58 \left[\log \frac{328{,}5}{326{,}5} - \frac{20{,}5 - 20{,}3}{12500}\right] \times \left[1 + \frac{(21{,}25 + 21{,}06)}{2} . 0{,}00375\right]$$

$$H = 18316{,}58\,(0{,}100146 - 0{,}0000145)\,(1 + 0{,}079335)$$
$$= 18316{,}58 \,.\, 0{,}002637 \,.\, 1{,}079335 = 52{,}14 \text{ Meter}$$
$$= 92{,}06 \text{ Dresdner Ellen;}$$

ein von der wahren Höhe nur um 2,57 Ellen abweichendes Resultat.

Die Formel III. giebt:

$$H = 18394\,(\log 328{,}5 - \log 326{,}5) = 18394 \,.\, 0{,}0026522 =$$
$$48{,}78 \ldots \text{ Meter,}$$

also eine um 3,35 . . Meter geringere Höhe.

Inzwischen gewährt letztere Formel, wenn es nur auf eine oberflächliche Höhenbestimmung ankommt, z. B. bei vorläufiger Untersuchung eines Gebirgsterrains, durch welches hindurch ein Straßenzug, etwa eine Eisenbahn geführt werden soll, hinreichende Genauigkeit, und wird daher öfters angewendet.

§. 213.

Ein Barometer zum Höhenmessen zeigt Fig. 230, in $\frac{1}{8}$ seiner linearen Größe. Dasselbe gehört zur Classe der Heberbarometer, insofern es aus einer zweischenkligen Glasröhre abcd besteht. Der längere Schenkel ab ist bei a zugeschmolzen, der kürzere cd bei d offen. Beide Schenkel stehen durch das Bogenstück bc mit einander in Verbindung und bilden so ein communicirendes Rohr, welches an mehreren Stellen an ein Bret befestigt ist, das an seinem oberen Ende einen zum Aufhängen des Barometers bestimmten Ring hat. Setzen wir das Rohr mit Quecksilber gefüllt voraus und den oberen Quecksilberspiegel im Horizonte fg, den unteren im Horizonte hi liegend, d. h., da das Quecksilber im Glasrohre convere Oberflächen bildet, jene Horizonte als Berührungsebenen dieser Oberflächen voraus, dann versteht man bekanntlich unter dem Barometerstande die Entfernung beider Horizonte, und es wird jetzt darauf ankommen, denselben zu messen. Hierzu dient ein 30 Pariser Zoll langer, mit einer Zollscala versehener Messingstab nk, welcher sich vermittelst eines Getriebes k den Schenkeln des Rohres parallel auf- und abwärts bewegen läßt, zu welchem Behufe bei m eine Führung angebracht ist. Man stellt den Stab so, daß die Horizontalfäden eines an seinem unteren Ende befindlichen Diopters ko in den Horizont hi hineinfallen, und hat jetzt offenbar nur nöthig, nachzusehen, wie viel Zoll vom Horizonte fg des oberen Quecksilberspiegels an dem Zollstabe abgeschnitten werden. Um aber den Barometerstand genauer angeben zu können,

z. B. bis auf Hunderttel einer Linie, so sind zunächst auf dem Stabe die einzelnen Linien selbst aufgetragen, alsdann steht mit dem Stabe ein wiederum vermittelst eines Getriebes l längs desselben beweglicher Nonius in Verbindung, dessen Einrichtung mit der durch Fig. 14 dargestellten völlig übereinstimmt. An den Rahmen des Nonius ist ebenfalls ein Diopter p mit zwei Horizontalfäden angebracht, dessen dioptrische Ebene mit dem Inder oder Nullpunkt des Nonius zusammenfällt, so daß, wenn man die Visirebene auf den Gipfel des oberen Queckſilberberges eingestellt hat, sogleich das Ablesen des Barometerstandes erfolgen kann.

Am kürzeren Schenkel des Barometerrohres ist eine Verengerung C desselben wahrzunehmen, welche dazu dient, damit Behufs des Transportes die Queckſilbersäule verschlossen werden kann. Es geschieht dies dadurch, daß man das Barometer etwas neigt, bis das Queckſilber nach a gelangt ist, und nun einen Korkkolben q Fig. 231 in die Verengerung C hineinbringt, weswegen derselbe sich an einem Fischbeinstäbchen r befindet.

Zur Angabe der Queckſilbertemperatur ist neben dem Zollstabe nk ein hunderttheiliges Thermometer s befestigt; ein anderes eben so getheiltes, vom Barometer ganz unabhängiges Thermometer Fig. 232 vervollständigt den Apparat und dient zur Bestimmung der Temperatur der Luft. Soll die Elasticität des atmosphärischen Dunstes mit in Rechnung gebracht werden, dann muß noch ein Psychrometer hinzukommen. Von selbst versteht es sich, daß zum gesammten Apparate zwei völlig übereinstimmende Barometer, Thermometer u. s. w. gehören, und wären sie dies nicht, daß man wenigstens durch mehrfache Beobachtungen deren Abweichungen kennt und so den Stand des einen Instrumentes auf den des andern zu reduciren im Stande ist; endlich daß sämmtliche Instrumente in geeigneten Futteralen aufbewahrt werden können.

Nur einige meteorologische Kenntniß giebt an die Hand, welche Vorsichtsmaßregeln beim Gebrauch des Barometers zu Höhenbestimmungen oder Nivellements in flachem wie in gebirgigem Terrain zu beobachten sind.

§. 214.

Lehmann's System der graphischen Darstellung von Bergformen. Im §. 114 wurde dargelegt, worauf es bei der graphischen Ausführung des Planes einer Gegend ankomme, und bemerkt, daß zur Vollständigkeit derselben die Angabe der Unebenheiten,

d. i. der Bergformen nothwendig mit gehöre; jetzt fügen wir hinzu, wie der Plan erst alsdann einen umfassenden und allseitigen Nutzen gewährt, wenn solcher außer den dort bezeichneten Details Erdprofile nach verschiedenen Richtungen enthält, besonders aber die Beschaffenheit der Terrainoberfläche, ihre größere oder geringere Neigung gegen den Horizont, auf eine leicht verständliche Art aus dem Plane zu ersehen ist. Die Anfertigung der Erdprofile unterliegt nach dem Vorangehenden keinerlei Schwierigkeiten, und wir gedenken später noch ein ganz eigenthümliches Verfahren der Erwerbung derselben mitzutheilen. Hinsichtlich der graphischen Darstellung der Bergformen steht unter den verschiedenen Darstellungsmethoden die Lehmann'sche über allen anderen, daher am gegenwärtigen Orte nur von ihr die Rede sein wird.

Das Princip derselben beruht auf der Voraussetzung, daß bei lothrecht einfallenden Lichtstrahlen gegen den Horizont geneigte Flächen eine um so geringere Helligkeit zeigen werden, je größer diese Neigung ist, und umgekehrt. Größte Helligkeit würde hiernach den horizontalen Flächen, völlige Dunkelheit hingegen den verticalen Flächen zukommen, und es ist leicht zu zeigen, daß die Helligkeitsgrade geneigter Flächen den Sinussen ihrer Neigungswinkel indirect proportional sind.

Die Lehmann'sche Bergzeichnung besteht nun darin, durch Nebeneinanderstellung von Strichen, d. h. durch Schraffirung den geneigten Flächen im Verhältniß zu ihrer Neigung dadurch größere Dunkelheit zu ertheilen, daß die Striche bei größerer Neigung näher, bei geringerer entfernter von einander zu stehen kommen. Weil aber Neigungen oder Böschungen der Bergflächen über 45° hinaus in Wirklichkeit entweder nicht vorkommen oder, wäre es dennoch der Fall, für die meisten Aufnahmezwecke einen untergeordneten Werth haben, so ist Lehmann von obigem Gesetze abgewichen und hat schon Böschungen von 45° als völlig dunkel angenommen, dadurch aber offenbar den Vortheil erreicht, hügeliges, gewöhnlich von 10° Bodenneigung nicht sehr verschiedenes Land durch ein der Deutlichkeit günstigeres Mischungsverhältniß von Schwarz zu Weiß darstellen zu können. Er geht hierbei von der Annahme aus, daß sich s, die Quantität von Schwarz, zu w, der von Weiß, wie x, der Böschungswinkel, zu 45°—x, d. i. zu seiner Ergänzung zu 45° verhält. Andere haben in neuerer Zeit dieses willkührliche Princip verlassen und solches auf 60° Bodenneigung übertragen, um nicht genöthigt zu sein, schräge Flächen von 45° Neigung, welche zwar selten, aber denn doch, wenn auch nur

auf geringe Ausdehnung, vorkommen, völlig schwarz bezeichnen zu müssen.

Hiernach hat man entweder

1) $s : w = x : 45° - x$ oder

2) $s : w = x : 60° - x$.

Ist also die Quantität des Schwarzen bei 5° Böschung = 1, dann würde diejenige des Weißen nach (1) 8, nach (2) hingegen 11 betragen; und man hätte nur, um diese Böschung graphisch darzustellen, neben einem schwarzen Rechtecke entweder 8 oder 11 weiße Rechtecke bezüglich von derselben Breite hinzustellen; bei 10° neben 2 Rechtecken oder nur einem einzigen 7 oder 5 weiße. Je nachdem der einen oder der anderen Voraussetzung nachgegangen wird, ergiebt sich:

für die Böschung	das Verhältniß der Breite des schwarzen Striches zum Abstande je zweier benachbarten Striche, d. i. zum weißen Zwischenraume nach	
	1	2
0°	0 : 9	0 : 12
5°	1 : 8	1 : 11
10°	2 : 7	1 : 5
15°	3 : 6	1 : 3
20°	4 : 5	1 : 2
25°	5 : 4	5 : 7
30°	6 : 3	1 : 1
35°	7 : 2	7 : 5
40°	8 : 1	2 : 1
45°	9 : 0	3 : 1
50°		5 : 1
55°		11 : 1
60°		12 : 0

Eine Strichscala des Lehmann'schen Systems zeigt Fig. 233. ab, bc, cd . . . kl bedeuten die Durchschnittslinien einer Verticalebene mit aneinander anschließenden, gegen den Horizont bezüglich unter den Winkeln 0°, 5°, 10° . . . . 45° geneigten ebenen Bodenflächen, also ein Terrainprofil. Wäre die Oberfläche eines Bergabhanges cylindrisch, dann würde man sich dieselbe durch Einführung horizontaler, etwa gleich weit von einander entfernter Ebenen in

Elementarstreifen zerlegt denken können, d. h. in Streifen von so geringer Breite bc, cd, de .... kl, daß solche ohne Fehler als eben anzusehen sein würden. Für diese Streifen wären dann bezüglich ihre Neigungen gegen den Horizont zu bestimmen und je nach deren Befund die sie bezeichnenden Striche im entsprechenden Mischungsverhältniß des Schwarzen zum Weißen aufzutragen. Handelt es sich dagegen um die graphische Darstellung einer wirklichen Bergform, etwa einer solchen, wie Fig. 234 dieselbe im Grundriß und nach zwei Profilen darstellt, dann führe man in Gedanken durch den Berg hindurch Horizontalebenen in gleichen oder verschiedenen Abständen und zerlege ihn so in einzelne Schichten oder Zonen. Die Durchschnitte a,b,c,d,, e,g,f,, h,i,k, ... dieser Horizontalebenen mit der Bergoberfläche heißen Parallelen, und man hat bei der Aufnahme einer Gegend dieselben unter Benutzung eines Nivellirinstruments abzustecken, später aber wie alle übrigen Punkte in den Plan einzutragen und gehörig mit einander zu verbinden. Genügt eine blos annähernde Darstellung, wie z. B. bei militärischen Terrainaufnahmen, dann können die Parallelen nach dem Augenmaße beurtheilt und aufgezeichnet werden, unter Benutzung jedoch aller Umstände, welche die Gestalt der Parallelen der Wahrheit nahe bringen, wohin unter Anderm die Beobachtung des Laufes der Gewässer gehört, indem diese horizontale Linien der Gegend annähernd vergegenwärtigen.

§. 215.

Fassen wir jetzt die Oberfläche einer einzelnen Bergzone für sich auf und denken uns diese als Mantel eines Kegels von horizontaler Basis, dann dürfen wir die Striche, durch welche die Neigung dieser Mantelfläche gegen den Horizont ausgedrückt wird, um so eher als Seitenlinien dieses Kegels ansehen, je geringer die Höhe der Bergzone angenommen worden ist. Oder was auf eins hinauskommt, die Mantelfläche läßt sich als Oberfläche einer Pyramide von sehr großer Seitenanzahl erklären, deren Kanten mit den Bergstrichen übereinstimmen. Endlich wird die Aufzeichnung der Striche noch durch die Vorstellung wesentlich erleichtert, daß man sich an einem Punkte, etwa u, einer der Parallelen eine Tangente xy gezogen denkt und nun den Strich uv als Normale der Curve für den Berührungspunkt u ansieht.

Hiernach bedarf es nur noch der Uebung im Auftragen dieser Striche, wozu das Copiren guter Musterblätter, besonders der dem Lehmann'schen Werke über das Situationszeichnen beigegebenen, zu

empfehlen ist, hauptsächlich aber das Darstellen wirklicher Bergformen, nachdem an denselben die Parallelen mittelst eines Nivellirinstrumentes abgesteckt und auf der Planchette des Meßtisches projicirt worden sind. Fertigkeit und Regeln ergeben sich dann von selbst aus der Praxis, als der besten Unterrichtsquelle.

Zusatz. Daß die Proportionen 1 und 2 des vorigen §. zur Böschungsbestimmung für einen fertig vorliegenden Situationsplan geeignet sind, bedarf wohl kaum der Erinnerung. Auf einem Plane nach Lehmann'schem Systeme habe man an irgend einer Stelle das Verhältniß des Schwarzen zum Weißen wie 1 : 4 erkannt, dann entspricht diesem Verhältnisse nach 1 eine Böschung

$$x = \frac{45°}{s + w} = \frac{45°}{1 + 4} = \frac{45°}{5} = 9°.$$

§. 216.

Es bleibt jetzt nur noch das oben angedeutete eigenthümliche Verfahren der Gewinnung eines Erdprofils zu zeigen übrig, dessen Uebergehung wir für um so bedenklicher hielten, als von ihm in neuerer Zeit bei Straßenprojecten, hauptsächlich bei den Vorarbeiten zu Eisenbahnanlagen vielfältig Anwendung geschieht.

Sei AB Fig. 235 die auf dem fertigen Situationsplane einer Gegend projectirte gerade oder gekrümmte Bahnlinie, worüber man sich nach vorangegangener Besichtigung des Terrains entschieden haben mag. a, b, c, d .... stellen verpfählte Punkte dar, welche entweder während der Terrainbesichtigung, oder erst nachdem auf dem Plane die Bahnlinie AB gezogen worden ist, ausgewählt wurden. Diese Punkte werden ungefähr 100 Ellen zu beiden Seiten der Bahnlinie entfernt gewählt und — was hierbei Hauptsache ist — mit der Rücksicht, daß, wenn man sich je zwei benachbarte nicht nur einander gegenüberliegende Punkte, wie ab, bc, cd, de ...., sondern auch aufeinander folgende, wie mn, np, pq ...., durch eine straff ausgespannte Schnur verbunden denkt, diese dem Terrain sich möglichst anschließt. Es kommt jetzt auf die Angabe des Höhenunterschiedes je zweier der so eben bezeichneten Punkte an, was am einfachsten mittelst der Kippregel nach dem früher für diese angegebenen Verfahren zu bewerkstelligen ist. Nun leuchtet ein, daß aus diesen Angaben, mit Hinzuziehung der durch directe Messung auf dem Plane zu entnehmenden Horizontalentfernungen ab, am, bc, bn, cp, pd .... alle Elemente hervorgehen, welche zur Berechnung der Höhen der Punkte m, n, p, q .... über

die zugehörigen, seitlich von AB gelegenen Punkte ab, bc, cd .... nothwendig sind, sondern es ergeben sich hieraus auch die Höhen der Punkte m, n, p.... untereinander. Da aber die horizontalen Entfernungen letzterer Punkte wiederum mittelst des Cirkels vom Plane abgenommen werden können, so begreifen wir nun, wie dieses Verfahren zur Erlangung eines Terrainprofiles nach der vorgezeichneten Linie AB ausreichend sei.

Der vorzügliche Nutzen dieser Methode besteht aber darin, daß, falls aus dem Profile eine unstatthafte Vertheilung des Auf- und Abtrages hervorgehen sollte, die Bahnlinie sogleich verändert, etwa nach A'B' verlegt werden kann, ohne deswegen auf dem Felde Operationen vollziehen zu müssen.

Beispiel. Das Project einer Eisenbahn sei bis zum Punkte A Fig. 235 gediehen, d. h. deren Mittellinie oder Bahnare bis dahin unabänderlich festgestellt worden. Die Bahn soll von A aus bei gegebener Steigung weiter nach B fortgeführt und zu diesem Behuf ein Terrainprofil in der Richtung AB angefertigt werden, um aus diesem die Tiefe des Einschnittes im Terrain oder nach Befinden des vorzunehmenden Abtrages übersehen zu können. Die Höhe des Punktes A über dem Anfangspunkte der Bahn betrage 340 Ellen und die Horizontalprojection der Bahnare habe bis zu A eine Länge von 36000 Ellen. Nun sei, wie oben beschrieben wurde, verfahren worden, und es mögen die Höhen der gewählten Punkte über den Anfangspunkt der Bahn ergeben haben:

für	a	349	Ellen
=	b	365	=
=	c	354	=
=	d	372	=
=	e	361	=
=	f	384	=

Durch directes Messen auf dem die betreffende Gegend darstellenden Plane sind die Horizontalprojectionen der Entfernungen dieser Punkte und zugleich jener der Durchschnittspunkte von AB mit den Querlinien ab, bc... bestimmt und gefunden worden:

ab = 200, am = 95, bc = 180, bn = 95, cd = 190, cp = 110, de = 150, dq = 65, ef = 195 und er = 92 Ellen.

Um jetzt die Höhe des Punktes m über dem bezeichneten Anfangspunkt der Bahn, auch deren Nullpunkt genannt, zu bestimmen, sehe man ab als die horizontale und bb', d. i. die Höhe von b über a, als die verticale Cathete eines rechtwinkligen Dreieckes abb'

an; dann wird in ihm durch die Höhenlinie mm′ des Punktes m über a offenbar ein dem △ abb′ ähnliches Dreieck amm′ abgeschnitten und es ist:

am : mm′ = ab : bb′, oder hier

95 : mm′ = 200 : (365 — 349), woraus

mm′ = 7,6 Ellen folgt.

Demnach beträgt die Höhe des Punktes m im anzufertigenden Terrainprofil über den Nullpunkt der Bahn 349 + 7,6 = 356,6 Ellen.

Ebenso findet man die Höhe von n 359,17 Ellen

" " " p 364,42 "

" " " q 367,24 "

" " " r 371,85 "

und ist jetzt im Stande, das verlangte Terrainprofil darstellen zu können, indem es hierzu nur noch der directen Messung der horizontalen Entfernungen dieser Terrainpunkte von einander oder vom Punkte A aus bedarf.

Das hiernach sich ergebende Profil ist, mit der in einem solchen Falle üblichen Bezeichnung, der Fig. 235 beigegeben worden, und aus ihr zu ersehen, in welchen Tiefen für eine gegebene Steigung — z. B. auf 100 Ellen horizontale Länge 1 Elle — die Bahnaxe A″B″ unterhalb jener Terrainpunkte m″, n″, p″ .... liegt, d. h. wie viel die Tiefe des Einschnittes an denselben betragen würde.

Fände man diese zu beträchtlich, dann würde durch Anschluß eines Bogens an A ein anderes Profil zu entwerfen, dabei aber genau wie vorhin zu verfahren sein.

Zweiter Abschnitt.

Praktische Stereometrie.

Einleitung.

§. 217.

Im §. 1 wurde bereits eine zweifache Auffassung der Raumgrößen als abstracte und concrete geltend gemacht, insofern bei jenen lediglich ihr Quantum, bei diesen aber zugleich deren Qualität in Betracht kommt. Aufgabe der reinen Stereometrie ist es, die Lehren der Elementargeometrie auf Bestimmung von Raumgrößen überhaupt anzuwenden, um dadurch allgemeine Vorschriften und Sätze zu begründen, wonach unmittelbar, d. h. ohne vorheriges Aufsuchen ihres Ursprunges, die Größe des begrenzten Raumes zu bestimmen sei. Der Inbegriff aller dieser Sätze und Wahrheiten bildet die reine Stereometrie. Werden dieselben auf Bestimmungen concreter oder solcher Raumgrößen angewendet, denen irgend eine Bedeutung zukommt, namentlich auf Gegenstände des gemeinen Lebens, und geschieht dies zugleich unter angemessener Gruppirung dieser Gegenstände selbst, so entsteht hierdurch eine Wissenschaft, welche mit Recht die Benennung praktische Stereometrie verdient. Sie fordert die Erkenntniß der Wahrheiten der reinen Stereometrie, setzt solche als dargethan voraus, erinnert nur an dieselben und zeigt, wie selbige auf passende Art zur Größenermittelung von allerhand Körpern anzuwenden sind.

Beide, die reine wie die praktische Stereometrie, verfolgen als gemeinschaftliches Ziel die Größenbestimmung der Körper, jene stets ohne alle Rücksicht auf deren Stoff, diese zwar in der Regel auch; inzwischen nimmt sie sogleich mit darauf, insonderheit auf dessen Dichte und Verhalten in verschiedenen Temperaturen Rücksicht und entlehnt unbedenklich Lehren anderer Wissenschaften, z. B. aus der Statik diejenige des Schwerpunktes ebener Flächen, falls nur hierdurch den an sie gestellten Forderungen vollständig entsprochen werden kann.

§. 218.

Auch in der praktischen Stereometrie werden die Körper in Absicht auf ihre Gestalt, analog der reinen, in regelmäßige und unregelmäßige eingetheilt, und es kann, wie bei dieser, das Princip der Eintheilung ein zweifaches sein, je nachdem die Regelmäßigkeit in der Uebereinstimmung der Dimensionen der Körper oder in der Art der Entstehung ihrer Oberflächen zu begründen ist. Schließen wir uns dem zweiten Eintheilungsprincipe an, so zerfallen nach Monge die regelmäßigen Körper in solche mit entwickelbaren oder developabeln Oberflächen, in Körper mit Umdrehungs- oder Revolutionsoberflächen, und endlich in solche mit windschiefen Oberflächen. Körper der ersten Classe sind das Prisma, der Cylinder, die Pyramide, der Kegel, sowie alle regel- und unregelmäßigen Polyeder. Zur zweiten Classe gehören die Kugel, das Ellipsoid, das Paraboloid und Hyperboloid; zur dritten endlich das Hyperboloid mit einem Mantel, das hyperbolische Paraboloid, der windschiefe Cylinder und das Conoid.

Dem Plane dieses Buches gemäß soll nur von den im Fache der Technik hauptsächlich vorkommenden Körpern die Rede sein, d. h. an einer Reihe von Beispielen deren Inhalts- oder Volumens- und Oberflächenbestimmung gezeigt werden. Hinsichtlich der hierbei geltenden Maßeinheiten nehmen wir auf die in den ersten Paragraphen aufgestellten Maßtabellen Bezug, und fügen diesen jetzt nur noch Eytelwein's Angaben der Dichten einiger Stoffe bei, die Dichte des Wassers = 1 voraussetzend.

Stoff	Dichte
Ahornholz, gemeines	0,755
Apfelbaumholz, trocken	0,793
Blei, gegossen, englisches	11,324—11,875

Stoff	Dichte
Blei, gegossen, deutsches	11,310
Buchenholz (Rothbuchen), vom Stamm, trocken	0,666—0,854
= Splint, =	0,600—0,721
Ebenholz	1,230
Eichenholz	1,200
Eis	0,916
Eisen, gegossenes	7,113—7,230
geschmiedet, brandenb. Landeisen	8,189
harzer	8,291
schwedisches	8,341
suhler	8,215
Erde, lehmige, festgestampft, frisch	2,063
trocken	1,929
Erlenholz, vom Stamme, trocken	0,586—0,660
Eschenholz, = = =	0,725—0,845
Fichtenholz, frisch	0,546
trocken	0,360—0,498
Glas, Fensterglas, gemeines	2,642—2,714
Gneis	2,630—2,710
Gold, das reinste, gegossen	19,258
Granit, gemeiner	2,539—3,063
Gyps, dichter	1,872—2,964
gebrannter	1,810
gegossen und ausgetrocknet	0,973
Holzkohle	0,280—0,442
Hornbaum (Weißbuche), vom Stamme, trocken	0,755—0,805
Kalkmörtel, frisch	1,789
trocken	1,638
Kalkstein, dichter	2,200—2,700
Kiefernholz, vom Kerne, frisch, harzig	0,725—0,728
= = trocken	0,625
Korkholz	0,240
Kreide, weiße	1,797—2,790
Kupfer, geschmolzen	7,788
Kupferdraht	8,878
Lehm, fetter, frisch	1,664
erhärtet	1,516
Lerchenbaumholz	0,622
Lindenholz	0,604
Luft, atmosphärische gewöhnliche, feuchte bei 0° C und 0,76 Meter Barometerhöhe	0,0012323
Mahagonyholz	0,637—1,063
Mauer mit Kalkmörtel von Sandsteinen, trocken	2,047

Stoff	Dichte
Mauer mit Kalkmörtel von Ziegelsteinen, trocken	1,471—1,593
Meerwasser	1,026
Messing, gegossen	8,396
Messingdraht	8,544
Nußbaumholz, deutsches	0,664
Platin, reines, gegossen	19,500—20,855
gewalzt	22,069
Porphyr	2,395—2,793
Quarz, gemeiner	2,486—2,763
Queckſilber, deutsches	14,000
engliſches	13,593
Regenwasser, ganz reines	1,000
Sand, gemeiner, trocken	1,638
Sandſtein	1,933—2,699
Schwefel, geſchmolzener	1,991
Silber, 16löthiges, geſchlagen	10,511
geſchmolzen	10,474
Stahl, geſchlagen	7,795
Gußſtahl	7,919
Steinkohle	1,270—1,500
Tannenholz, vom Stamme, frisch	0,444—0,453
trocken	0,420—0,424
Thonſchiefer, Dachſchiefer	2,670—3,500
Ulmenholz, vom Stamme, trocken	0,600—0,742
Wismuth, geſchmolzen	9,822
Ziegel, gebrannter	1,410—2,215
Zink, geſchmolzen	7,191—7,213
gehämmert	7,861
Zinn, engliſches, gegossen	7,291
gehämmert	7,299—7,306

Erſtes Capitel.

Körper mit entwickelbaren Oberflächen.

§. 219.

Das Prisma und der Cylinder.

Aufgabe. Das Volumen eines dreiſeitigen Prisma's von ungleichen Seitenkanten zu finden.

Auflösung 1. ABC Fig. 236 sei die Basis des dreiseitigen Prisma's, AD, BE und FC stellen dessen Seitenkanten dar, welche gegen erstere unter dem Winkel α geneigt sein mögen, dann hat man, wenn das fragliche Volumen durch V bezeichnet wird:

$$1)\quad V = \triangle ABC . \frac{AD + BE + CF}{3} . \sin\alpha,$$

d. i. dem Producte aus dem Inhalt der auf die Seitenkanten normalen Querschnittsfläche des Prisma's in das arithmetische Mittel der Längen seiner Seitenkanten.

Zusatz. Für $\alpha = 90°$ wird

$$2)\quad V = \triangle ABC . \frac{AD + BE + CF}{3},$$

und ist außerdem $AD = BE = CF$, dann folgt:

$$3)\quad V = \triangle ABC . AD.$$

Auflösung 2. Mittelst der auf die Seitenkanten normalen Querschnittsfläche $= G$ und des Abstandes der Schwerpunkte S und S′ bezüglich der beiden Grundflächen ABC und DEF des Prisma's.

Hiernach ist:

$$4)\quad V = G . SS'.$$

Auflösung 3. Durch Zerlegung des gegebenen Prisma's in ein Prisma mit parallelen Grundflächen ABCFGH und eine vierseitige Pyramide DEHGF, und Addition der Inhalte beider Körper.

Beispiel. Sei $AD = 40$, $BE = 29$, $CF = 17$, $AB = 15$, $AC = 18$, $BC = 13$ Fuß und $\alpha = 73° 40'$, dann ist nach 1 mit Berücksichtigung der Formel 1 des §. 52:

$$V = \sqrt{23\,(23-15)\,(23-18)\,(23-13)} . \frac{40+29+17}{3} . \sin 73° 40'$$

$$= 20\sqrt{23} . \frac{86}{3} . \sin 73° 40' = 2638{,}64\ldots \text{ Kubikfuß}.$$

§. 220.

Allgemein wird der Inhalt eines jeden Prisma's gefunden, indem man den Abstand der Schwerpunkte beider Grundflächen mit dem Flächeninhalte eines zu den Seitenkanten normalen Querschnittes multiplicirt. Oder da dieser Querschnitt dem Producte aus dem Inhalt einer der Grundflächen in den Sinus des Neigungswinkels der Seitenkanten zu ihr gleichkommt, so läßt sich dieser Satz dahin umwandeln, daß man sagt: jener Inhalt entspricht dem Producte aus einer

der Grundflächen in den Sinus ihrer Neigung zu den Seitenkanten und der Entfernung der Schwerpunkte beider Grundflächen von einander.

Auch kann das Prisma, wie dies in Fig. 237 dargestellt erscheint, in dreiseitige Prismen zerlegt und dessen Inhalt als Summe der Inhalte der letzteren ausgedrückt werden. Setzt man die Inhalte der Dreiecke ABE, BED und BCD = M, N, P, den Neigungswinkel der Grundfläche ABCDE zu den Seitenkanten AG, BH, CI . . . . = α, die Längen dieser Kanten selbst bezüglich a, b, c, d . . . ., dann folgt nach 1 des vorigen §.:

$$5)\quad V = \left(\frac{a+b+c}{3}.M + \frac{b+d+e}{3}.N + \frac{b+c+d}{3}.P\right).\sin\alpha.$$

Es gelten diese Sätze für Prismen von beliebiger, also auch für solche von sehr großer, ja unendlich großer Seitenzahl, d. h. für Körper von cylindrischen Oberflächen.

Beispiel 1. Ein dammartiger Erdaufwurf Fig. 238 erhebe sich aus der horizontalen Basis ABOIEF. Derselbe bestehe aus zwei Flügeln, welche in der Verticalebene durch B, C, D, E an einander grenzen, so daß solche hier einen gemeinschaftlichen, in der Umklappung BERT dargestellten Querschnitt haben. CD und DR vergegenwärtigen die Entfernungen der Eckpunkte C, D von obiger Basis. Beide Dammflügel haben horizontale Kanten AB, CH . . . BO, CL . . . und sind an ihren respectiven Enden eben abgeschrägt. Ueberdies sind die Kanten beider Dammflügel zur gemeinschaftlichen Basis durch B, C, D und E gleich geneigt, nämlich unter einem Winkel $\alpha = 56°$ 30′, und was die Dimensionen anlangt, so habe man BE = 35, BC = 16, BD = 24, CT = 8, DR = 9, AB = 45, HC = 24, DG = 18, EF = 26, BO = 47, CL = 28, DK = 22 und EI = 28 Ellen.

Es werde durch das Ziehen der Diagonalen ET, FH und IL beziehungsweise in den Vierecken BERT, AFGH und IOLK ein jeder Dammflügel in zwei dreiseitige Prismen zerlegt, und nun zuvörderst der Inhalt der Dreiecke BET und ERT bestimmt.

Nach §. 53, 8 ist der Inhalt des Viereckes

$$\text{BERT} = \frac{CT\,.\,BD + DR\,.\,CE}{2} = \frac{8\,.\,24 + 9\,.\,19}{2} = 181{,}5\ \square\ \text{Ellen.}$$

Ferner ist der Inhalt des $\triangle$ BET $= \frac{BE\,.\,CT}{2} = \frac{35\,.\,8}{2} = 140$ Quadratellen, und dasjenige des $\triangle$ ERT = BERT − BET = 181,5 − 140 = 41,5 $\square$ Ellen. Auch kann letzterer zur Prüfung des erstern

unabhängig von der Inhaltsbestimmung des Viereckes BERT ermittelt werden, indem alle hierzu gehörigen Elemente vorliegen.

Aus 5 folgt daher der geforderte körperliche Inhalt des Dammes

$$V = \left(\frac{AB + HC + FE}{3} \,.\, \triangle BTE + \frac{HC + FE + GD}{3} \,.\, \triangle ERT + \frac{OB + LC + IE}{3} \,.\, \triangle BTE + \frac{LC + IE + KD}{3} \,.\, \triangle ERT\right) \,.\, \sin\alpha$$

$$= \tfrac{1}{3}\,[(AB + HC + FE + OB + LC + IE) \,.\, \triangle BTE + (HC + FE + GD + LC + IE + KD) \,.\, \triangle ERT] \,.\, \sin\alpha$$

$$= \tfrac{1}{3}\,[(45 + 24 + 26 + 47 + 28 + 28) \,.\, 140 + (24 + 26 + 18 + 28 + 28 + 22) \,.\, 41{,}5] \,.\, \sin 56^\circ\, 30'$$

$$= \tfrac{1}{3}\,(27720 + 6059) \sin 56^\circ\, 30'$$

$$= 9389{,}27 \ldots \text{ Kubikellen.}$$

Beispiel 2. Der Umfang p eines Cylinders von kreisförmigem Querschnitte betrage 2 Ellen 7 Zoll, die längste Seitenlinie desselben AB (Fig. 239) 5 Ellen 10 Zoll, die kürzeste DC 4 Ellen, dann ist der zu Anfang dieses §. aufgestellten Regel gemäß und mit Hinzuziehung bekannter Sätze der Elementargeometrie das Volumen dieses Cylinders, wenn überdies FE die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Grundflächen bedeutet:

$$= \frac{p^2}{4\pi} \,.\, FE = \frac{p^2}{4\pi} \,.\, \frac{AB + DC}{2} = \frac{(2\frac{7}{24})^2}{4 \,.\, 3{,}141} \,.\, \frac{5\frac{5}{12} + 4}{2} =$$

$$\frac{3025}{576 \,.\, 4 \,.\, 3{,}141} \,.\, \frac{113}{24} = 1{,}967 \ldots \text{ Kubikelle.}$$

Zusatz. Nähert sich die obere Grundfläche AD der unteren dergestalt, daß sie stets zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, dabei aber die Punkte D und A ihre respectiven Seiten DC, AB nicht verlassen, dann tritt ein Augenblick ein, für welchen D mit C zusammenfällt, d. h. $DC = 0$ geworden ist, und nun eine Körperform zu Stande kommt, welche ein cylindrischer Huf (ungula cylindrica) genannt wird. Das Volumen desselben würde sein:

$$\frac{p^2}{4\pi} \,.\, KE = \frac{p^2}{4\pi} \,.\, \frac{BI}{2} = \frac{p^2}{4\pi} \,.\, \frac{AB - DC}{2} = \frac{(2\frac{7}{24})^2}{4 \,.\, 3{,}141} \,.\, \frac{5\frac{5}{12} - 4}{2}$$

$$= \frac{3025}{576 \,.\, 4 \,.\, 3{,}141} \,.\, \frac{17}{24} = 0{,}296 \ldots \text{ Kubikelle.}$$

§. 221.

Oberflächenbestimmung prismatischer Körper. Betrachten wir das Prisma Fig. 237 nochmals, und zwar Behufs der Bestimmung des Inhaltes seiner Oberfläche. Bedeutet A′B′C′D′E′ einen auf die Seitenkanten normalen Querschnitt, sind a, b, c, d und e die Halbirungspunkte der Seitenlinien desselben, sowie fg, hi, kl, mn und op Parallelen zu den Seitenkanten in ihren vollen Längen auf den betreffenden Prismenflächen, und ist N der gesuchte Inhalt der Oberfläche des Prisma's, mit Ausschluß seiner beiden Grundflächen, dann hat man:

$$1)\quad N = \frac{AG + BH}{2} \cdot A'B' + \frac{BH + CI}{2} \cdot B'C' + \frac{CI + DK}{2} \cdot C'D' +$$

$$\frac{DK + EF}{2} \cdot D'E' + \frac{EF + AG}{2} \cdot E'A' =$$

$$fg \cdot A'B' + hi \cdot B'C' + kl \cdot C'D' + mn \cdot D'E' + op \cdot E'A'.$$

Wäre die Entfernung SS′ der Schwerpunkte S und S′ beider Grundflächen gegeben, dann würde die Regel der Bestimmung der Oberfläche des Prisma's dahin sich einschränken, daß man nur diese Entfernung mit dem Umfange des normalen Querschnittes zu multipliren hätte, eine Regel, welche für cylindrische Oberflächen auch noch gilt, da diese als Prismen von unendlich großer Seitenzahl angesehen werden können.

Für das vorliegende Prisma würde hiernach sein:

$$2)\quad N = A'B'C'D'E' \times SS'.$$

Aus der Projectionslehre ist bekannt, wie prismatische und cylindrische Oberflächen abgewickelt, d. h. in einer Ebene ausgebreitet oder graphisch dargestellt werden können. Nach vollzogener Abwickelung bedarf es nur der Inhaltsbestimmung der abgewickelten Fläche nach einer oder der anderen der früher angegebenen Methoden. Damit hängt die Darstellung des Flächennetzes einer derartigen Körperform zusammen, die wir hier ebenfalls nicht erst auszuführen brauchen, indem sie uns aus der Projectionslehre hinlänglich bekannt ist.

Beispiel 1. Mit Bezug auf Fig. 237 sei AG = 2,38, BH = 1,86, CI = 1,52, DK = 1,96, EF = 2,67, A′B′ = 0,18, B′C′ = 0,17, C′D′ = 0,27, D′E′ = 0,25 und E′A′ = 2 Fuß, dann ist nach 1 der Inhalt der Oberfläche des Prisma's ohne die Grundflächen:

$$N = \frac{2{,}38 + 1{,}86}{2} \cdot 0{,}18 + \frac{1{,}86 + 1{,}52}{2} \cdot 0{,}17 + \frac{1{,}52 + 1{,}96}{2} \cdot 0{,}27 +$$

$$\frac{1{,}96 + 2{,}67}{2} \cdot 0{,}25 + \frac{2{,}67 + 2{,}38}{2} \cdot 0{,}2 = 2{,}22 \ldots \square \text{Fuß.}$$

Beispiel 2. Rücksichtlich Fig. 239 und mit Beibehaltung der im zweiten Beispiele des vorigen §. angegebenen Dimensionen würde der Inhalt der cylindrischen Oberfläche betragen:

$$N = p \cdot FE = 2\tfrac{7}{24} \cdot \frac{113}{24} = 10{,}78 \ldots \square \text{Ellen.}$$

Beispiel 3. Die Oberfläche des cylindrischen Hufes CIB Fig. 239 würde sonach sein:

$$N = p \cdot EK = 2\tfrac{7}{24} \cdot \frac{17}{24} = 1{,}62 \ldots \square \text{Ellen.}$$

§. 222.

Die Pyramide und der Kegel.

Das Volumen irgend einer Pyramide, also auch einer solchen von unendlich großer Seitenzahl, d. h. eines Kegels, ist dem Producte aus dem dritten Theile des Inhalts ihrer Grundfläche in deren Höhe gleich. Bezeichnet man daher dieses durch h und jene durch G, das Volumen der Pyramide durch V, so findet statt:

$$1) \quad V = \frac{G}{3} \cdot h.$$

Das Volumen V einer, zu seiner Grundfläche vom Inhalte G parallel abgestumpften, geraden oder schiefen Pyramide von endlicher oder unendlicher Seitenzahl wird gefunden, indem man zu G den Inhalt der Abstumpfungsfläche g und die mittlere geometrische Proportionale der Inhalte beider Flächen addirt und diese Summe mit dem dritten Theile ihres Abstandes h multiplicirt. Man hat:

$$2) \quad V = (G + \sqrt{Gg} + g)\frac{h}{3}.$$

Beispiel 1. Das Volumen einer geraden, zur Grundfläche parallel abgestumpften Pyramide Fig. 240, deren Grundfläche ein reguläres Sechseck ist, soll bestimmt werden. Zu diesem Ende hat man die Seiten ab, dc beider Grundflächen und eine der Kanten, etwa bc, gemessen und gefunden: $ab = 17\frac{1}{2}$, $dc = 10$, $bc = 20\frac{1}{4}$ Zoll.

Zuvörderst ist die Höhe $fg = ec$ der abgestumpften Pyramide zu berechnen, und dazu hat man im rechtwinkligen Dreiecke bce:

$$ec = fg = \sqrt{bc^2 - eb^2}$$

$$= \sqrt{bc^2 - (fb - fe)^2}$$

$$= \sqrt{bc^2 - (fb - gc)^2} = \sqrt{bc^2 - (ab - dc)^2}$$

$$= \sqrt{(20\tfrac{1}{4})^2 - (17\tfrac{1}{2} - 10)^2} = 18{,}81 \text{ Zoll.}$$

Hierauf bedarf es der Inhaltsbestimmung beider Grundflächen. Es ist die untere:

$$G = 6 \cdot \frac{ab}{2}\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{17\frac{1}{2}}{2}\sqrt{3} = 90{,}93 \square\text{Zoll},$$

die obere:

$$g = 6 \cdot \frac{dc}{2}\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{10}{2}\sqrt{3} = 51{,}96 \square\text{Zoll},$$

daher nach 2 das fragliche Volumen:

$$V = (90{,}93 + \sqrt{90{,}93 \cdot 51{,}96} + 51{,}96) \cdot \frac{18{,}81}{3}$$

$$= 1326{,}92 \ldots \text{ Kubikzoll.}$$

Beispiel 2. Der innere Raum eines Hohlgefäßes habe die Gestalt eines geraden abgestumpften Kegels von kreisförmigem Querschnitt. Der Durchmesser $kc = D$ der oberen Grundfläche betrage 8,9, derjenige der unteren sei $ge = d = 6{,}3$, so wie der Abstand beider Grundflächen $ab = h = 8{,}3$ Zoll. Es sollen an der inneren Wand des Gefäßes Merkmale m, n, o, p und q, Behufs der Absonderung einzelner Dresdner Kannen, angebracht werden.

Man fragt, in welchen Entfernungen cm, cn, co ... diese Zeichen vom Punkte c aus sich befinden müssen, falls solche in der für diesen Punkt geltenden Seite ce des abgestumpften Kegels zu wählen sind.

Bezeichnet V das Volumen des ganzen Gefäßes, so hat man dafür:

$$3)\quad V = \frac{h\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2) = \frac{8{,}3 \cdot 3{,}141}{12}(8{,}9^2 + 8{,}9 \cdot 6{,}3 + 6{,}3^2)$$

$$= 380{,}242 \text{ Kubikzoll.}$$

Zur Auffindung der Entfernung cm des ersten Zeichens vom Punkte c ist in 3 zu setzen, da (nach 29 und 30 des §. 6) 72,35 Kubikzoll auf eine Dresdner Kanne kommen:

$$72{,}35 \cdot 5 = \frac{x \cdot \pi}{12}(y^2 + y \cdot 6{,}3 + 6{,}3^2), \text{ d. i.}$$

$$1381{,}78 = x\,(y^2 + y \cdot 6{,}3 + 6{,}3^2),$$

worin x die Höhe fb des abgestutzten Kegels von 5 Kannen Inhalt und y den Durchmesser ml seiner größeren Grundfläche bedeuten.

Das Volumen des Restes kcml wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$380{,}24 - 72{,}35 \,.\, 5 = \frac{(8{,}3 - x)\,\pi}{12}\,(8{,}9^2 + 8{,}9\,..\,y + y^2),\ \text{oder}$$

$$70{,}59 = (8{,}3 - x)\,(8{,}9^2 + 8{,}9\,y + y^2),\ \text{daher}$$

$$x = \frac{8{,}3\,(8{,}9^2 + 8{,}9\,y + y^2) - 70{,}59}{8{,}9^2 + 8{,}9\,y + y^2}$$

$$= \frac{8{,}3\,y^2 + 73{,}87\,y + 686{,}85}{79{,}21 + 8{,}9\,y + y^2}$$

Aus obiger Gleichung findet man:

$$x = \frac{1381{,}78}{y^2 + 6{,}3\,y + 39{,}69'}$$

folglich ist:

$$\frac{1381{,}78}{y^2 + 6{,}3\,y + 39{,}69} = \frac{8{,}3\,y^2 + 73{,}87\,y + 686{,}85}{79{,}21 + 8{,}9\,y + y^2}\ \text{oder}$$

$$y^4 + 15{,}2\,y^3 + 12{,}03\,y^2 - 607{,}08\,y - 9901{,}13 = 0,$$

woraus sehr annähernd

$$y = 8{,}75\ldots\ \text{Zoll},$$

und nun

$$x = 8{,}06\ldots\ \text{Zoll}$$

sich ergiebt.

Die Entfernung mc des ersten Zeichens m vom Punkte c erscheint als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mvc, dessen eine Cathete vc der Differenz der Radien ac und fm gleichkommt, während die andere mv dem Abstande af der Kreise kc und lm entspricht. Es ist daher:

$$cm = \sqrt{vc^2 + mv^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{kc - lm}{2}\right)^2 + (ab - bf)^2} = \sqrt{\left(\frac{kc - cy}{2}\right)^2 + (h - x)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8{,}9 - 8{,}75}{2}\right)^2 + (8{,}3 - 8{,}06)^2} = 0{,}24\,..\,\text{Zoll}.$$

Auf ähnliche Art sind die Entfernungen der übrigen Zeichen n, o, p . . . vom Punkte c aus zu berechnen.

§. 223.

Häufig, und namentlich bei Berechnung runder Hölzer, begnügt man sich mit einer annähernden Volumenbestimmung derselben, insofern man zur Erleichterung der Rechnung den abgestumpften Kegel als einen Cylinder von gleicher Höhe ansieht, dessen Durchmesser jedoch dem arithmetischen Mittel der Durchmesser beider Grundflächen entspricht. Zur Würdigung des hierdurch entstehenden Fehlers stelle Fig. 242 einen geraden abgestumpften Kegel von kreisförmiger Basis vom Durchmesser $ge = D$ dar. Der Durchmesser kc der Abstumpfungsfläche sei $= d$, ab die Höhe des abgestumpften Kegels $= h$, V dessen Volumen, sowie V′ das Volumen des Cylinders von den vorhin bemerkten Dimensionen, dann ist:

$$1) \quad V = \frac{h\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2)$$

$$2) \quad V' = \left(\frac{D+d}{2}\right)^2 . \frac{h\pi}{4}, \text{ daher}$$

$$V : V' = \frac{h\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2) : \frac{h\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2$$

$$= (D^2 + Dd + d^2) : \frac{3}{4}(D+d)^2$$

$$= 4(D^2 + Dd + d^2) : 3(D+d)^2.$$

Da diese Proportion für jede beliebige Voraussetzung gelten muß, also auch, wenn $d = 0$ angenommen wird, so hat man dafür:

$$V : V' = 4D^2 : 3D^2 = 4 : 3,$$

folglich ist

$$V > V',$$

und nun die Größe des fraglichen Fehlers:

$$F = V - V' = \frac{h\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2) - \left(\frac{D+d}{2}\right)^2 . \frac{h\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 . \frac{h}{3}.$$

Derselbe wächst also mit der Höhe des abgestumpften Kegels, nimmt ab, je mehr die Durchmesser beider Grundflächen dem Verhältnisse der Gleichheit sich nähern, und erscheint als ein voller Kegel, dessen Grundfläche der Differenz der Durchmesser des abgestumpf-

ten Kegels gleichkommt, während seine Höhe mit derjenigen des letztern übereinstimmt. Hiernach kann der Fehler leicht durch eine geometrische Construction graphisch dargestellt werden. Ist kceg ein ebener Schnitt durch die Are ab des abgestumpften Kegels, so ziehe man an, am bezüglich parallel zu ce und kg, dann liegen die Durchschnittspunkte n, m dieser Parallelen mit ge um die Differenz der Durchmesser beider Grundflächen von einander entfernt, dergestalt, daß mn den Durchmesser der Grundfläche des Fehlerkegels anzeigt.

Beispiel. Ein Baumstamm habe die Gestalt eines geraden abgestumpften Kegels und sei 30 Ellen lang, am unteren Ende 37, am oberen 8 Zoll dick, so ist dessen Volumen nach 1:

$$V = \frac{30 \,.\, 3{,}141}{12}\left[\left(\tfrac{37}{24}\right)^2 + \tfrac{37}{24} \,.\, \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9}\right] = 21{,}9393 \ldots \text{Kubikellen};$$

nach 2:

$$V' = \left(\frac{\frac{37}{24} + \frac{1}{3}}{2}\right)^2 . \frac{30 \,.\, 3{,}141}{4} = 20{,}7086 \,.\, . \text{ Kubikellen}.$$

Folglich beträgt der Fehler:

$$V - V' = 21{,}9393 - 20{,}7086 = 1{,}2307 \text{ Kubikelle}.$$

Anmerkung. Zur Erleichterung der Inhaltsbestimmung der Baumstämme sind Tabellen entworfen worden, unter Anderm von Cotta und Wolfram.

§. 224.

Die Oberfläche einer Pyramide, ohne die Grundfläche, besteht aus der Summe ihrer Seitenflächen, und ist für eine gerade Pyramide einem Dreiecke gleich, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunktes einer Seite der Grundfläche zur Höhe hat. Dieser Satz gilt auch für den geraden, einen Kreis zur Grundfläche habenden Kegel, dessen Oberfläche oder Mantel einem Dreiecke entspricht, welches den Umfang jenes Kreises zur Grundlinie und die Seitenlinie des Kegels zur Höhe hat. Anlangend die Oberfläche einer zur Grundfläche parallel abgestumpften Pyramide, so ist sie als Differenz der Oberflächen der vollen und der Ergänzungspyramide anzusehen, oder einem Trapeze gleich, dessen parallele Seiten bezüglich den Umfängen beider Grundflächen entsprechen, während ihr Abstand mit dem der Mittelpunkte je zweier auf der nämlichen Pyramidenfläche liegenden Seiten der Grundflächen übereinkommt; für den Kegel die Differenz der Seiten des vollen und des Ergänzungskegels.

Für die in Fig. 240 dargestellte, abgestumpfte, sechsseitige Pyramide ist, wenn ki die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten ab und dc beider Grundflächen bedeutet, deren Oberfläche ohne die Grundflächen

$$A = \frac{6ab + 6dc}{2} \cdot ki = 3\,(ab + dc)\,ki,$$

und wenn R den Halbmesser der größeren, r den der kleineren Grundfläche des geraden abgestumpften Kegels Fig. 242 vorstellt und dessen Seite ce = kg = S gesetzt wird, dann hat man für dessen Mantelfläche:

$$A = (R + r)\,\pi \cdot S.$$

Beispiel. Für R = 0,23, r = 0,08 und S = 3,47 Meter würde sein:

$$A = (0{,}23 + 0{,}08)\,3{,}141 \cdot 3{,}47 = 3{,}382\,..\ \square\text{Meter}.$$

Zweites Capitel.

Körper mit Umdrehungsoberflächen.

§. 225.

Bewegt sich eine gerad- oder krummlinige Figur um eine feste Drehungsaxe, so beschreibt ihr Umfang eine Umdrehungsoberfläche. Diese, sowie der von der Fläche der Figur durchlaufene Raum lassen sich am einfachsten nach der Regel Guldin's bestimmen, wonach die auf solche Art entstandene krumme Oberfläche dem Producte aus dem Wege des Schwerpunktes in die Länge der bewegten Linie gleich kommt, und der Inhalt des von der bewegten Fläche beschriebenen Raumes dadurch gefunden wird, daß man den Inhalt der beschreibenden Fläche mit dem Wege ihres Schwerpunktes multiplicirt.

Körper dieser Art kommen im gewerblichen Verkehr häufig vor, z. B. als Hohlgefäße, Kessel, Fässer u. dgl., wovon wir einige der wichtigeren der Rechnung unterwerfen und dabei mit dem einfachsten, d. i. der Kugel, den Anfang machen wollen.

aeb Fig. 243 sei ein Halbkreis, ab dessen Durchmesser, c sein

Mittelpunkt und ce rechtwinklig auf ab. Wird ab als feste Drehungsaxe angesehen und um selbige herum der Halbkreis bewegt, so lange bis solcher wieder in seine vorige Lage zurückkehrt, dann beschreibt die Fläche des Halbkreises den Raum und der Umfang aeb desselben die Oberfläche einer Kugel.

Die Statik lehrt, daß, wenn r den Halbmesser $ce = ca = cb$ des Halbkreises bedeutet, die Entfernung des Schwerpunktes s der Fläche desselben vom Durchmesser ab, d. i. $cs = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$, und diejenige des Schwerpunktes s' der Kreislinie aeb von ab, nämlich $cs' = \frac{2r}{\pi}$ sei.

Hiernach ist der Inhalt der Kugel:

$$1) \quad V = 2 \cdot cs \cdot \pi \cdot aeb = 2 \cdot \frac{4r}{3\pi} \cdot \pi \cdot \frac{r^2\pi}{2} = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

und derjenige der Kugeloberfläche:

$$2) \quad A = 2 \cdot cs' \cdot \pi \cdot \overset{\frown}{aeb} = 2 \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \pi \cdot \frac{2r\pi}{2} = 4r^2\pi.$$

Zusatz. Wäre die Umdrehung des Halbkreises um seinen Durchmesser ab nicht gänzlich vollbracht worden, sondern nur bis zur Lage agb — im Sinne des beigesetzten Pfeiles — vorgeschritten, dann würde eine jede der beiden vorangehenden Formeln noch mit einem Factor zu versehen sein, bestehend aus dem Quotienten des Verhältnisses der wirklich zurückgelegten Bewegung des Halbkreises aeb zur vollen Umdrehung desselben, d. h. des Winkels, welchen die Ebene des Halbkreises in seiner neuen Lage agb mit der ursprünglichen aeb einschließt, zu vier rechten Winkeln. Sind nun ec, gc die Durchschnittslinien einer auf beiden Ebenen rechtwinkligen Ebene cge, bezeichnet also ecg den Neigungswinkel α jener zwei Ebenen, dann gehen die Formeln 1 und 2 in folgende neue über:

$$3) \quad V' = \tfrac{4}{3} r^3 \pi \cdot \frac{\alpha}{360}$$

$$4) \quad A' = 4r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360}$$

deren erstere das Volumen, letztere die krumme Oberfläche eines Kugelausschnittes vom Centrumswinkel α darstellt.

§. 226.

Mittelst der Guldin'schen Regel läßt sich der Inhalt eines Fasses leicht bestimmen. Zu diesem Ende stelle adqcbe Fig. 244 den Durchschnitt des inneren Faßraumes dar, und zwar durch die Axe gk desselben gedacht. Die krumme Linie aeb, die sogenannte Faßlinie, werde als ein Kreisbogen vom Halbmesser am = em = bm = r vorausgesetzt, dessen Sehne ab = gk = dc = l der Länge des Fasses entspricht, und einen Kreisabschnitt aeb begränzt, durch dessen Umdrehung um die feste Drehungsaxe gk ein Theil des inneren Faßraumes beschrieben wird. Den anderen Theil desselben erzeugt das Rechteck agkb, nämlich einen Cylinder vom Halbmesser $ag = \frac{ad}{2} =$ der halben Bodentiefe $= \frac{B}{2}$, und der Länge = l; dessen Volumen folglich

$$M = \frac{B^2 \pi}{4} . l$$

ist.

Anlangend das Volumen des vom Segmente aeb beschriebenen Ringes, so bedarf es hierzu nur der Angabe des Flächeninhaltes des Segmentes und der Entfernung sp seines Schwerpunktes s von der Axe gk. Vor jeder weiteren Bestimmung wollen wir den Abstand des Bogenmittelpunktes e von der Faßaxe gk, d. i. $ep = \frac{eg}{2} = \frac{A}{2} =$ der halben Spundtiefe setzen.

Unter Benutzung der Kreisgleichung findet man den Flächeninhalt des Segmentes

$$aeb = \sqrt{2 . r . ef} \left(\frac{ef}{3} - \frac{ef^2}{2.5.r} - \frac{ef^3}{2.4.7.r^2} - \frac{ef^4}{2.4.6.9.r^2} - \ldots \right).$$

Da jedoch r gewöhnlich sehr groß, ef hingegen sehr klein ist, so wird es in den meisten Fällen genügen, nur das erste Glied dieser Reihe zu berücksichtigen, wodurch man hat:

$$aeb = \frac{ef}{3} \sqrt{2r . ef},$$

und nun nach Gründen der Statik:

$$ms = \frac{l^3}{4ef \sqrt{2r . ef}}.$$

Ferner ist

$$fs = ms - mf = \frac{l^3}{4ef\sqrt{2r \cdot ef}} - \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}};$$

daher

$$ps = pf + fs = \frac{B}{2} + \frac{l^3}{4ef\sqrt{2r \cdot ef}} - \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

und das Volumen des vom Kreisabschnitte beschriebenen Ringes

$$N = 2ps \cdot \pi \cdot \text{Segm. abe}$$

$$= 2\left[\frac{B}{2} + \frac{l^3}{4ef\sqrt{2r \cdot ef}} - \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}\right] \cdot \pi \cdot \frac{ef}{3}\sqrt{2r \cdot ef}$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot ef\left[2B + \frac{l^3}{ef\sqrt{2r \cdot ef}} - 2\sqrt{4r^2 - l^2}\right]\sqrt{2r \cdot ef}.$$

Da jedoch $ef = \frac{A - B}{2}$, $r = \frac{l^2 - (A - B)^2}{4}$, und $M + N = V^2$ dem Volumen des inneren Faßraumes gleichkommt, so ergiebt sich solcher durch Einführung dieser Werthe in die vorangehenden Ausdrücke.

Nach Lambert ist für die hier angenommene kreisförmige Krümmung der Faßlinie sehr annähernd:

$$1) \quad V = 2\pi l\,[A^2 - \tfrac{2}{3}A\,(A - B) + \tfrac{2}{9}\,(A - B)^2]$$

wobei jedoch, wie bei der sogleich anzugebenden Formel 2, unter l, A, B nur die Hälften der diesen Buchstaben oben beigelegten Werthe einzusetzen sind.

§. 227.

Wird die Faßlinie als eine in e ihren Scheitel habende gemeine Parabel angesehen, so giebt Späth *) den körperlichen Inhalt des Fasses folgendermaßen an:

$$2) \quad V = 2\pi l\,[A^2 - \tfrac{2}{3}A\,(A - B) + \tfrac{1}{3}\,(A - B)^2].$$

Prof Dr. Rühlmann entwickelt in seiner Geostatik, unter der nämlichen Voraussetzung der Faßlinie für den Faßraum, einen sehr einfachen Ausdruck, und findet:

$$3) \quad V = \pi \cdot \tfrac{1}{4}\left(\frac{2A + B}{3}\right)^2 \cdot l.$$

---

*) Johann Leonhard Späth's Abhandlung von runden, ovalen, Ey- und Polygonal-Fässern. Nürnberg 1794.

Beispiel. Wie viel Dresdner Kannen enthält ein gewöhnliches Faß, dessen Spund- und Bodentiefe bezüglich 1 Elle 12 Zoll und 1 Elle 6 Zoll betragen, bei einer Axen- oder Weinlänge von 2 Ellen 3 Zoll?

Hiernach ist $A = 1\frac{1}{2}$, $B = 1\frac{1}{4}$ und $l = 2\frac{1}{8}$, mithin nach 3:

$$V = \pi \cdot \tfrac{1}{4}\left(\frac{2 \cdot 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}}{3}\right)^2 \cdot 2\tfrac{1}{8} = 3{,}1987\,..\text{ Kubikellen}$$

$$= 44219{,}9\,..\text{ Kubikzoll.}$$

Da nun auf die Dresdner Kanne 72,35 Kubikzoll kommen, so enthält das Faß $\frac{44219{,}9}{72{,}35} = 611{,}19\,..$ Kannen, oder weil 72 Kannen einen Eimer geben, $\frac{611{,}19}{72} = 8{,}47\,..$ Eimer.

Zusatz. Früher sah man den Inhalt eines Fasses für den eines Cylinders an, welcher das arithmetische Mittel aus der Spund- und Bodentiefe zum Durchmesser und den Abstand der inneren Bodenflächen, d. i. die Axe oder Weinlänge des Fasses zur Höhe hatte. Diesem gemäß würde der Inhalt obigen Fasses sein:

$$V = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l = 3{,}1554 \text{ Kubikellen,}$$

d. i. um $3{,}1987 - 3{,}1554 = 0{,}0433$ Kubikellen $= 598{,}579\,..$ Kubikzoll oder 8,27 .. Kannen zu klein.

§. 228.

Die Guldin'sche Regel findet eine weit allgemeinere Anwendung, überhaupt zur Oberflächen- und Inhaltsbestimmung derjenigen Raumformen, welche als Wege gedacht werden können, die durch continuirliche Fortbewegung von gerad- oder krummlinigen Figuren zurückgelegt worden sind; und es gilt hier der Satz: **wenn eine Figur längs einer geraden, einfach oder doppelt gekrümmten Linie dergestalt sich fortbewegt, daß sie stets auf der Bewegungsrichtung rechtwinklig bleibt, so giebt das Product aus dem Inhalt der Fläche in den Weg ihres Schwerpunktes das Volumen, und das Product aus dem Umfange der bewegten Figur in den Weg des Schwerpunktes desselben die Oberfläche des auf solche Art beschriebenen Körpers.**

Von diesem Satze kann unter Anderm zur Inhalts- und Oberflächenbestimmung eines spiralförmig gewundenen Schlangenrohres, wie solche bei Destillirgeräthschaften vorzukommen pflegen, vortheilhafter Gebrauch gemacht werden.

§. 229.

Was die Formen der Kessel anlangt, so entsprechen deren innere Oberflächen gewöhnlich solchen, welche durch Umdrehung einer krummen Linie um eine feste Drehungsaxe entstanden gedacht werden können. Die Beschaffenheit, d. h. die Natur der krummen Linie, wenn anders dieselbe eine nach irgend einem Gesetze gekrümmte ist, wird durch Ausmessung des Kessels und Anfertigung eines Profiles desselben dargethan. Ist auf solche Art die Eigenthümlichkeit der beschreibenden Curve erkannt, daß es eine Parabel, Ellipse u. s. w. sei, dann werden die aus der Curvenlehre denselben entsprechenden Sätze darauf angewendet. Läßt ein Gesetz der Krümmung sich nicht nachweisen, wenigstens kein der Rechnung leicht zu unterwerfendes, so zerlegt man den inneren Kesselraum, durch auf seine Axe rechtwinklig gedachte Ebenen, in Schichten oder Zonen, und sieht diese als Cylinder oder abgestumpfte Kegel und die Gegend am Boden des Kessels als einen Kugelabschnitt an.

Stellt z. B. abd Fig. 245 den inneren Raum eines Kessels dar, dessen Inhalt V berechnet werden soll, und ist ab die größte Weite, cd die Tiefe des Kessels, die Kessellinie aber eine Parabel, der Kesselraum also mit dem eines Paraboloids übereinstimmend, dann hat man:

$$V = \frac{\pi \,.\, cd \,.\, ab^2}{8},$$

und für die Oberfläche:

$$A = \frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{p}\sqrt{(4y^2 + p^2)^3} - p^2\right],$$

in welcher Formel $y = \frac{ab}{2}$ ist und p den Parameter der Parabel bedeutet $= \frac{ab^2}{4cd}$.

Zusatz. Handelt es sich um die Inhaltsbestimmung der Kesselwand, dann sieht man ein, daß diese durch Subtraction zweier Körper geschieht, nämlich des inneren Kesselraumes von demjenigen Raume, dessen Oberfläche der Außenfläche des Kessels entspricht. Auf ähn-

liche Art erfolgt die Inhaltsbestimmung anderer Hohlgefäße; auch die der Gewölbe geschieht nicht anders, worüber wir uns jedoch an diesem Orte der Aufzählung von Beispielen enthalten wollen. Auch überlassen wir dem Leser, Beispiele zu wählen, bei welchen die kubischen Inhalte der Körper mit Rücksicht auf ihre Ausdehnung in verschiedenen Temperaturen zu ermitteln sind, und bemerken nur, daß bei Forderungen dieser Art von der Formel III. des §. 7 und den daselbst angegebenen Ausdehnungscoefficienten Gebrauch zu machen ist. *)

Drittes Capitel.

Unregelmäßige Körper.

§. 230.

Mit unregelmäßigen Körpern haben wir es in der angewandten Stereometrie am häufigsten zu thun. Wir wollen dieselben zur leichteren Uebersicht in Körper mit ebenen und krummen Oberflächen eintheilen, endlich in solche, welche theils von ebenen, theils von krummen Oberflächen begränzt werden. Zur Classe der ersteren gehören alle unregelmäßigen Polyeder, z. B. Mauerwerke, zur zweiten alle Körper mit rundlichen Oberflächen, nur einer einzigen oder mehreren einander irgendwie durchschneidenden, während die Anzahl derjenigen Körper, welche von ebenen und gekrümmten Oberflächen zugleich eingeschlossen werden, außerordentlich groß ist, indem solche vorzüglich oft z. B. als Erddämme, Teichräume u. s. w., vorzukommen pflegen.

Alles läuft bei der Inhalts- und Oberflächenbestimmung derartiger Körper darauf hinaus, dieselben in einzelne regelmäßige Körper in Elemente zu zerlegen, diese einzeln zu bestimmen und aus ihrer Summe den verlangten Inhalt oder die Oberfläche zu bilden.

§. 231.

Fig. 246 stellt ein unregelmäßiges Polyeder dar und läßt die Art der Zerlegung desselben Behufs seiner Inhaltsbestimmung er-

---

*) Eine reichhaltige Sammlung von Uebungsbeispielen enthält die krummlinige Geometrie von G. A. Fischer, Professor u. s. w. Dresden, Arnold'sche Buchhandlung. 1828.

kennen. Das Viereck ABCD erscheint als Basis einer vierseitigen, in G ihren Scheitel habenden Pyramide, deren Kanten die Geraden GA, GD, GC und GB sind. Die Seitenfläche GDC ist die Basis einer zweiten dreiseitigen Pyramide vom Scheitel E, und GED Basis einer dritten, in F ihren Scheitel habenden Pyramide. Der Inhalt des vorliegenden Polyeders kann daher als Summe der Inhalte dieser drei Pyramiden angesehen werden.

Diese Zerlegungsart ist zwar theoretisch vollkommen richtig, inzwischen praktisch mit Hindernissen mancherlei Art verknüft, mindestens ohne Anwendung eines Goniometers, d. h. eines Instrumentes, wodurch die Neigungswinkel der Ebenen zu einander gemessen werden können, umständlich. Denn alsdann müssen die Neigungswinkel, um die Höhen jener drei Pyramiden zu bestimmen, aus den direct gemessenen Kanten und Diagonalen GD, EC und GC durch Rechnung gefunden werden, zuerst die Flächen- und nachher die Kantenwinkel; nun die Pyramidenhöhen, zu geschweigen anderer hierbei unerläßlicher Rechnungen. Jedes Mittel, diese zu umgehen oder doch wenigstens zu erleichtern, verdient daher volle Berücksichtigung, und unter Anderm gehört hierzu das Zerlegen des Polyeders in zwei Körper, nämlich in einen solchen mit zwei parallelen Gegenflächen und einen anderen leicht zu berechnenden. Hierzu bietet sich in unserem Polyeder mehrfache Gelegenheit dar, insofern man zunächst zur Fläche ABCD parallel durch den Eckpunkt F eine Ebene HIK führt, wodurch oberhalb derselben ein minder complicirter Körper FHIKGE übrig bleibt, oder statt dessen und einfacher die Parallelebene durch G hindurchlegt, nämlich GLM. Von dem auf diese Art entstandenen Körper müßte die dreiseitige Pyramide NMFG abgezogen, dafür aber die dreiseitige Pyramide LENG hinzugefügt werden, damit der Forderung, d. i. der Inhaltsbestimmung des ursprünglich gegebenen Polyeders Genüge geschieht.

Nun liegt die Frage nahe, auf welche Art der Inhalt eines solchen Körpers mit zwei parallelen Gegenflächen zu bestimmen sei, zu deren Beantwortung eine neue Figur dienen möge, und wobei wir dem Entwickelungsgange Weisbach's folgen wollen. *)

ABCD und FGHE Fig. 247 stellen die beiden Parallelflächen dar. Es sind unregelmäßige Vierecke, ohne die geringste Beziehung

---

*) Man sehe den „Leitfaden zum Unterrichte in der niederen Mathematik von Professor Julius Weisbach." Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung. 1835.

zu einander gedacht, weder ähnlich noch ähnlich gelegen, denn wären sie dieses, so würde das Polyeder nichts anderes darstellen, als eine zur Basis parallel abgestumpfte gerade oder schiefe Pyramide, und dessen Inhaltsbestimmung bedürfte der Erläuterung keineswegs. Hier aber denken wir uns zuvörderst A'B'C'D' als Normalprojection der Fläche ABCD auf die Fläche FGHE, wodurch sich von selbst ein gerades Prisma ABCDD'A'B'C' im Innern des Polyeders absondert; der erste Bestandtheil desselben. Hierauf führe man in Gedanken durch die Kanten AA', BB', CC' und DD' dieses Prisma's je zwei Ebenen, eine durch die zugehörige Polyederkante, die andere parallel zur nächstfolgenden BG, CH, DE und FA, so kommen vier dreiseitige Prismen, der zweite Bestandtheil des Polyeders, und vier dreiseitige Pyramiden, der dritte Bestandtheil desselben, zu Stande. Endlich wird man nur nöthig haben, unter Benutzung angemessener Bezeichnungen, eine Formel für den kubischen Inhalt V des Polyeders aufzustellen.

Nun sei G der Inhalt der größeren Parallelfläche FGHE, g derjenige der kleineren ABCD oder A'B'C'D', ihr Abstand $AA' = BB' = \ldots = H$. Ferner sei $A'B' = a$, $FG = A$, $B'C' = b$, $GH = B$, $C'D' = c$, $HE = C$, $D'A' = d$ und $EF = D$, sowie der Abstand je zweier parallelen Seiten des inneren und äußeren Viereckes in derselben Ordnung genommen α, β, γ und δ, dann ist, wie leicht einzusehen:

1) der Inhalt des inneren Prisma's $ABCDD'A'B'C' = g \,.\, H$,

2) die Summe der Inhalte der vier dreiseitigen Prismen

$$= \frac{a\alpha H}{2} + \frac{b\beta H}{2} + \frac{c\gamma H}{2} + \frac{d\delta H}{2},$$

3) die Summe der Inhalte der vier dreiseitigen Pyramiden

$$= \frac{(A - a)\,\alpha H}{6} + \frac{(B - b)\,\beta H}{6} + \frac{(C - c)\,\gamma H}{6} + \frac{(D - d)\,\delta H}{6}.$$

Man hat also:

$$1)\quad V = gH + \frac{a\alpha H}{2} + \frac{b\beta H}{2} + \frac{c\gamma H}{2} + \frac{d\delta H}{2} + \frac{(A - a)\,\alpha H}{6}$$

$$+ \frac{(B - b)\,\beta H}{6} + \frac{(C - c)\,\gamma H}{6} + \frac{(D - d)\,\delta H}{6} =$$

$$\frac{H}{6}[6g + 3\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) + (A - a)\,\alpha + (B - b)\,\beta$$

$$+ (C - c)\,\gamma + (D - d)\,\delta] =$$

$$\frac{H}{6}[6g + 2(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) + A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta] =$$

$$\frac{H}{6}[6g + (A + 2a)\alpha + (B + 2b)\beta + (C + 2c)\gamma + (D + 2d)\delta].$$

Ist die Normalprojection von FGHE auf die Ebene von ABCD, nämlich F'G'H'E' bestimmt worden, so leuchtet bald ein, daß vom Inhalte desjenigen Prisma's, welchem diese beiden Flächen als Grundflächen zukommen, obige dreiseitige Prismen und das Doppelte jener Pyramiden abgezogen werden müssen, um den Inhalt des Polyeders zu erhalten.

Hiernach ergiebt sich:

$$2)\quad V = GH - \left[\frac{a\alpha H}{2} + \frac{b\beta H}{2} + \frac{c\gamma H}{2} + \frac{d\delta H}{2} + \frac{(A - a)\alpha H}{6} + \frac{(B - b)\beta H}{6} + \frac{(C - c)\gamma H}{6} + \frac{(D - d)\delta H}{6}\right] =$$

$$\frac{H}{6}[6G - (2A + a)\alpha - (2B + b)\beta - (2C + c)\gamma - (2D + d)\delta],$$

und durch Addition der Gleichungen 1 und 2:

$$3)\quad V = \frac{H}{2}\left[G + g - \frac{(A - a)\alpha + (B - b)\beta + (C - c)\gamma + (D - d)\delta}{6}\right],$$

so daß man nun zur Inhaltsbestimmung des zwei parallele vierseitige Gegenflächen enthaltenden Polyeders unter drei Formeln die Auswahl hat, und in dieser Bestimmungsmethode den Weg zur Inhaltsbestimmung solcher unregelmäßigen Polyeder angebahnt findet, welche zwei parallele Flächen von anderer Seitenzahl enthalten.

Durch Einführung besonderer Voraussetzungen in obige Formeln ergeben sich Werthe für die Inhalte von Körpern, welche in Wirklichkeit oft vorzukommen pflegen. Besonders trifft man häufig Körper an, bei welchen die beiden Parallelflächen Rechtecke sind oder eine derselben, z. B. die obere zu einer bloßen Kante, also $g = 0$ geworden ist, u. dgl.

Für erstere Voraussetzung ist:

$$G = A \,.\, B$$

$$g = a \,.\, b$$

$$A = C,\ B = D$$

$$a = c,\ b = d$$

$$A - a = \beta + \delta,\ B - b = \alpha + \gamma,$$

daher nach 3 das Volumen eines solchen Körpers:

$$4)\quad V' = \frac{H}{2}\left[A \,.\, B + a \,.\, b - \frac{(A - a)\,(B - b)}{3}\right].$$

Für letztere sei $a = 0$, dann folgt aus 4:

$$5)\quad V'' = \frac{H}{2}\left[AB - \frac{A\,(B - b)}{3}\right]$$

$$= \frac{AH}{6}(2B + b);$$

welche Formeln, da sie die Größen α, β, γ und δ ausschließen, für unzählig viele dergartige Körper zugleich gelten, sobald diesen nur einerlei Höhe zukommt und die parallelen Gegenflächen Rechtecke von einerlei Dimensionen A, B, a, b sind.

Beispiel. Ein dammartiger Körper Fig. 248 habe $EF = HG = B = 100$ Ellen untere, und $DA = CB = b = 80$ Ellen obere Länge; $EK = FG = A = 30$ Ellen untere, und $DC = AB = a = 8$ Ellen obere Breite, und seine Höhe $DN = CP$ betrage 20 Ellen, dann ist nach 4 dessen Inhalt:

$$V' = \frac{20}{2}\left[30 \,.\, 100 + 8 \,.\, 80 - \frac{(30 - 8)\,(100 - 80)}{3}\right]$$

$$= 34933{,}33\ldots \text{ Kubikellen.}$$

Beispiel 2. Bei einem anderen Körper dieser Art sei die obere Fläche zu einer bloßen geraden Linie RS geworden, derselbe habe also die Gestalt eines Keiles angenommen. Directes Messen habe gegeben: $FG = EH = A = 6$, $EF = HG = B = 12$, $RS = b = 7$, und die Höhe $RS = H$ des Keiles $= 10$ Zoll, dann ist nach 5 dessen Volumen:

$$V'' = \frac{6 \,.\, 10}{6}(2 \,.\, 12 + 7) = 310 \text{ Kubikzoll.}$$

Anmerkung. Dämme und Terraineinschnitte, wie sie bei Anlage von Straßen, z. B. Eisenbahnen, vorkommen, werden berechnet, indem man sich solche durch Verticalebenen, welche entweder gleiche oder verschiedene Entfernungen haben, von 100 zu 100 Ellen durchschnitten denkt, und nun den Damm- oder Einschnittraum zwischen je zwei benachbarten Verticalebenen als ein Prisma ansieht, welches den Abstand dieser Ebenen zur Länge und das arithmetische Mittel der Inhaltszahlen der Durchschnittsflächen oder Querprofile zur Grundfläche hat. Hierdurch ergeben sich allerdings nur Annäherungswerthe für dergleichen Körperformen, welche jedoch von der Wahrheit um so weniger

abweichen werden, je näher an einander die Querprofile angenommen wurden, daher wir hier auf die Entwickelung solcher Formeln, durch welche jene Inhalte noch genauer zu bestimmen sind, nicht eingehen wollen.

§. 232.

Unregelmäßige Körper von krummen Oberflächen.

Kleine Körper dieser Art pflegt man in regelmäßige Gefäße zu legen, worin sich Wasser befindet, und zuzusehen, wie viel desselben sie verdrängen; oder die Dichte und das absolute Gewicht derselben zu bestimmen, und daraus durch Rechnung das Volumen zu finden, nach der Formel:

$$V = \frac{P}{g \,.\, \gamma}$$

worin P das absolute Gewicht des Körpers bedeutet, g dessen Dichte und γ das Gewicht einer Kubikeinheit reinen Wassers. Den Untersuchungen Hällström's gemäß wiegt ein sächsischer Kubikfuß reines Wasser im luftleeren Raume bei 15° R. 48,535 Leipziger Pfund. Gewöhnlich setzt man dieses Gewicht $\gamma = 48{,}883$ Leipz. Pfd.

Beispiel. Wiegt eine Statue aus Gußeisen, dessen Dichte 7,2 ist, 790 Leipziger Pfund, so ist deren Volumen

$$V = \frac{790}{7{,}2 \,.\, 48{,}883} = 2{,}244\,..\text{ Kubikfuß.}$$

Größere Körper, deren Volumen weder auf die eine noch auf die andere Weise zu ermitteln ist, zerlegt man in Gedanken in mehr oder weniger Zonen oder Elementarkörper, berechnet solche als Cylinder oder abgestumpfte Kegel und setzt die Summe ihrer Inhalte dem geforderten Inhalte des Körpers gleich. Dieses Verfahren bedingt, daß alle wesentlichen Dimensionen eines jeden Elementarkörpers durch directe Messung bestimmt und nach Befinden mittelst derselben graphische Darstellungen der Körperform nach verjüngtem Maße entworfen werden.

§. 233.

Unregelmäßige Körper von ebenen und krummen Oberflächen.

Sie sind die im Großen am häufigsten vorkommenden, und wir begegnen denselben bei den meisten Bauprojecten, z. B. wenn es sich um die Abtragung eines Hügels oder Ausfüllung einer Vertiefung u. dgl. handelt; auch die Inhaltsbestimmung von Teichräumen gehört hierher. Das Verfahren ist bei allen diesen Körperformen in der Hauptsache übereinstimmend, indem man solche durch

Einführung von Horizontalebenen, — deren Einschnitte mit der Terrainoberfläche mittelst eines Nivellirinstrumentes bestimmt und gewöhnlich unter Gebrauch des Meßtisches graphisch dargestellt werden — in einzelne Zonen zerlegt und eine jede derselben als ein Prisma berechnet, welches das arithmetische Mittel beider horizontalen Schnittflächen zur Grundfläche und deren Abstand zur Höhe hat; oder als eine abgestumpfte Pyramide für den Fall, daß beide Flächeninhalte beträchtlich von einander abweichen. Die hierbei einschlagende Praxis ist aus den im Vorangehenden dargelegten Meßtisch- und Nivelliroperationen zu ersehen, und es reichen jene Andeutungen zu ihrer Anwendung völlig hin. Unter Anderm ist eine sehr zu empfehlende, in ihren Hauptumrissen mit dem angemerkten allgemeinen Verfahren übereinstimmende Methode der Inhaltsbestimmung von Teichen nach Prof. Weisbach durch Röting im Ingenieur, erster Band, erstes Heft, ausführlich beschrieben worden.

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

Berichtigungen.

Seite 10 Zeile 1 v. u. Maße, statt Ma.
= 21 = 15 u. 16 Fig. 11, statt Fig. 12.
= 38 = 12 v. u. AC = CD = DE = EB, statt Ab = bc = cd = dB, sowie in der nächstfolgenden Zeile CF, DK und EL, statt be, ch und dg.
= 38 = 7 u. 8 v. u. bezüglich CE, D, DG und DK, statt bd, c, cf und ch.
= 151 = 16 v. u. 130b, statt 130.

Staatl. Bibliothek Passau

Fig. 1.

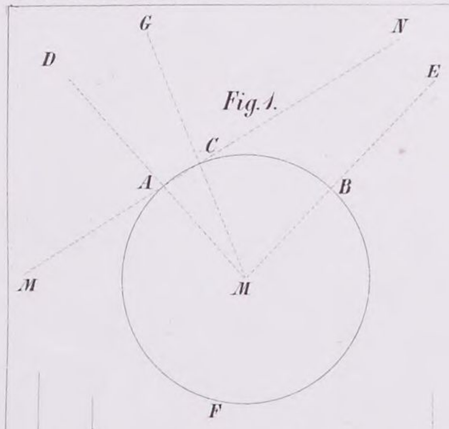


Fig. 2.

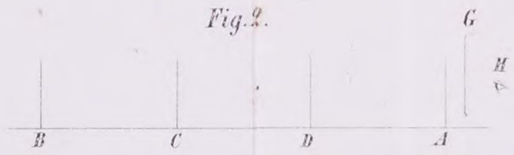


Fig. 3.

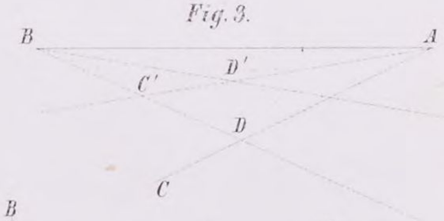


Fig. 4.

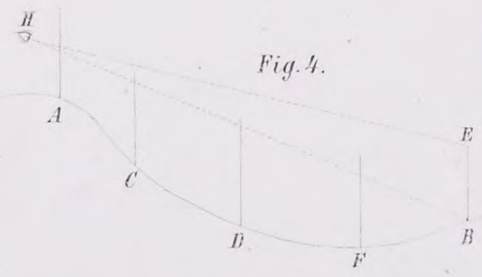


Fig. 5.

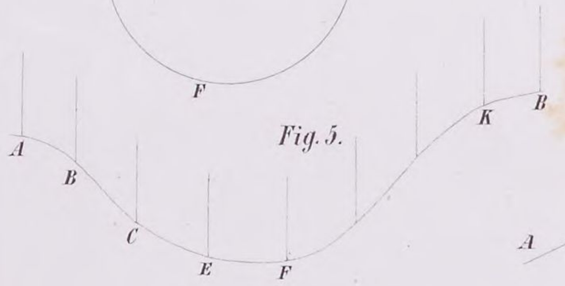


Fig. 6.

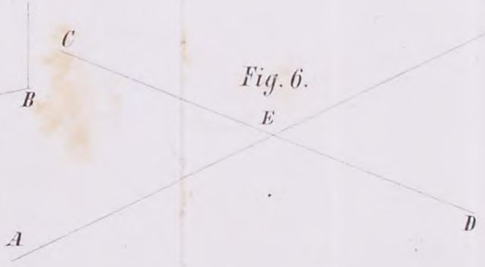


Fig. 7.

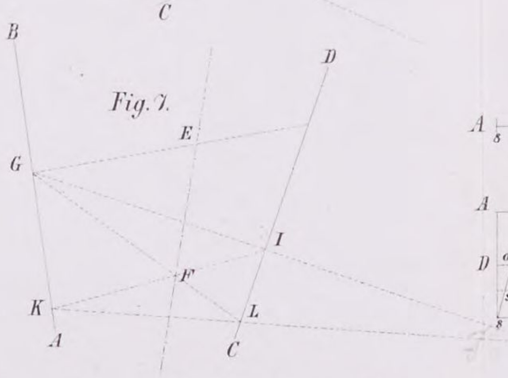


Fig. 8.

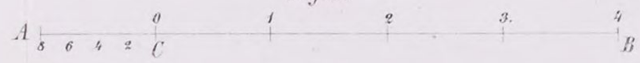


Fig. 9.

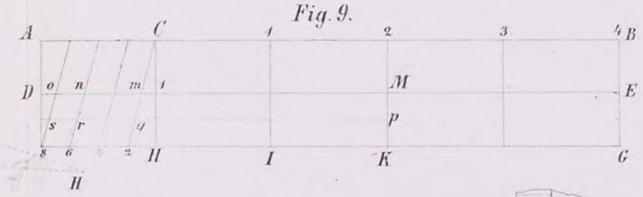


Fig. 10.

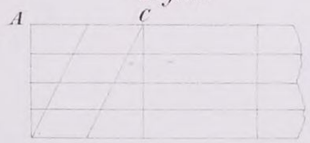


Fig. 11.

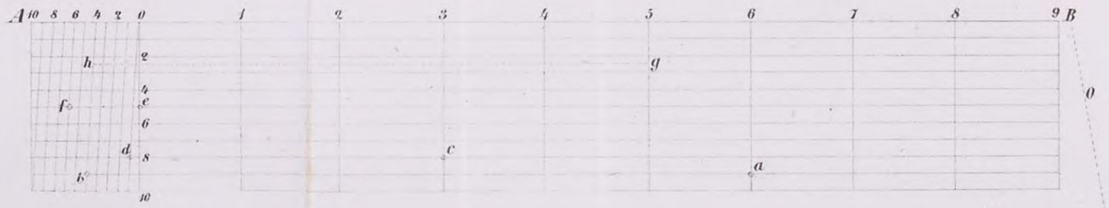


Fig. 12.

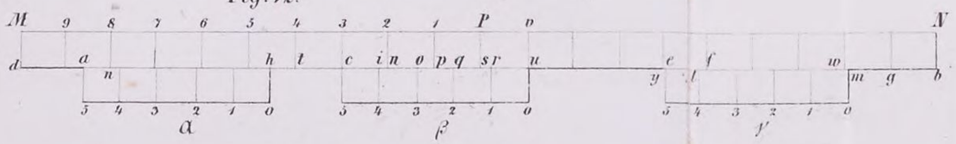


Fig. 13.

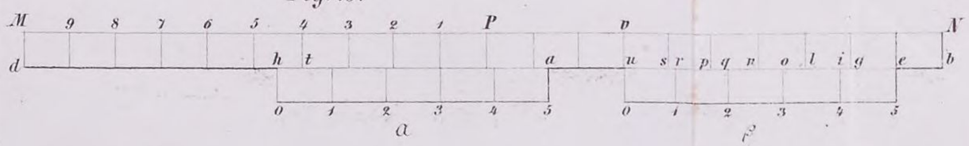


Fig. 14.

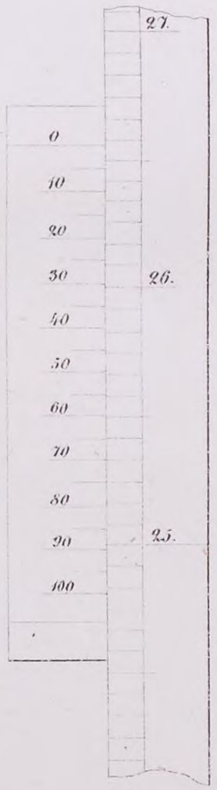


Fig. 15.

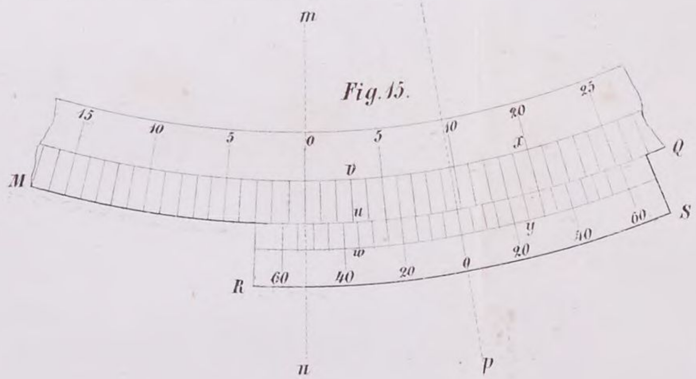


Fig. 16.

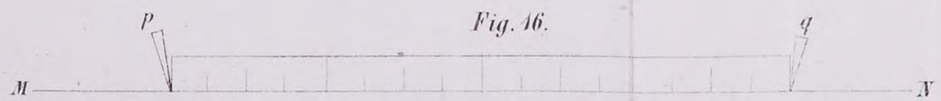


Fig. 17.

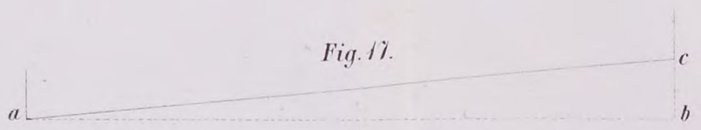


Fig. 18.

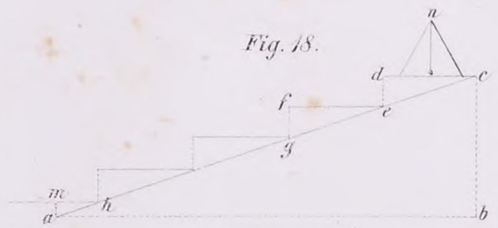


Fig. 19.

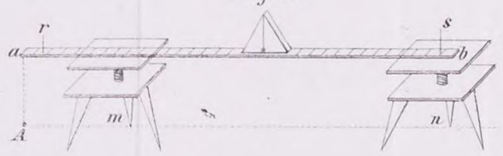


Fig. 20.

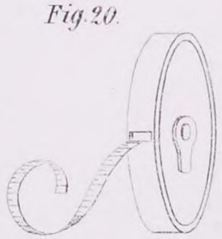


Fig. 22. Fig. 23.

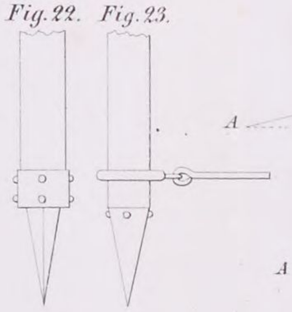


Fig. 24.

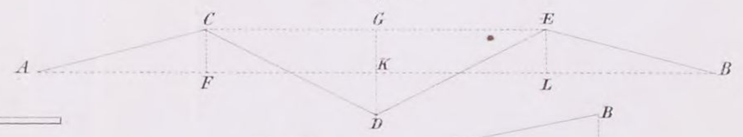


Fig. 25.

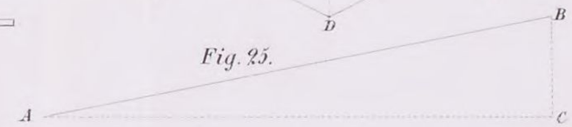


Fig. 21.

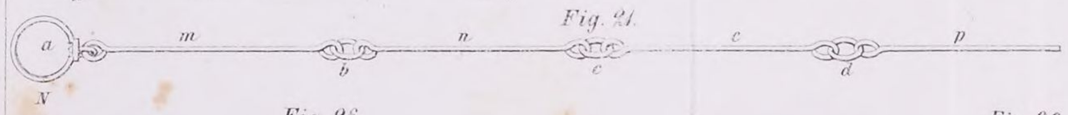


Fig. 26.

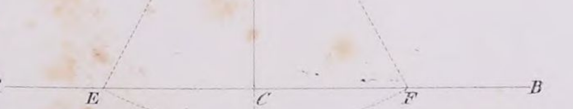


Fig. 29.

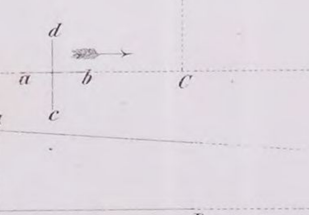


Fig. 31

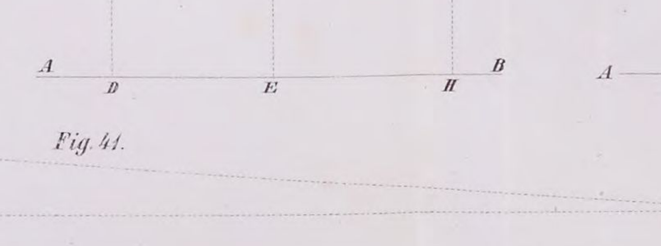


Fig. 32.

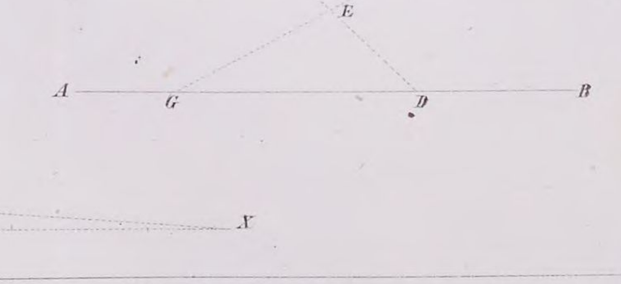


Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 30.

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 35.

Fig. 38.

Fig. 39.

Fig. 40.

Fig. 41.

Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.

Fig. 42.

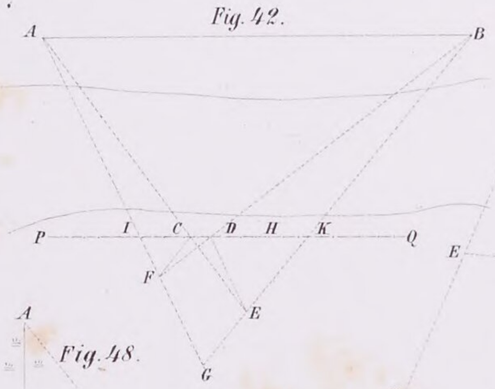


Fig. 43.

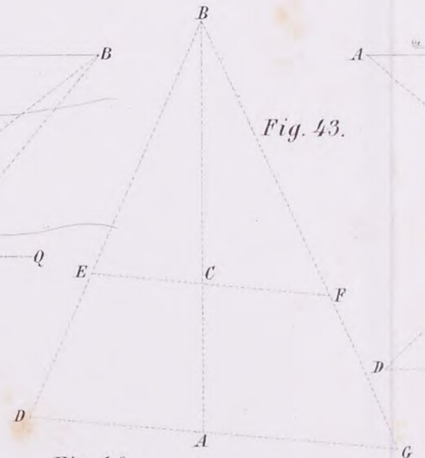


Fig. 44.

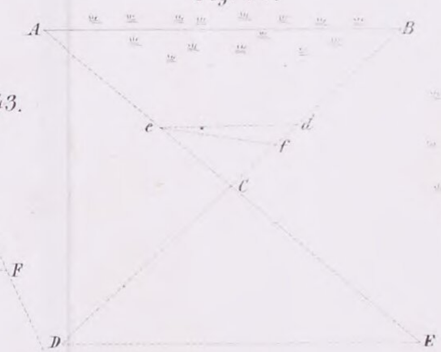


Fig. 45.

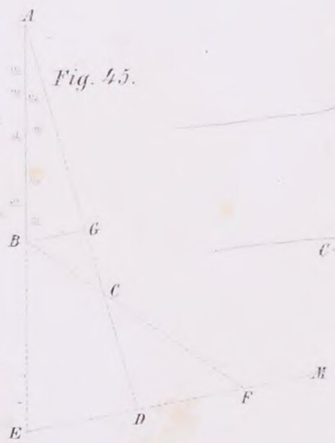


Fig. 46.

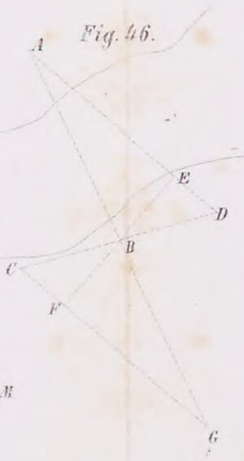


Fig. 47.

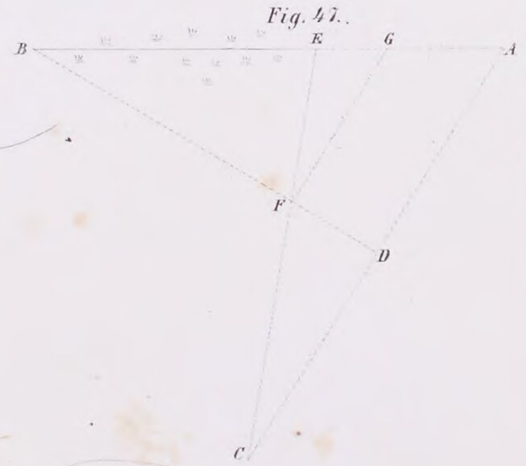


Fig. 48.

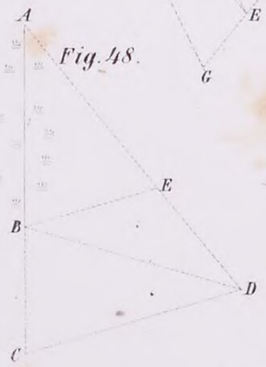


Fig. 49.

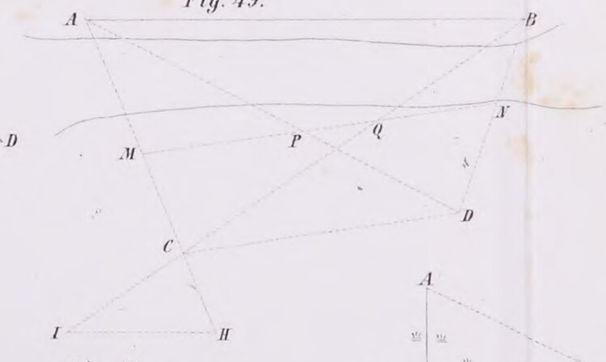


Fig. 50.

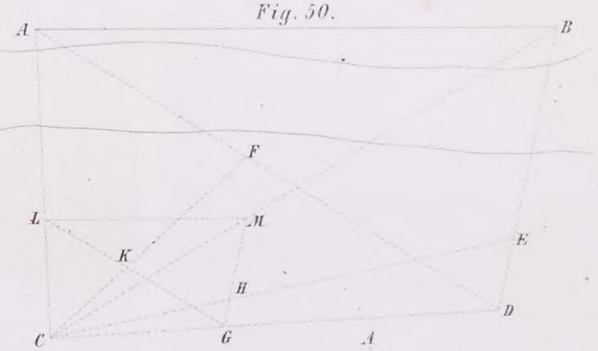


Fig. 51.

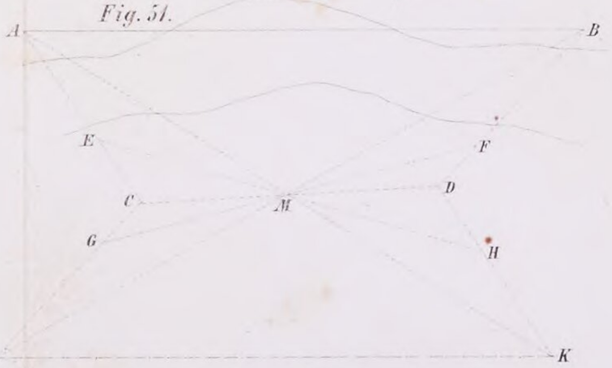


Fig. 52.

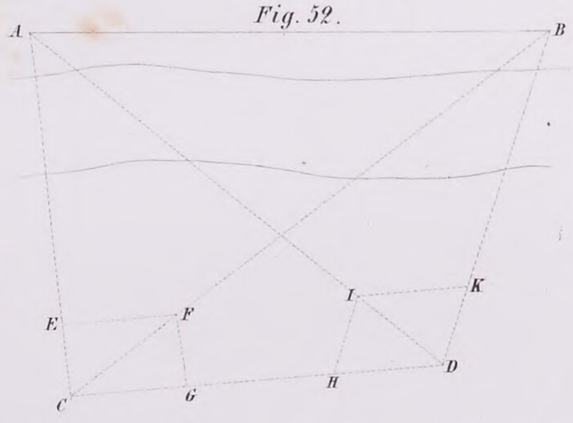


Fig. 53.

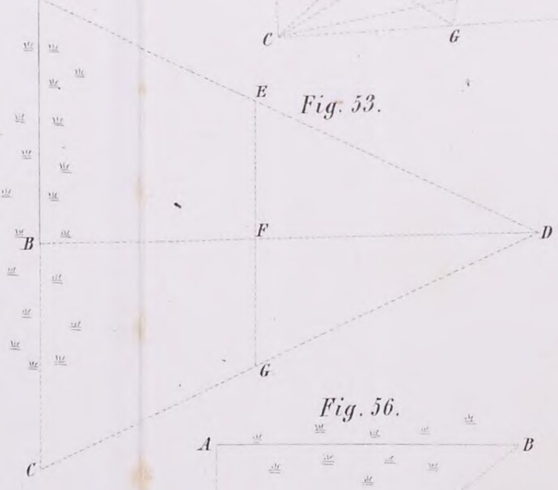


Fig. 54.

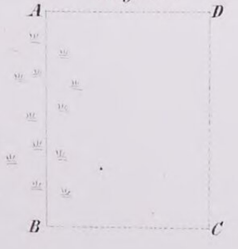


Fig. 55.

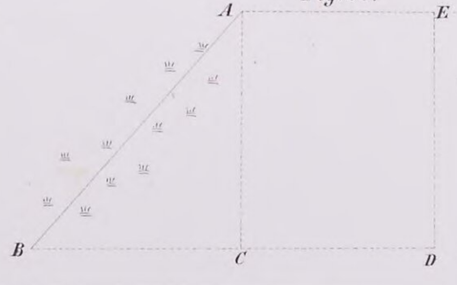


Fig. 56.

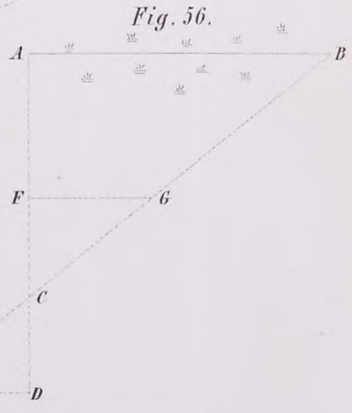


Fig. 57.

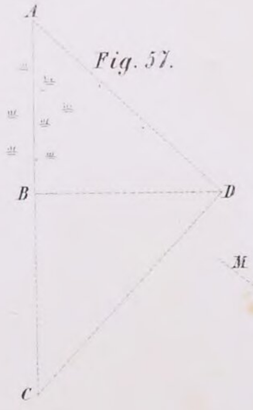


Fig. 58.

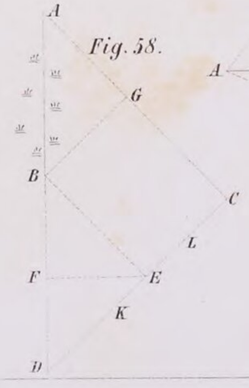


Fig. 59.

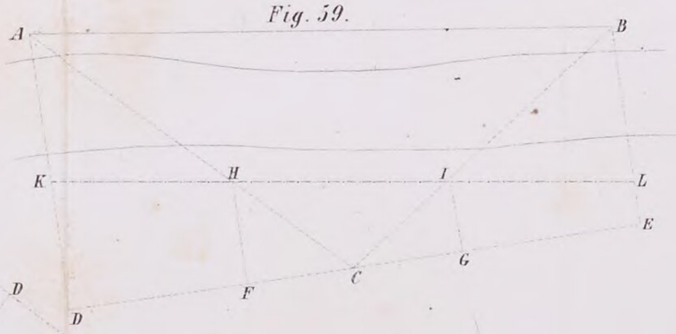


Fig. 60.

Fig. 61.

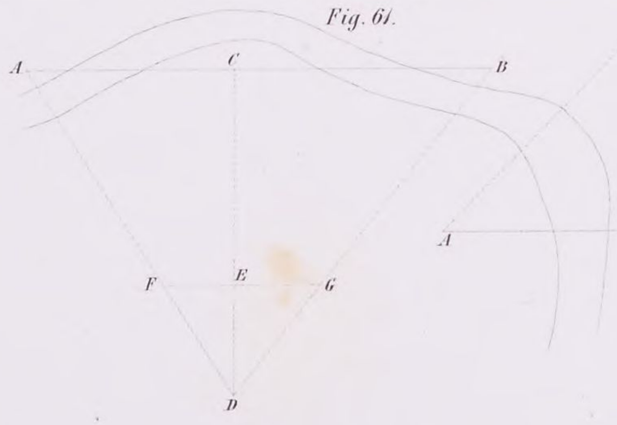


Fig. 62.

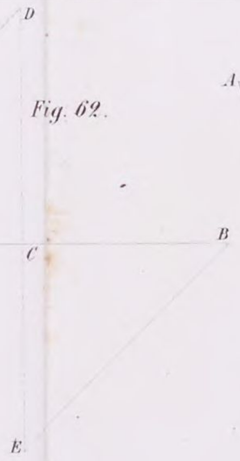


Fig. 63.

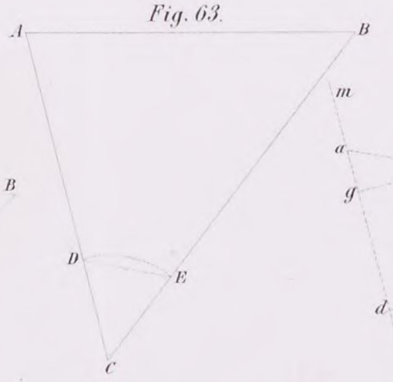


Fig. 64.

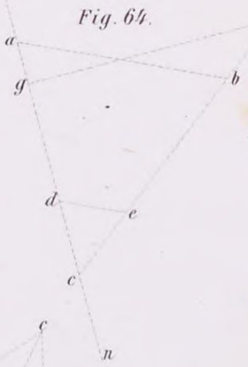


Fig. 65.

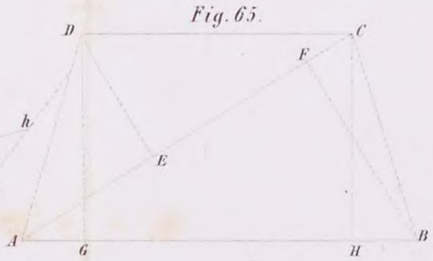


Fig. 66

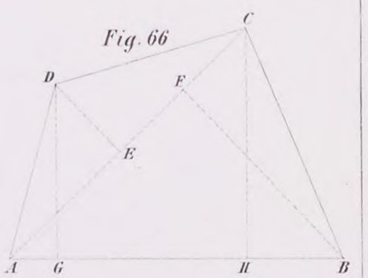


Fig. 67.

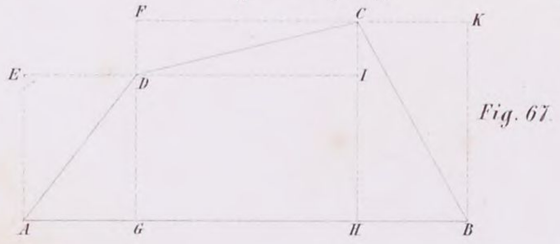


Fig. 68.

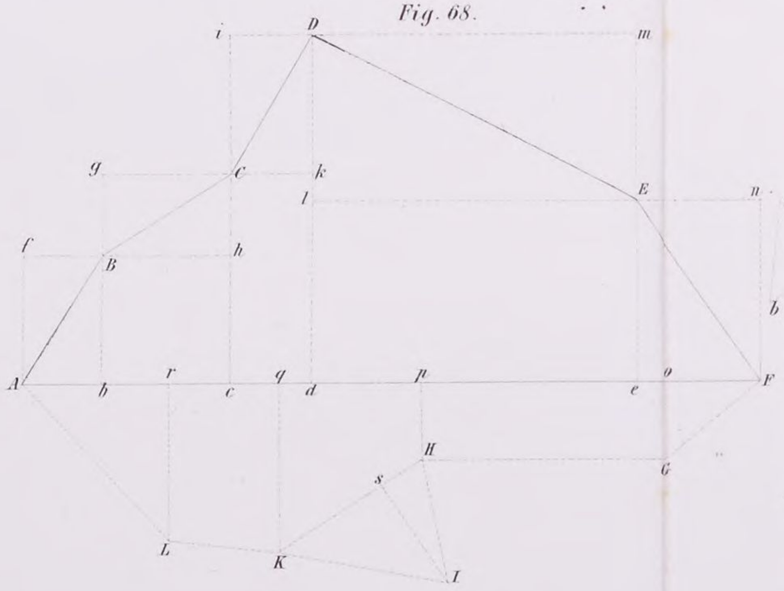


Fig. 69.

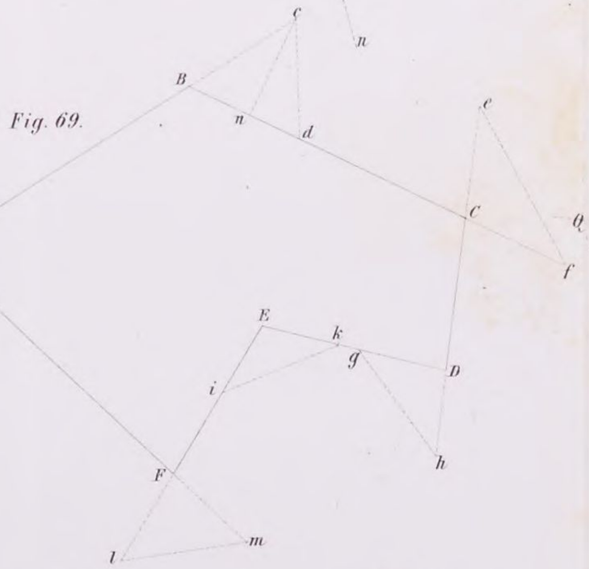


Fig. 70.

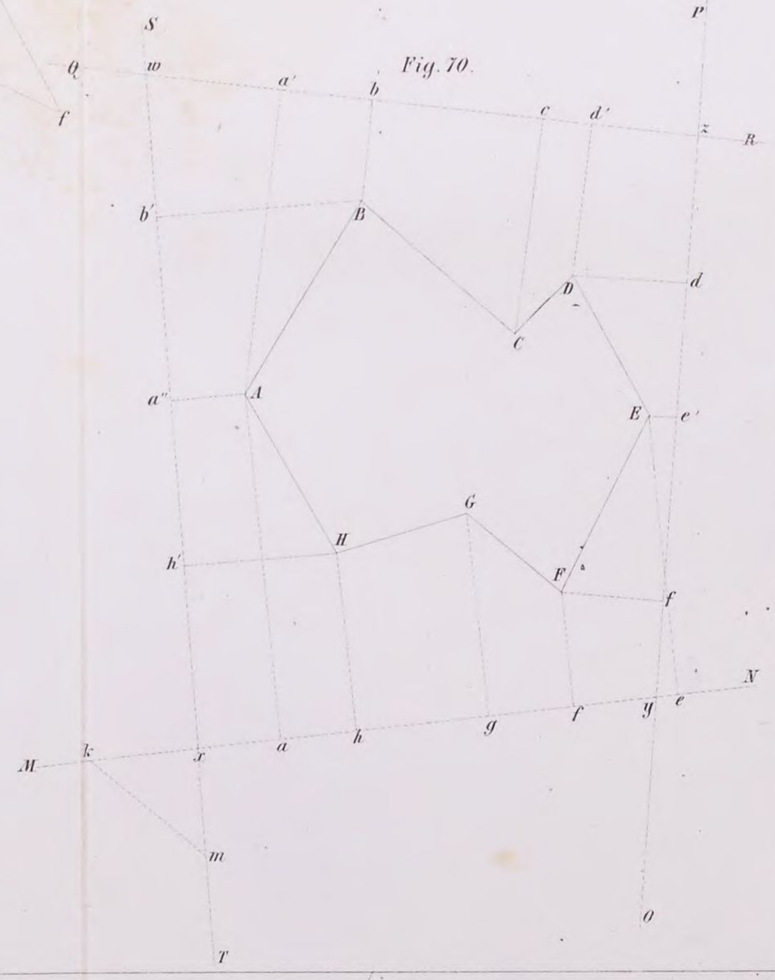


Fig. 71.

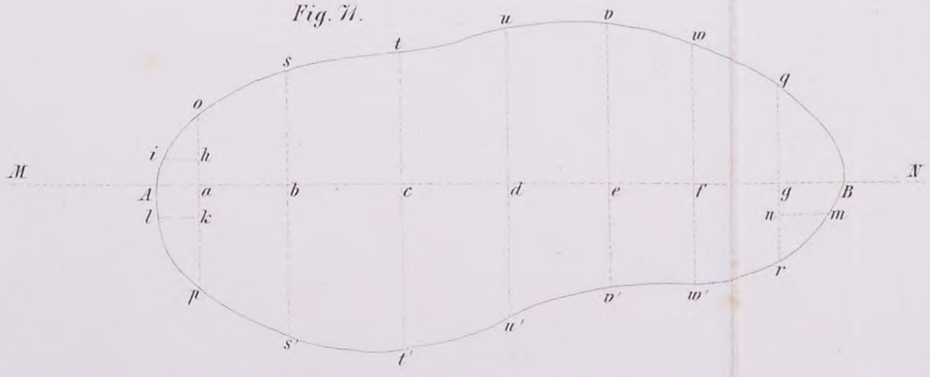


Fig. 72.

Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.

Fig. 75.

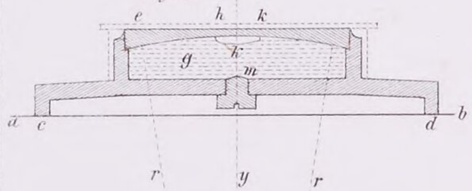


Fig. 77.

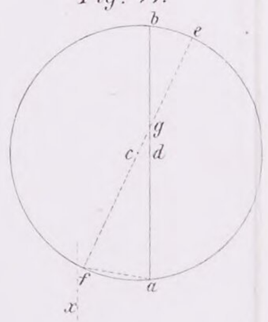


Fig. 78.

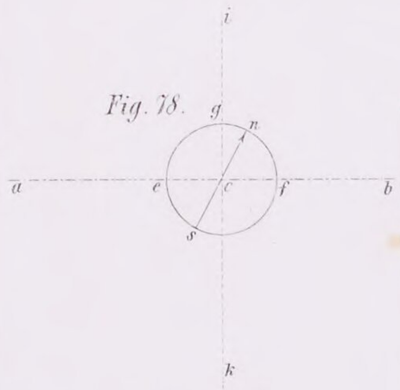


Fig. 74.

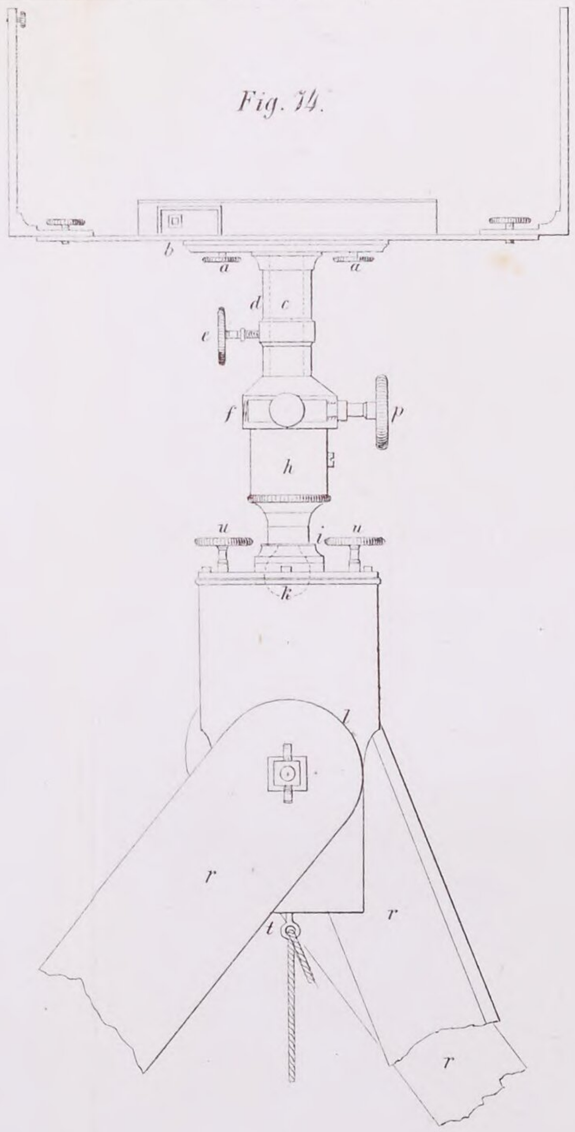


Fig. 76.

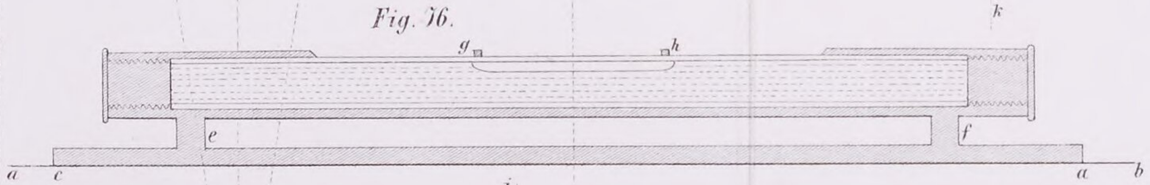
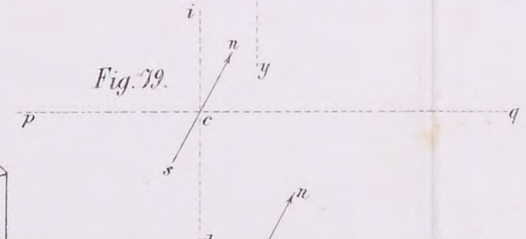


Fig. 79.



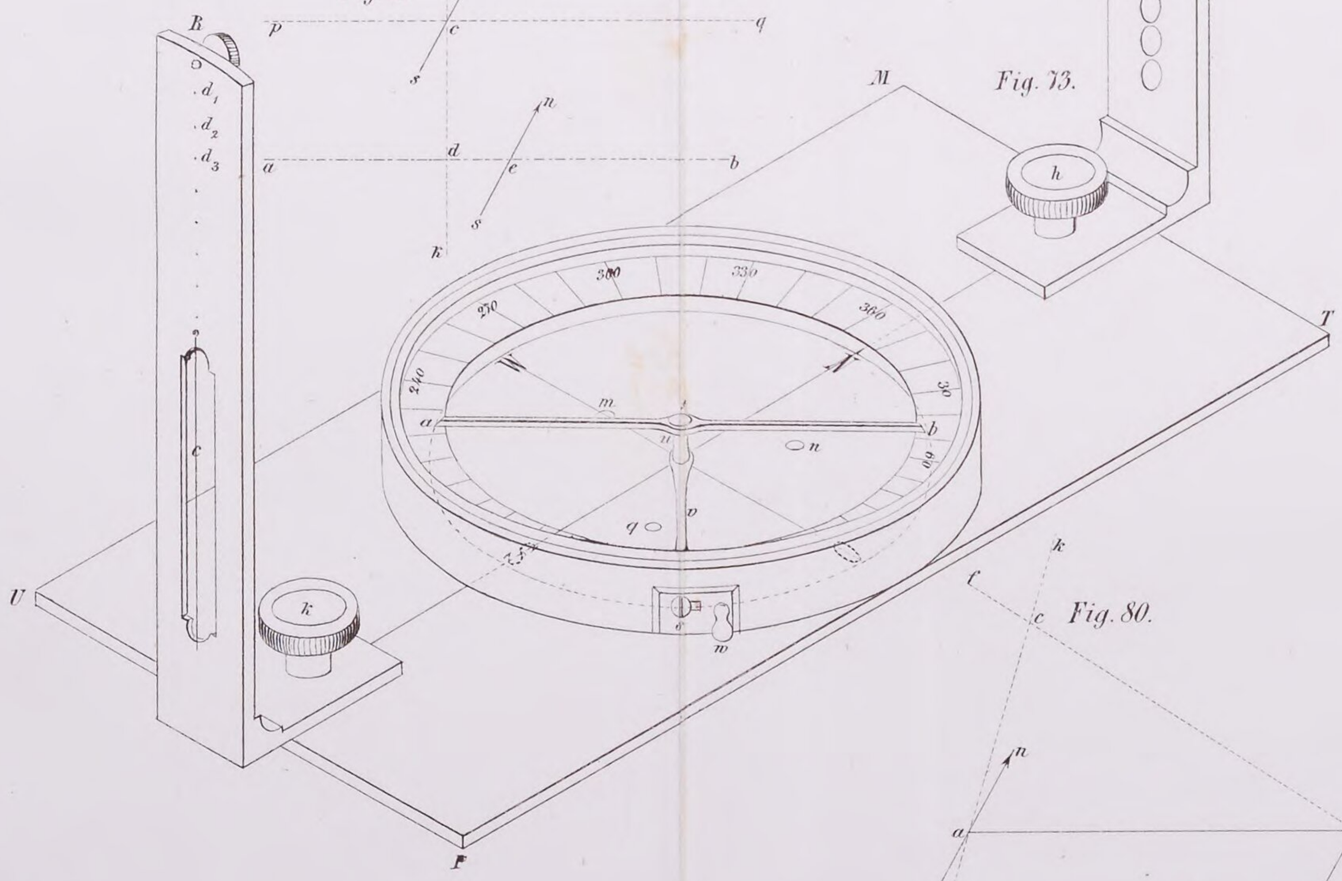


Fig. 73.

Fig. 80.

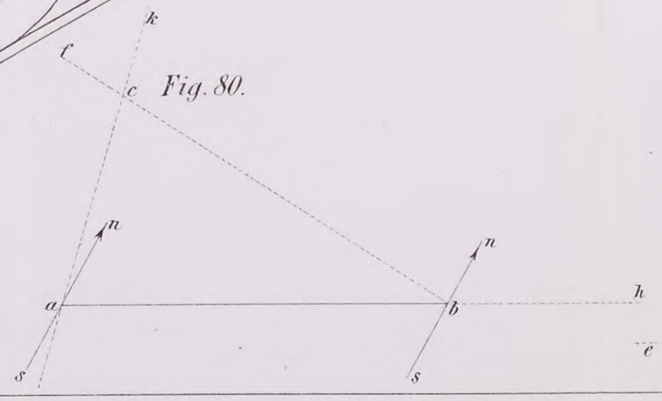
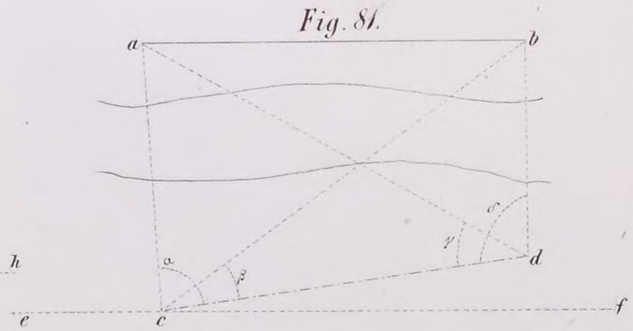


Fig. 81.



Lith. Anst. v. J. G. Bach in Leipzig.

Leuner gez.

Fig. 84.

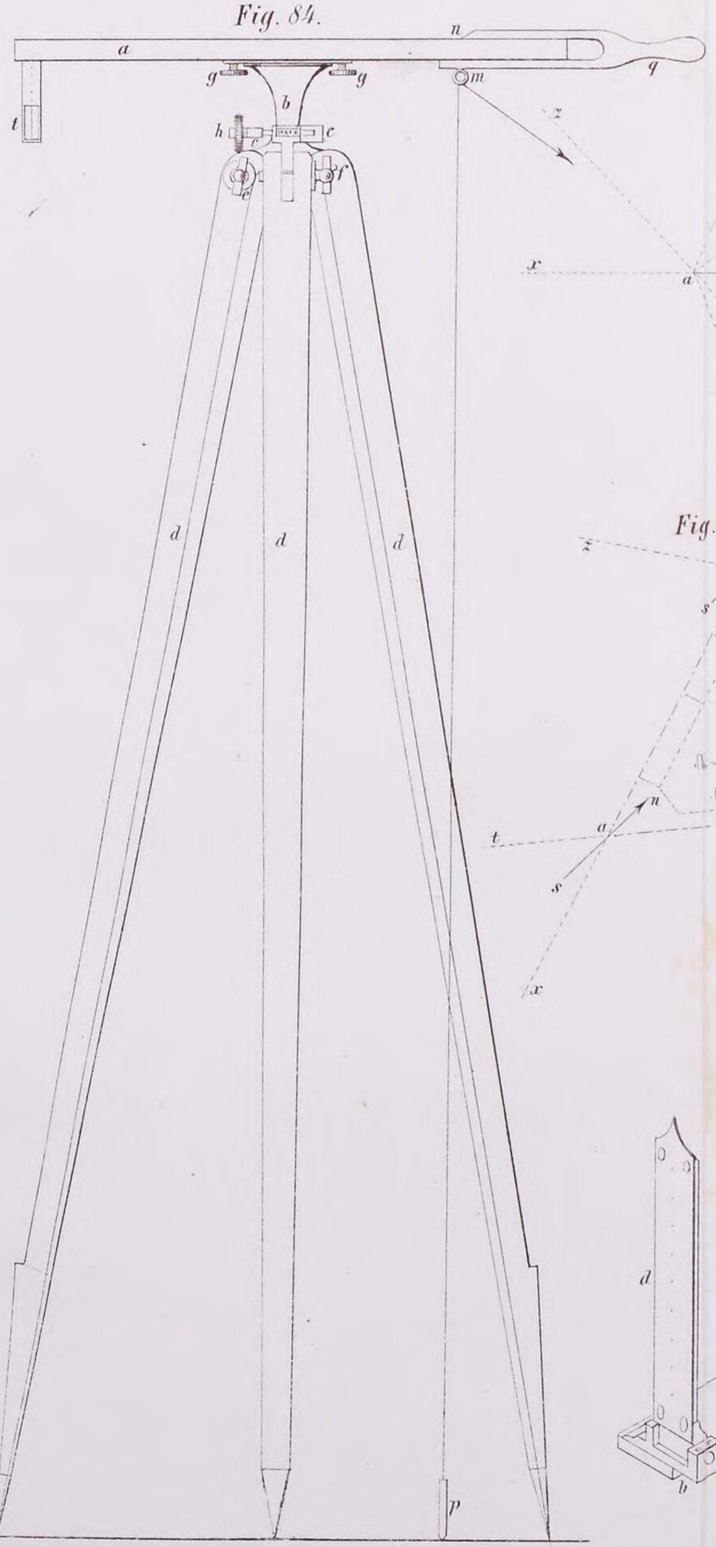


Fig. 82.

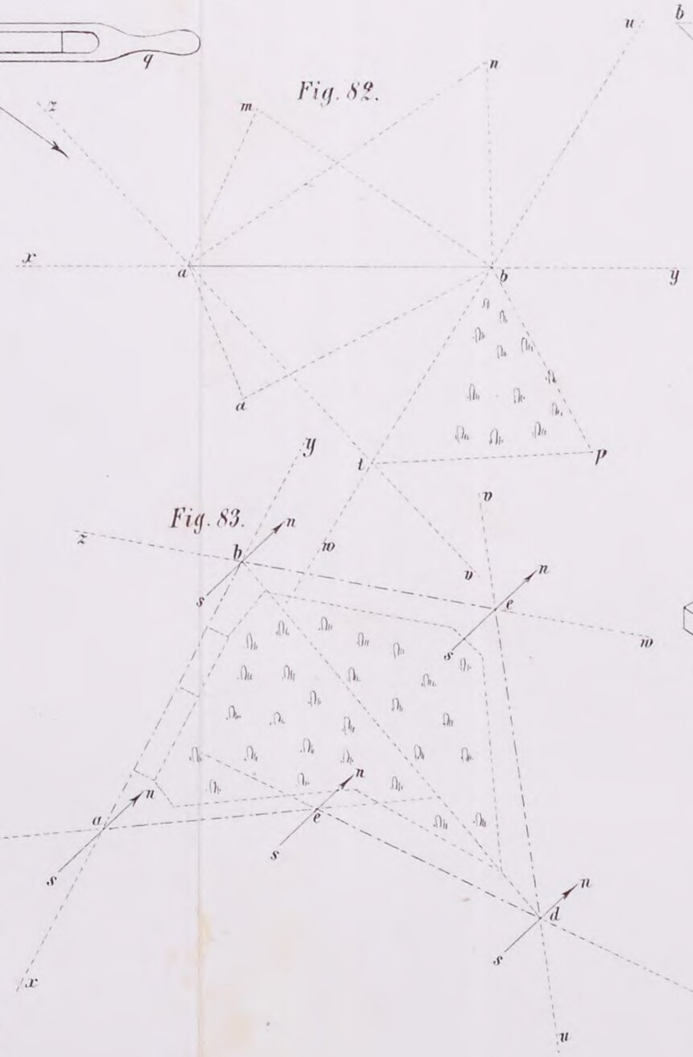


Fig. 83.

Fig. 85.

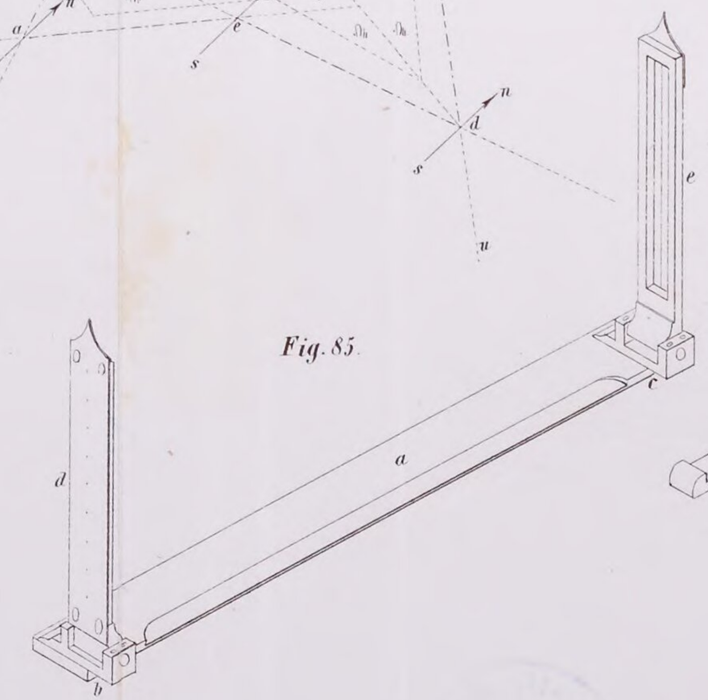


Fig. 86.

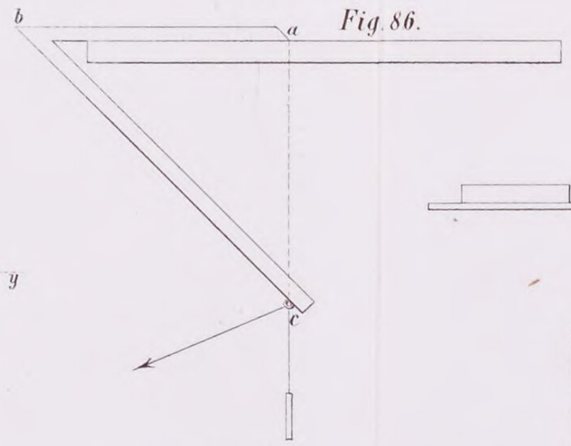


Fig. 87.

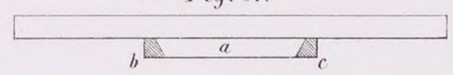


Fig. 88. a

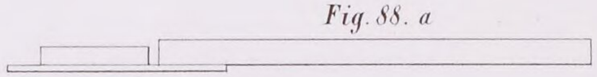


Fig. 88. b.

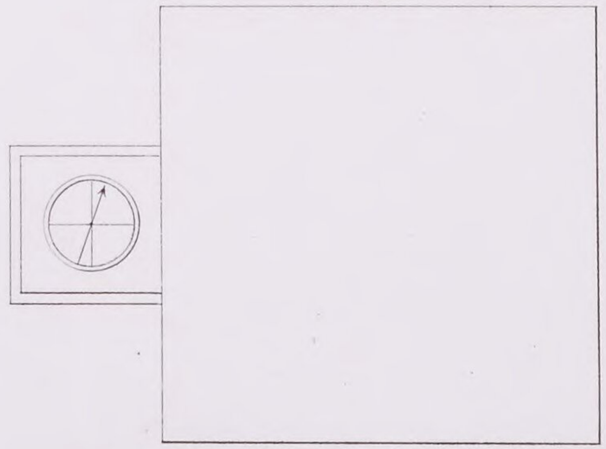


Fig. 90.

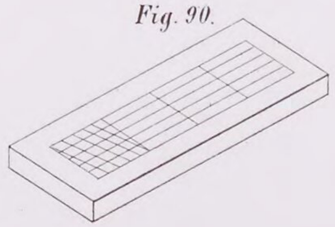
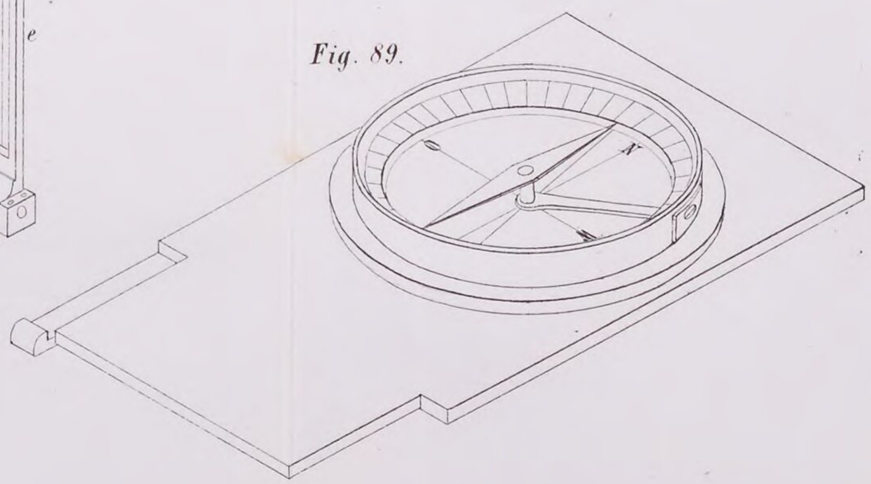


Fig. 89.



Lith. Anst. v. J. G. Bach in Leipzig.

Fig. 91.

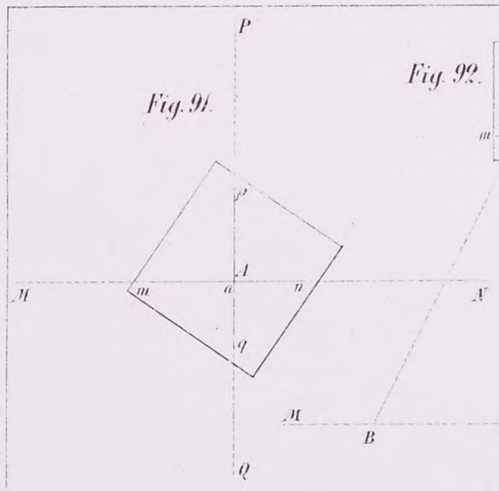


Fig. 92.

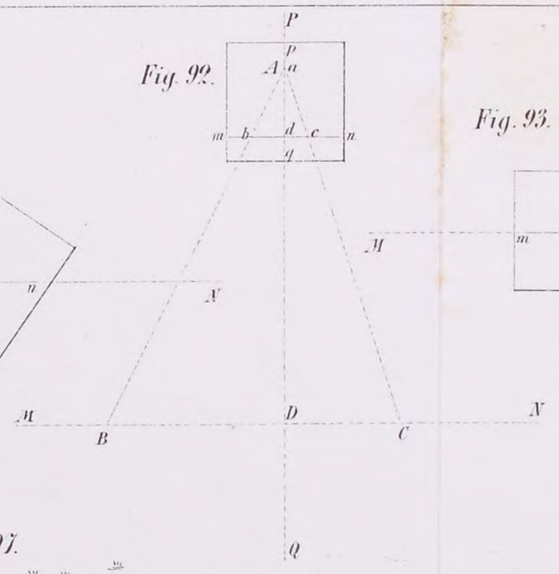


Fig. 93.

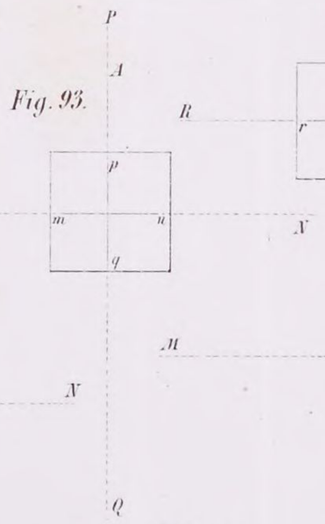


Fig. 94.

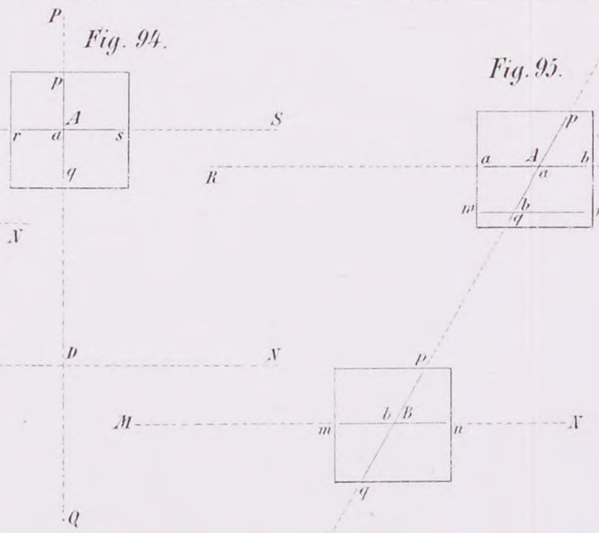


Fig. 95.

Fig. 96.

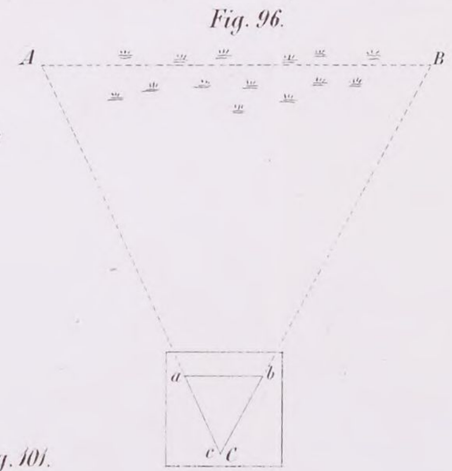


Fig. 97.

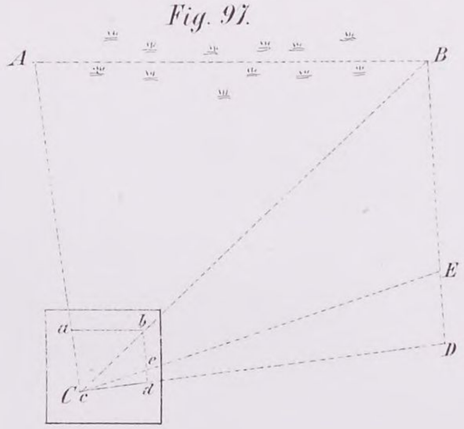


Fig. 98.

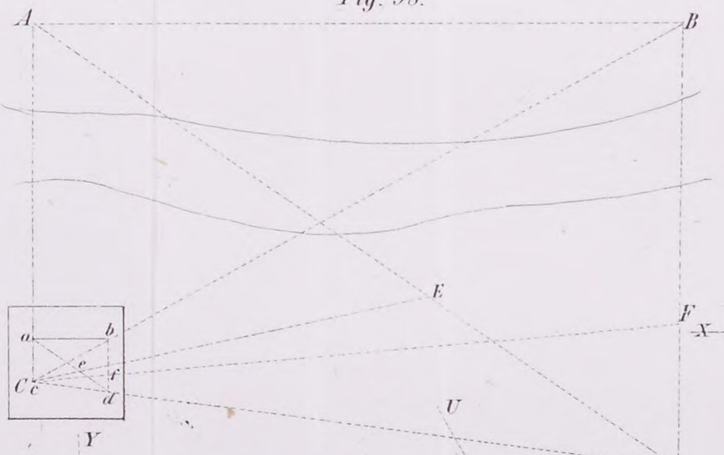


Fig. 99.

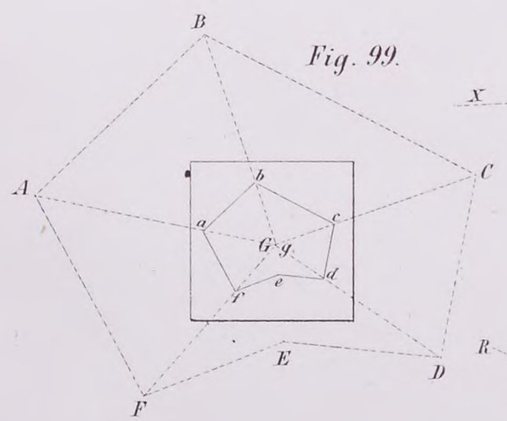


Fig. 100.

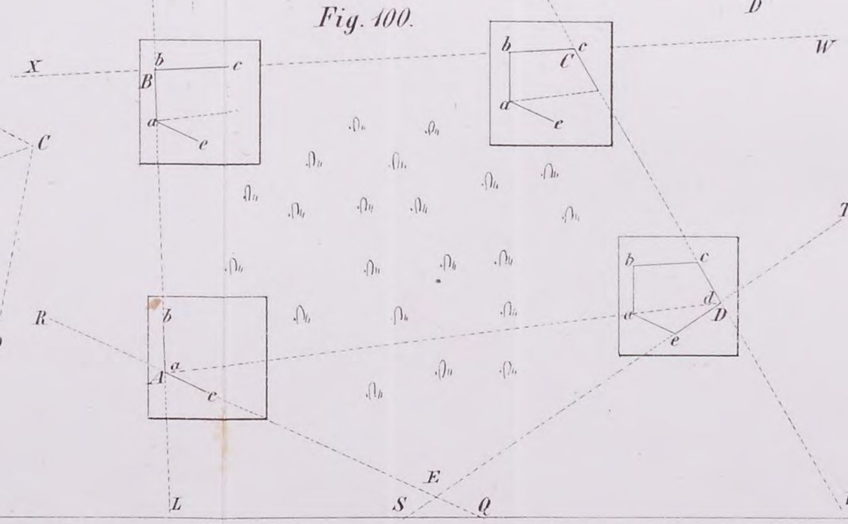
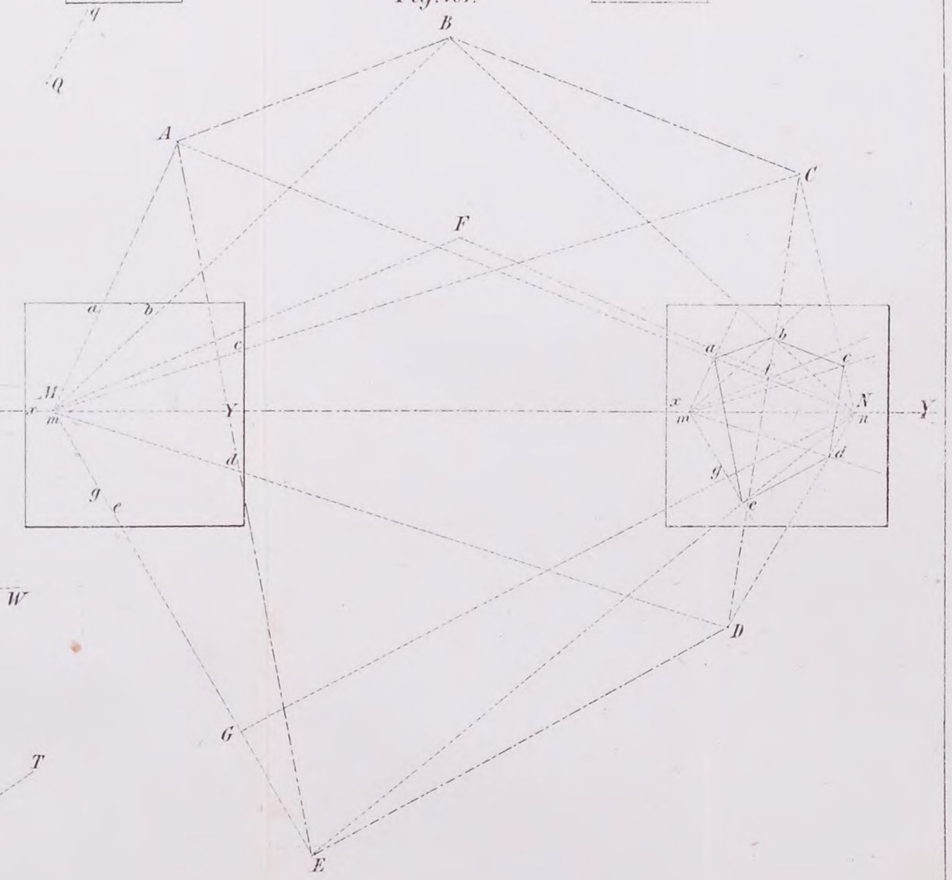


Fig. 101.



Lith. Anst. v. J.G. Bach in Leipzig.

Zeuner gez.

Fig. 102.

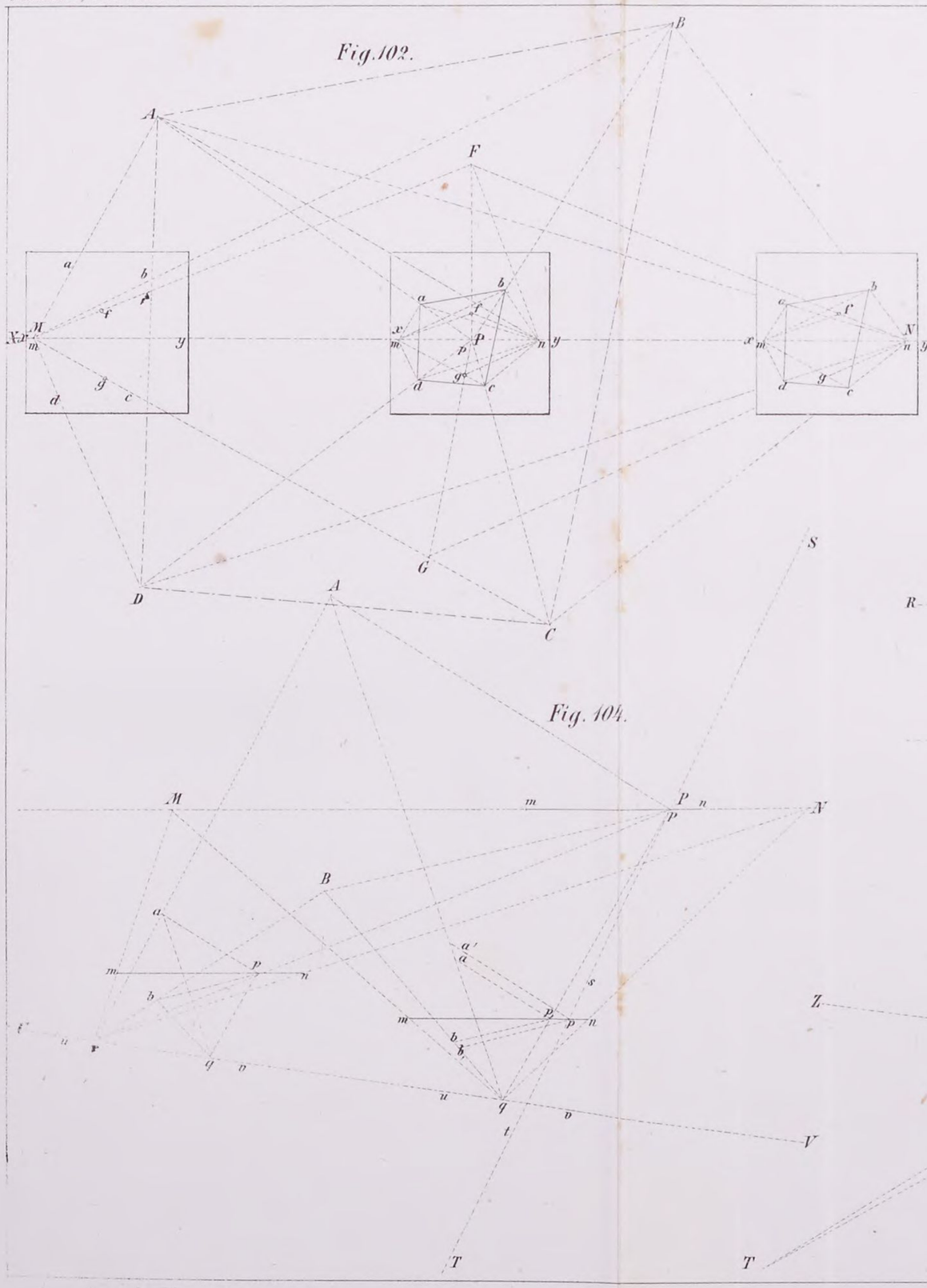


Fig. 103.

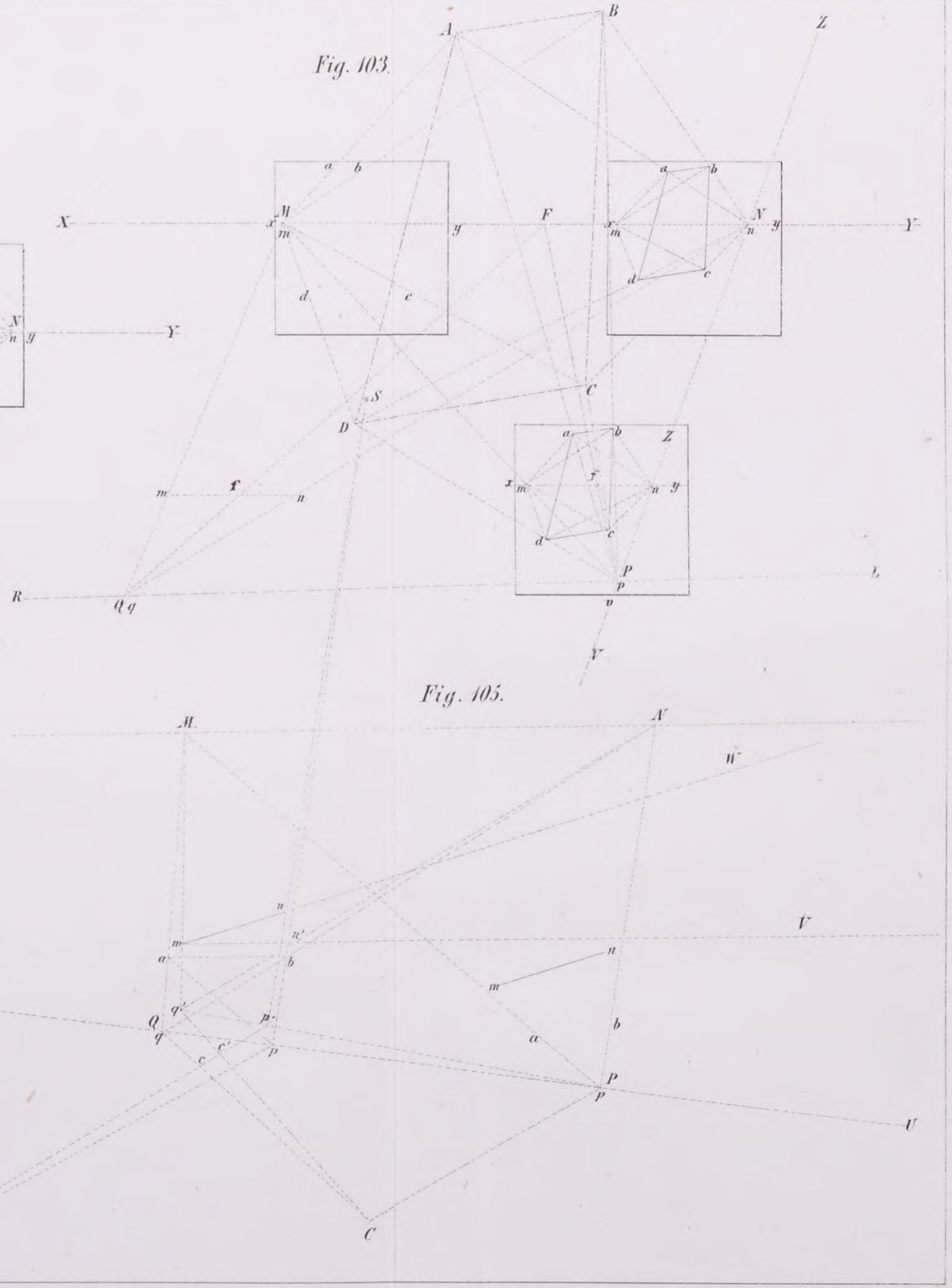


Fig. 104.

Fig. 105.

Fig. 106.

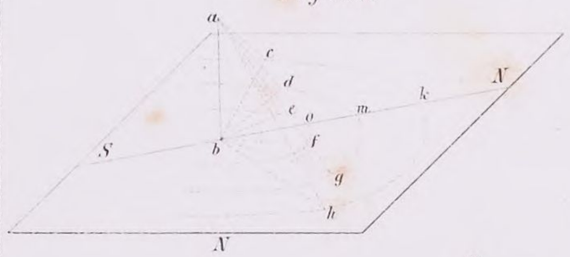


Fig. 107.

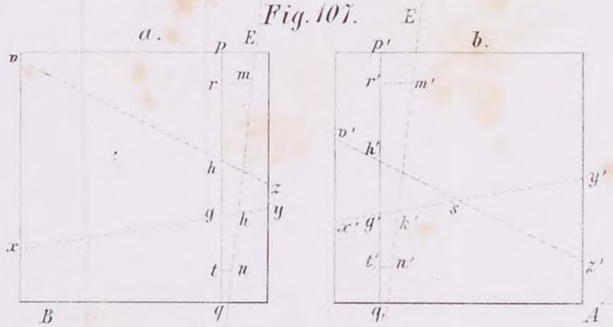


Fig. 108.

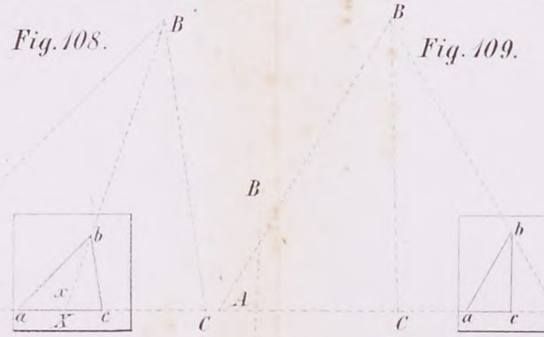


Fig. 109.

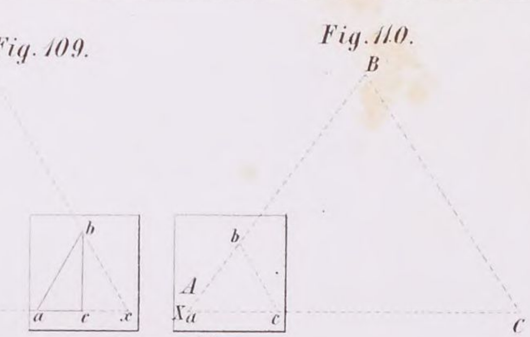


Fig. 110.

Fig. 111.

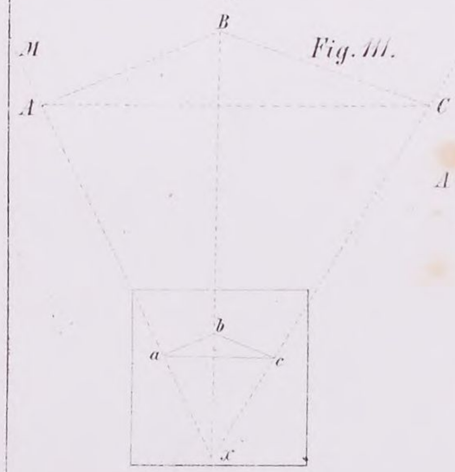


Fig. 112.

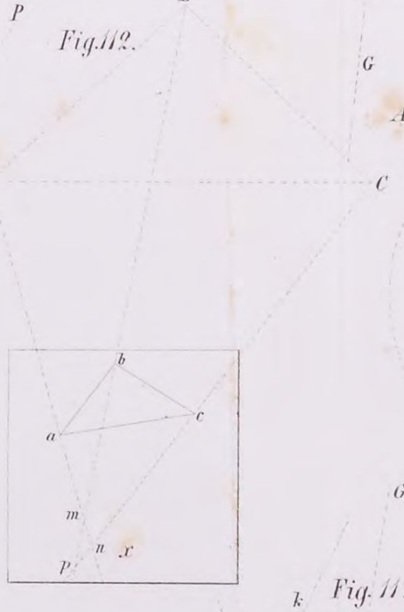


Fig. 113.

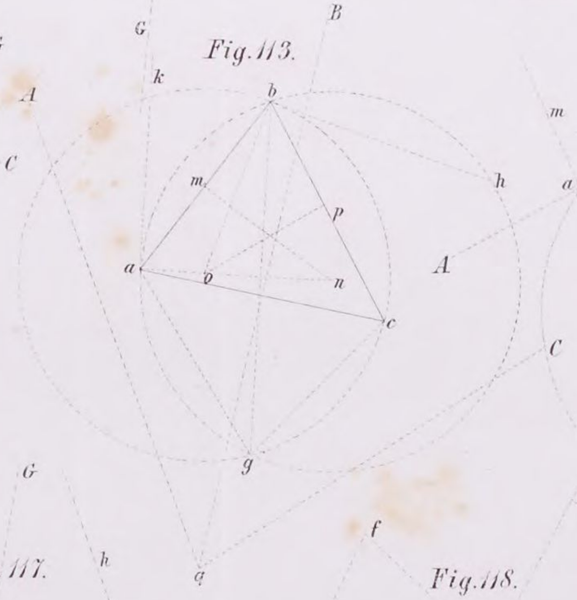


Fig. 114.

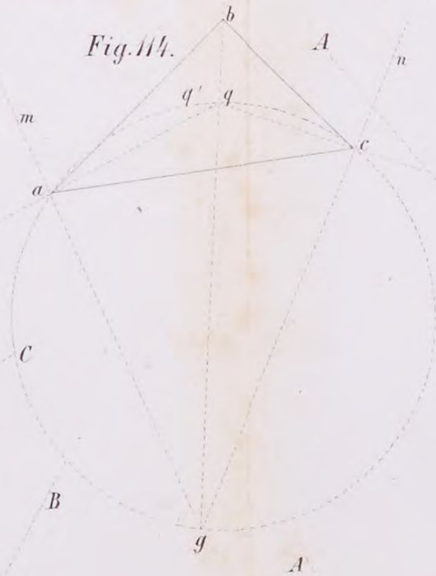


Fig. 115.

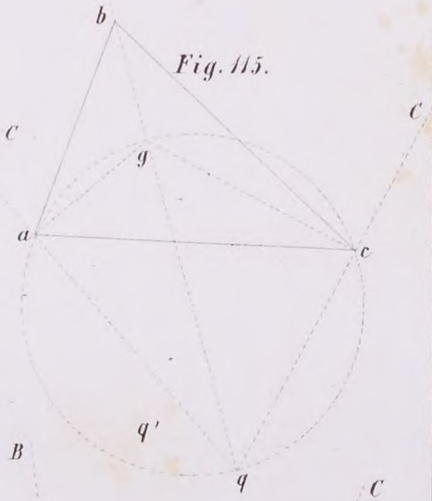


Fig. 116

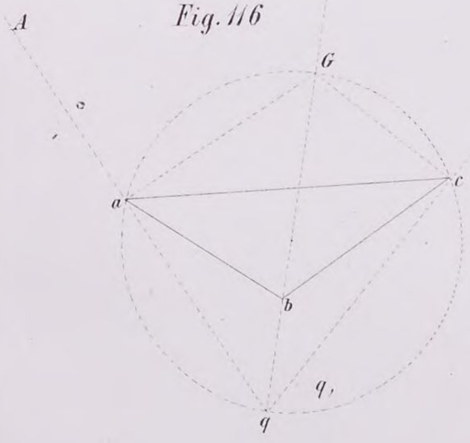


Fig. 117.

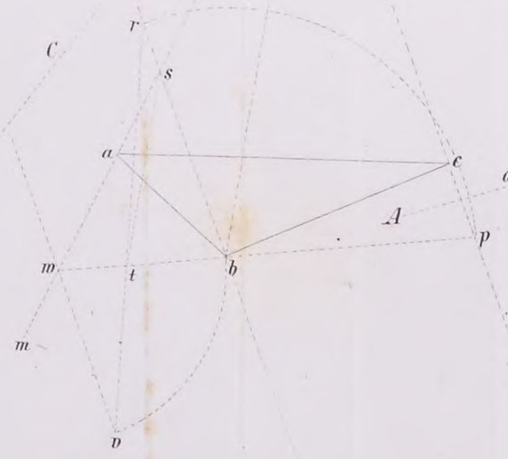


Fig. 118.

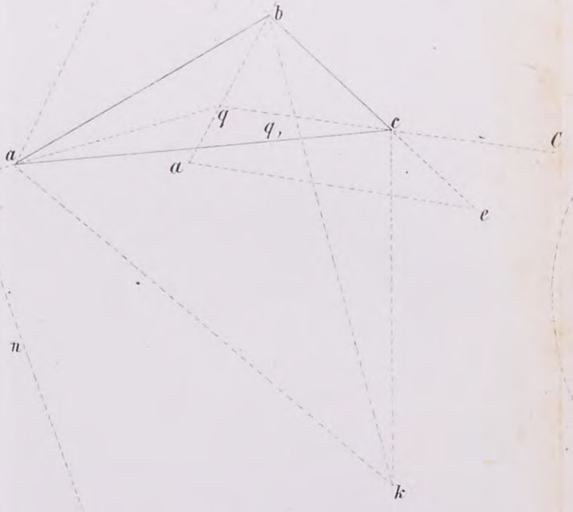
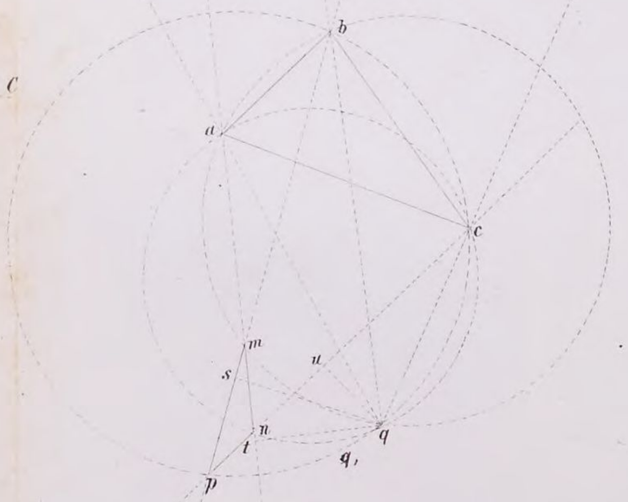


Fig. 119.



Lith. Anst. v. J. G. Bach in Leipzig.

Zeuner gez.

Fig. 120.

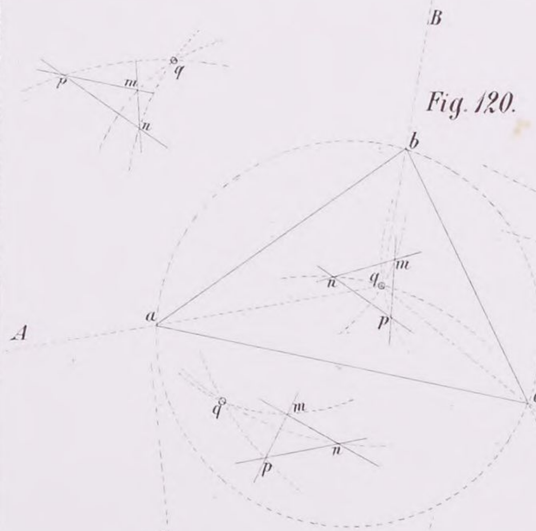


Fig. 121.

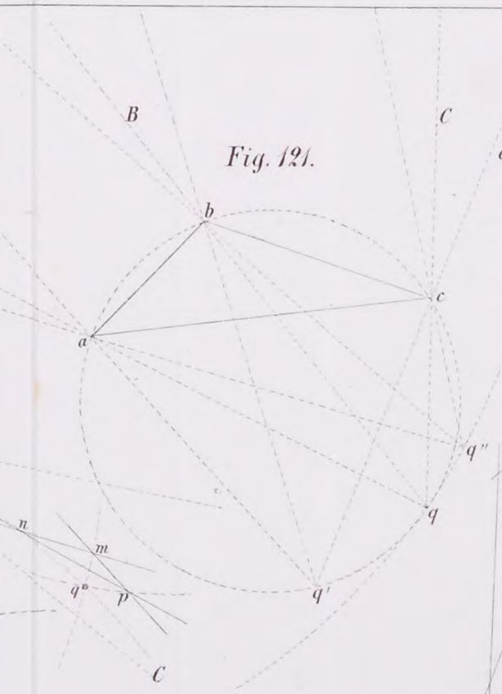


Fig. 122.

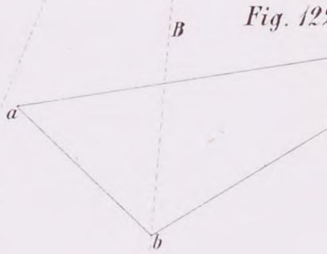


Fig. 123

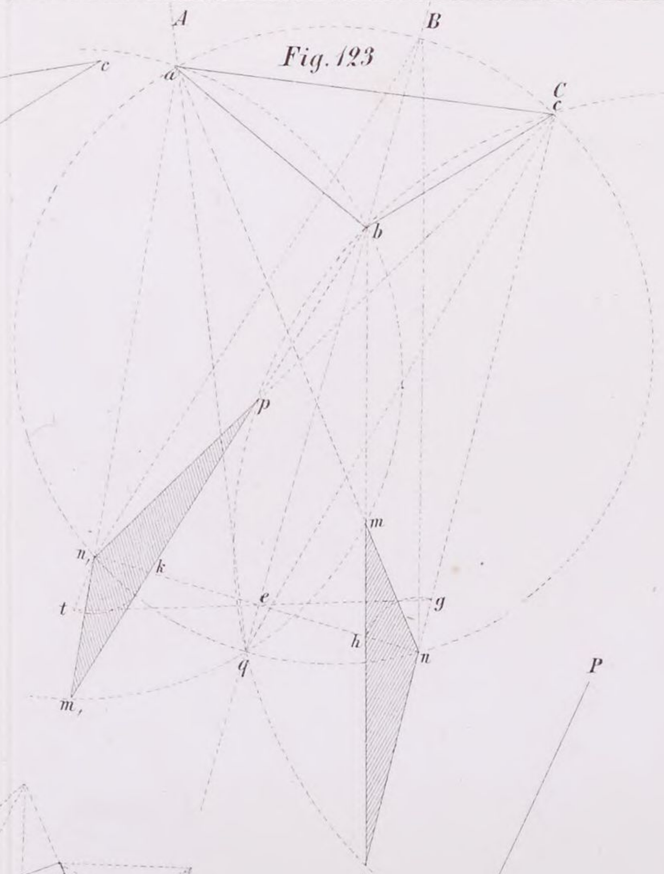


Fig. 124.

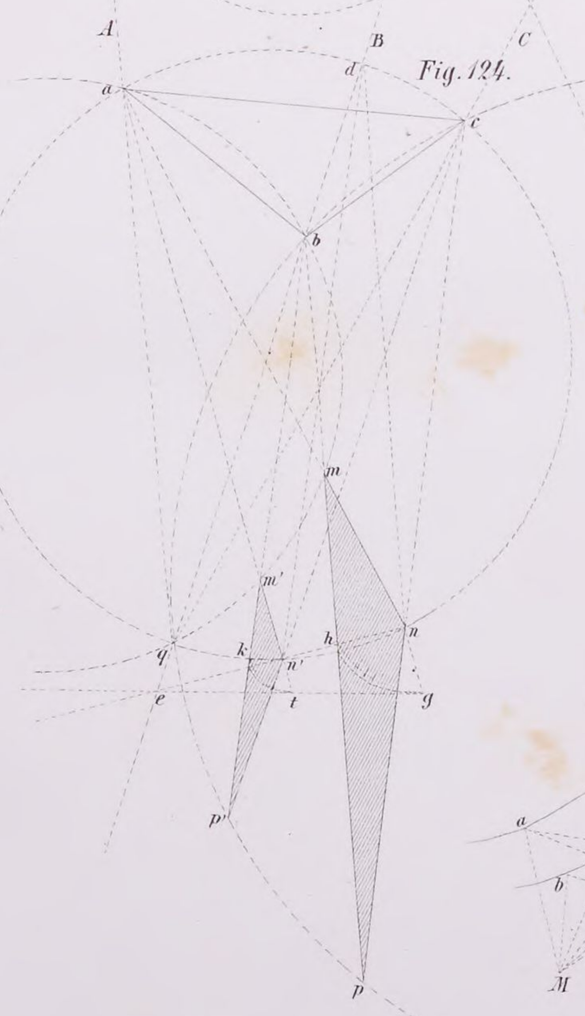


Fig. 125.

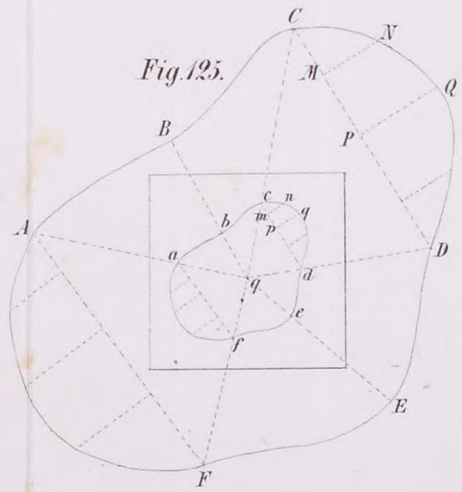


Fig. 126.

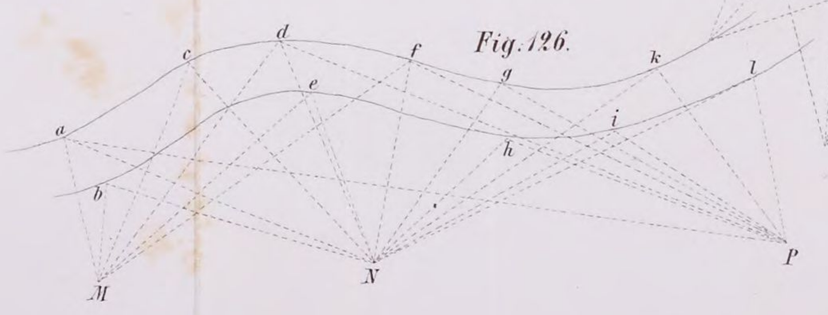


Fig. 127.

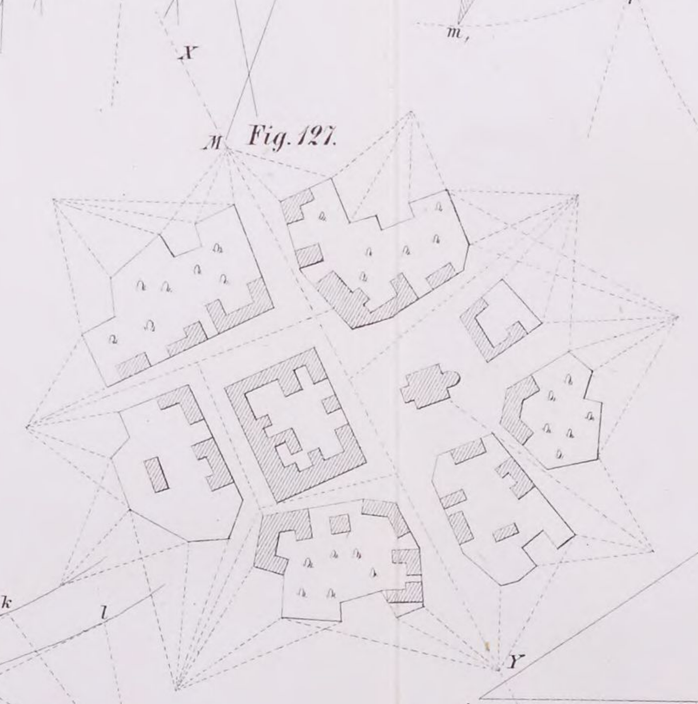
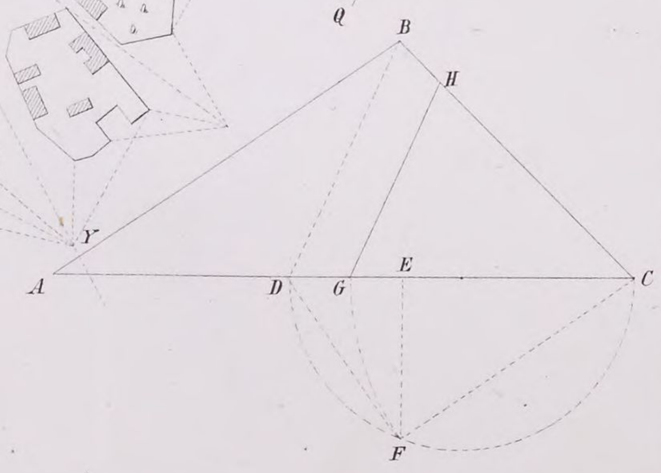


Fig. 128.



Lith. Anst. v. J. G. Bach. Leipz.

Zeuner gez.

Fig. 130.

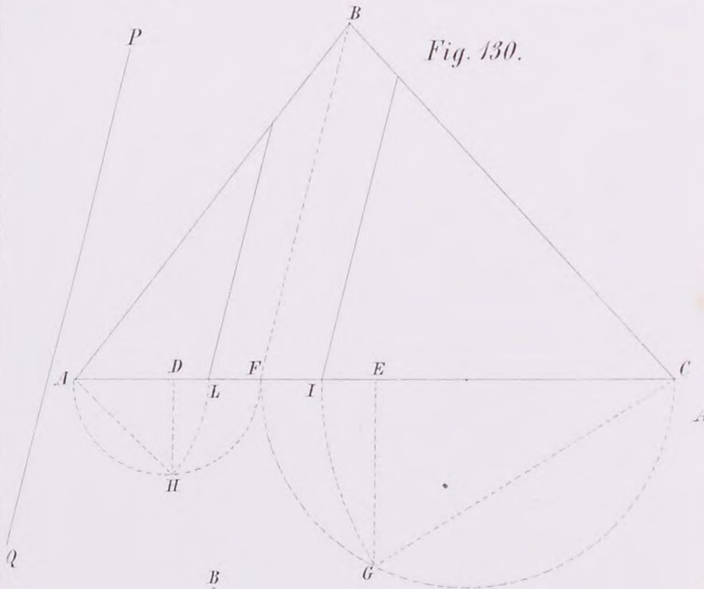


Fig. 129.

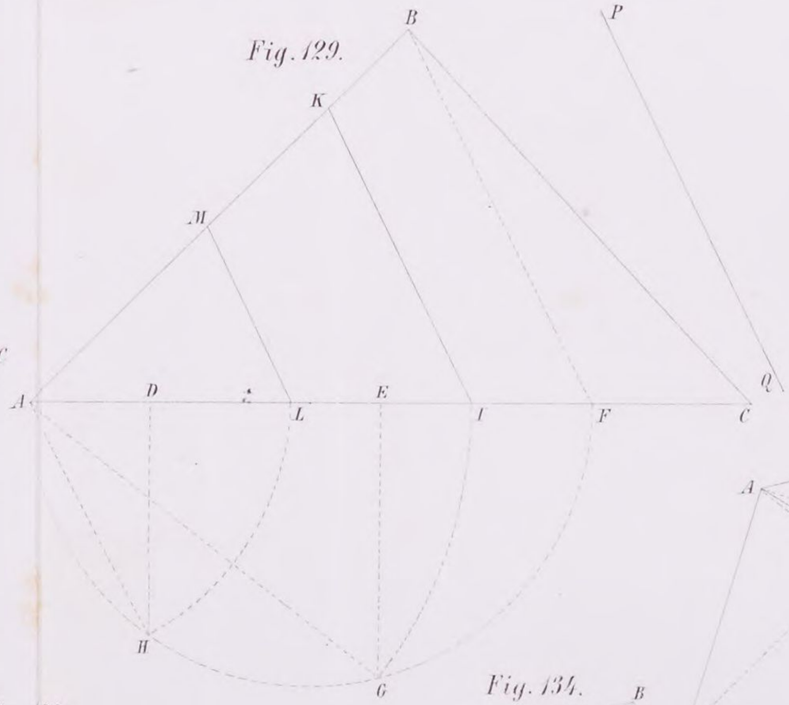


Fig. 131.

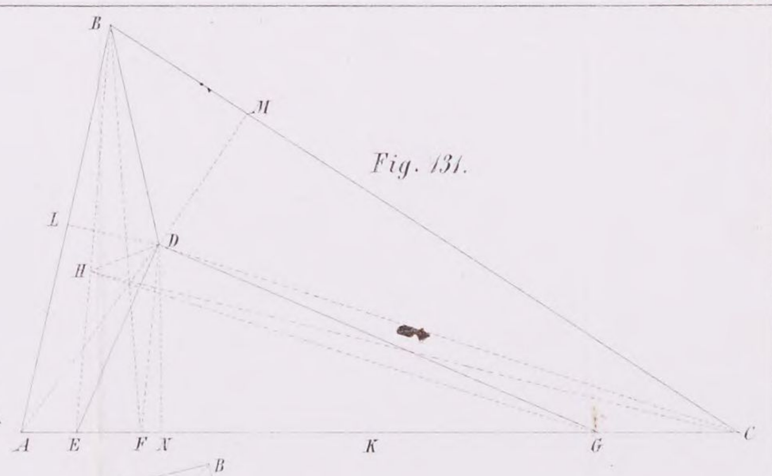


Fig. 130 b.

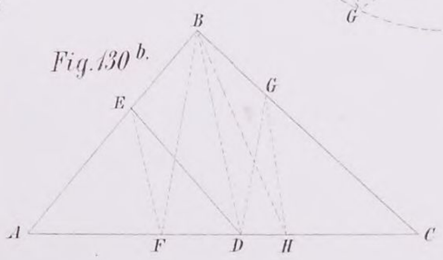


Fig. 133.

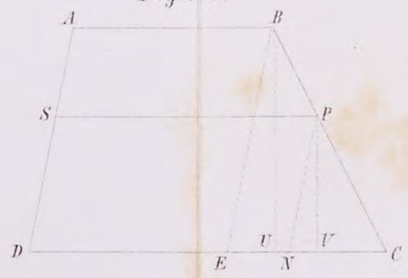


Fig. 134.

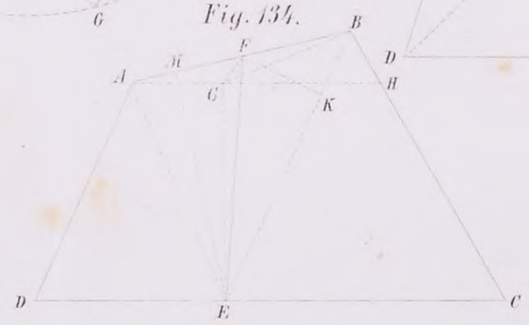


Fig. 135.

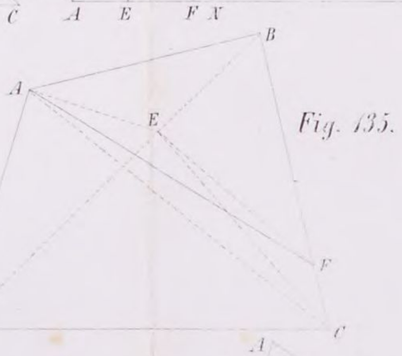


Fig. 136.

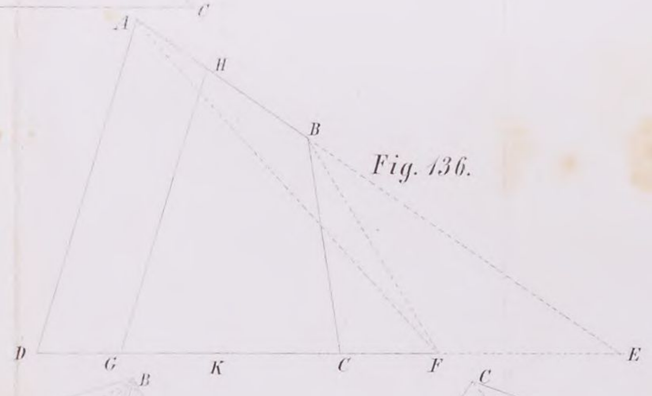


Fig. 132.

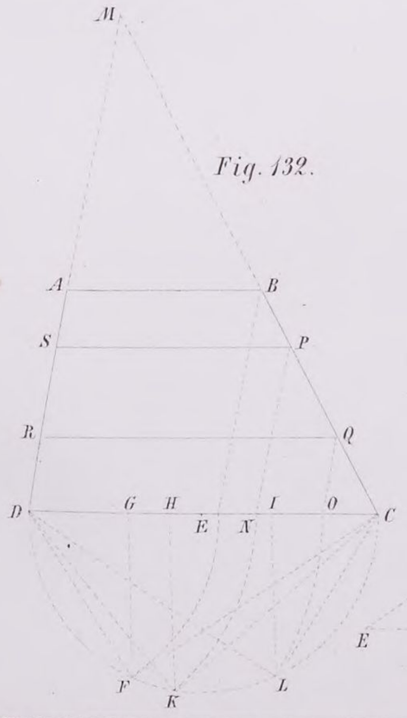


Fig. 137.

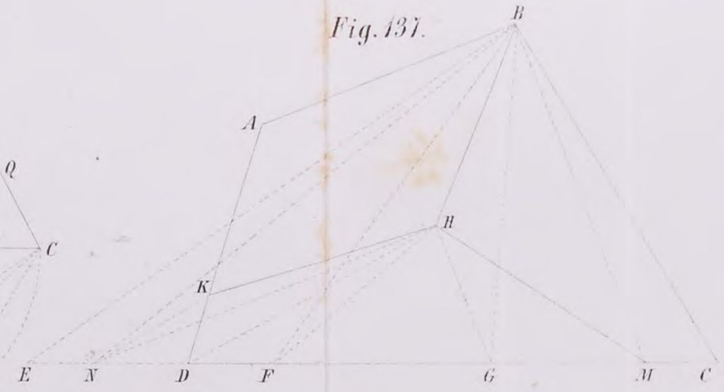


Fig. 138.

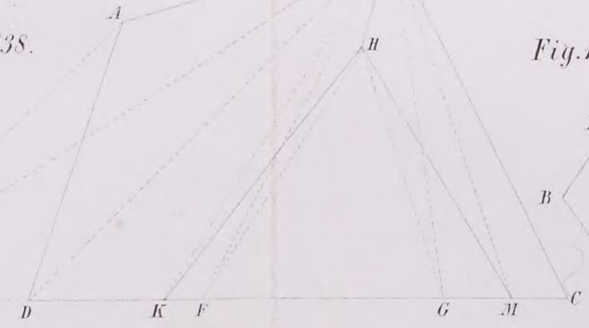
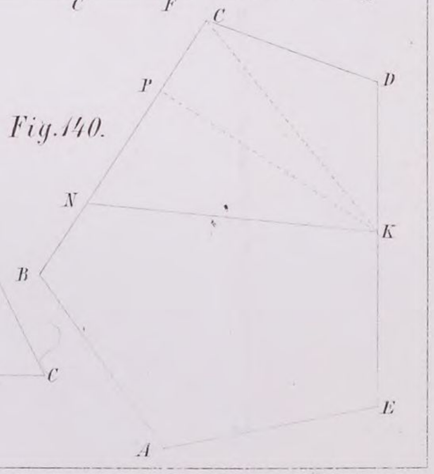


Fig. 140.



Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipz.

Fig. 139.

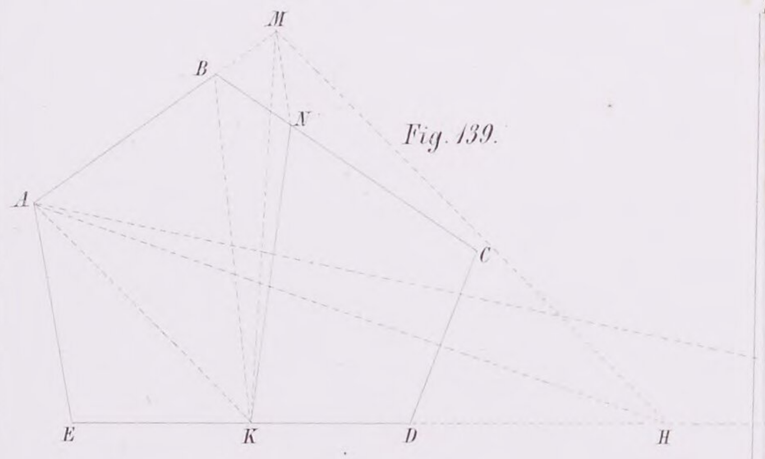


Fig. 141.

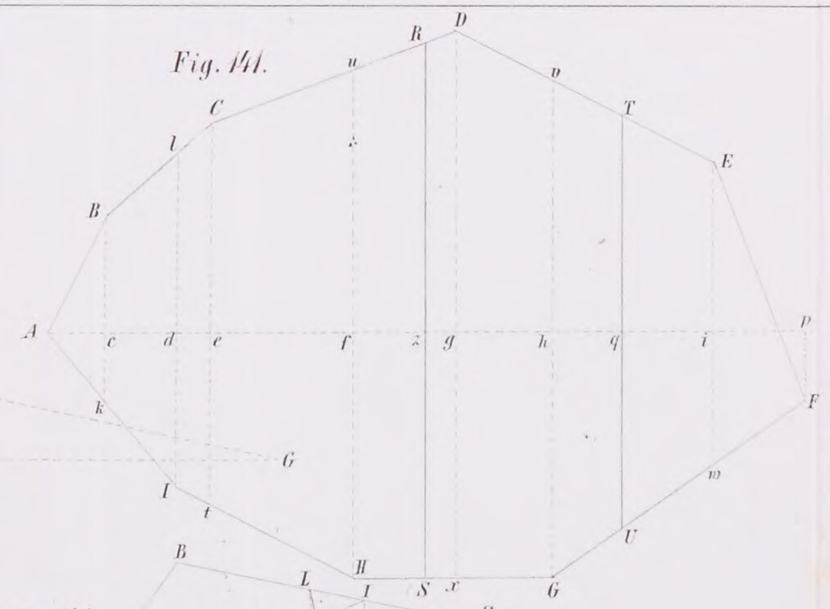


Fig. 142.

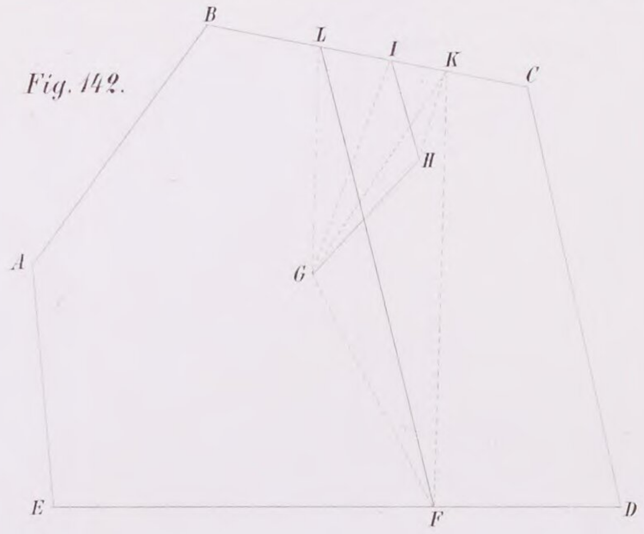


Fig. 143.

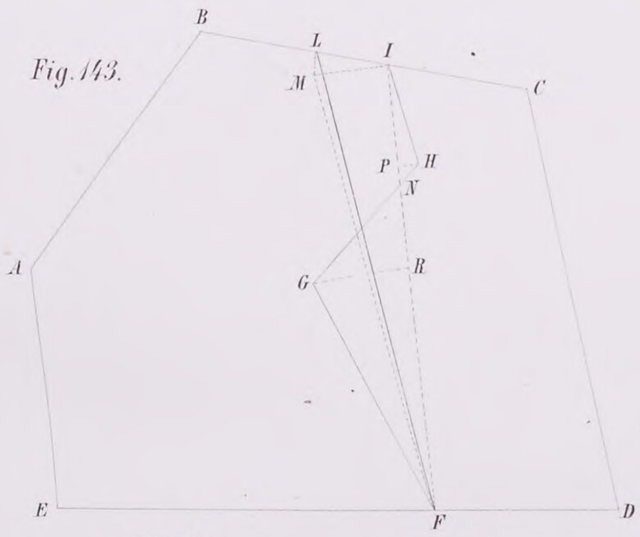


Fig. 144.

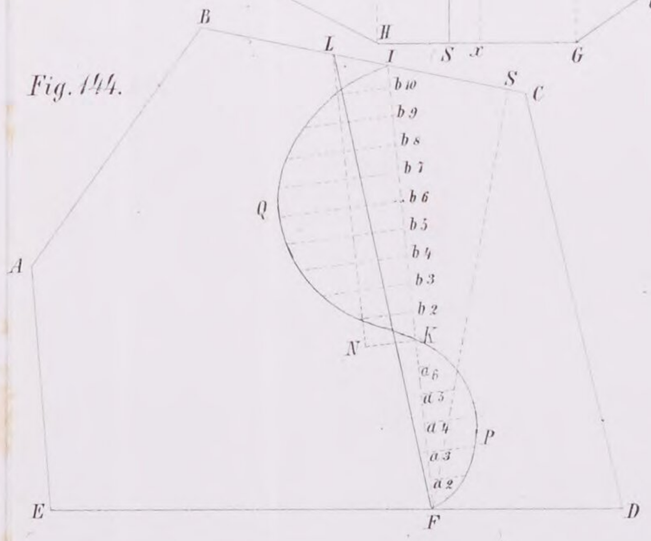


Fig. 145.

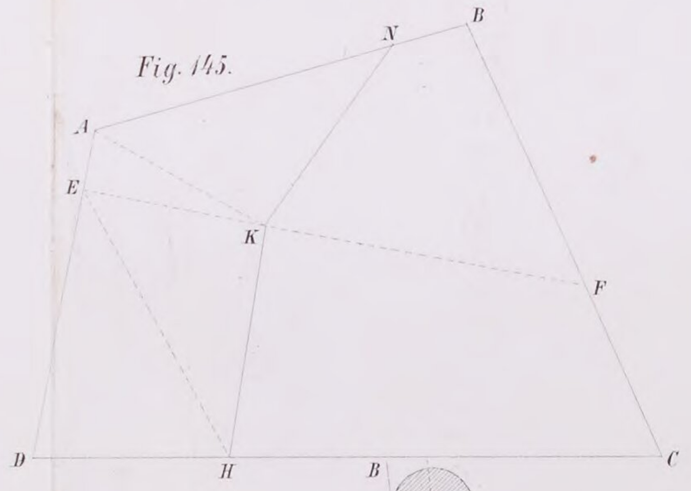


Fig. 146.

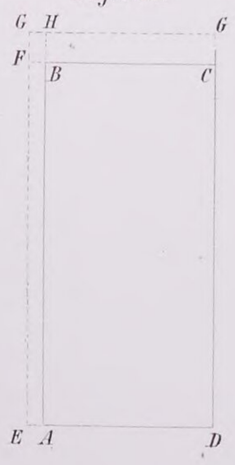


Fig. 147.

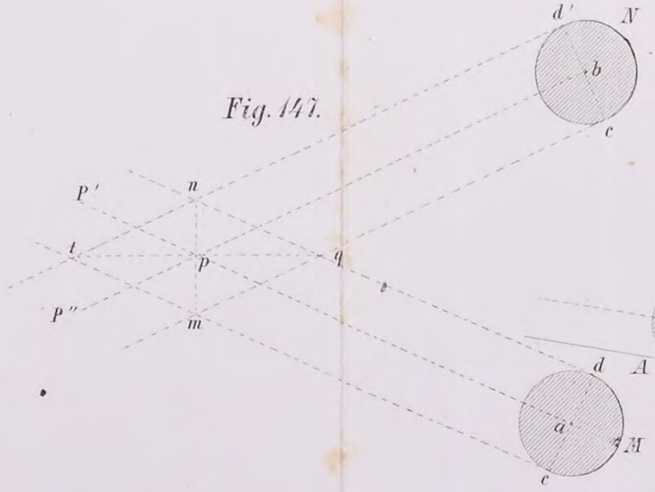


Fig. 148.

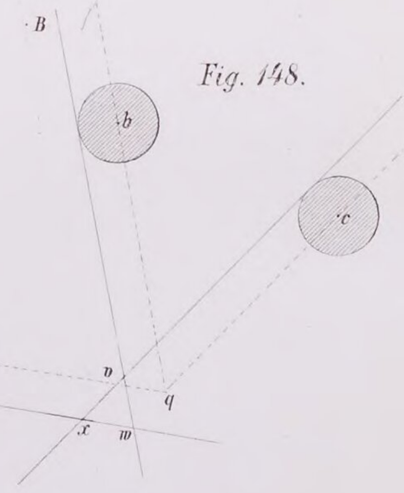
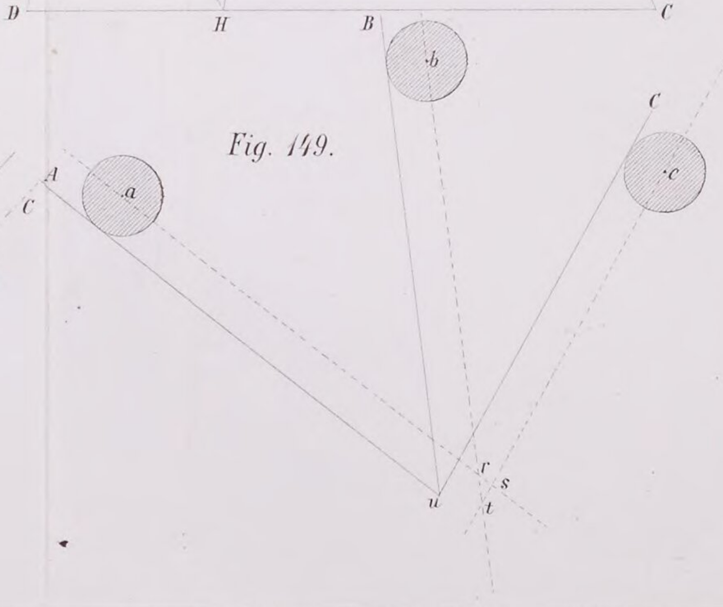


Fig. 149.



Lith. Anst. v. J. G. Bach in Leipzig.

Zenner gez.

Fig. 150.

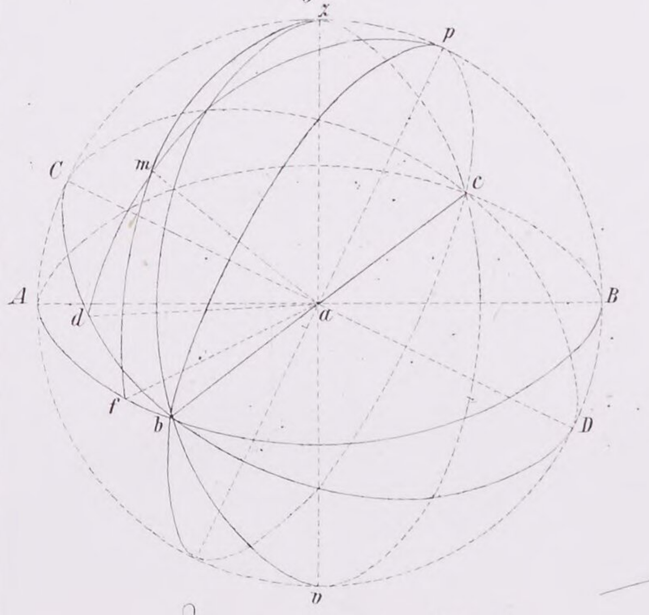


Fig. 151.

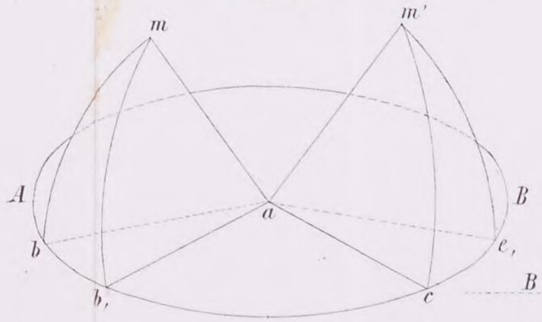


Fig. 152.

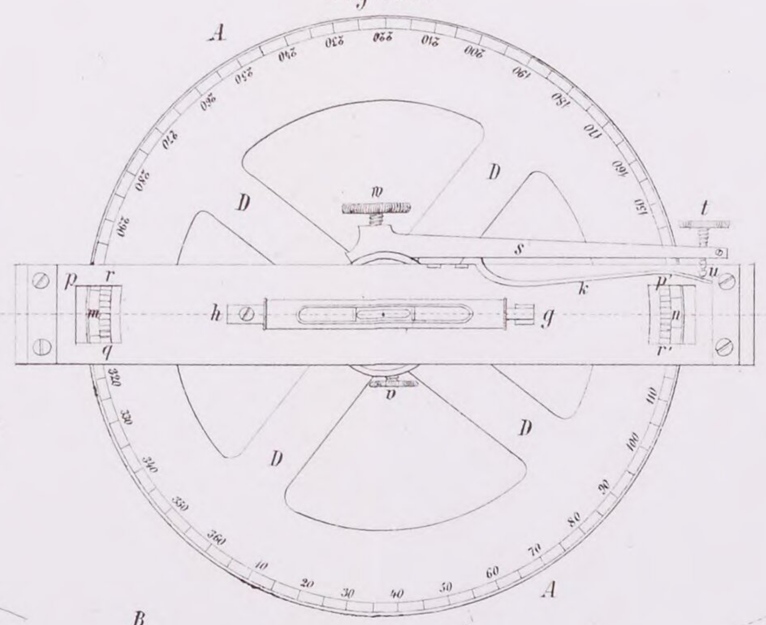


Fig. 156.

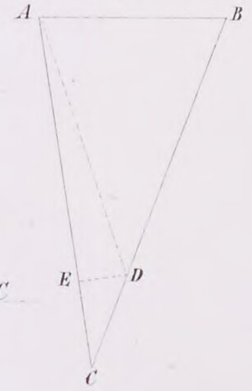


Fig. 153.

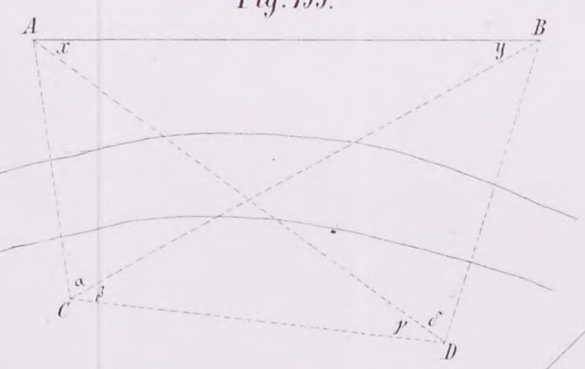


Fig. 154.

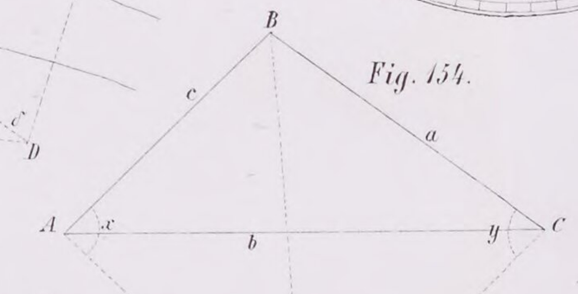


Fig. 155.

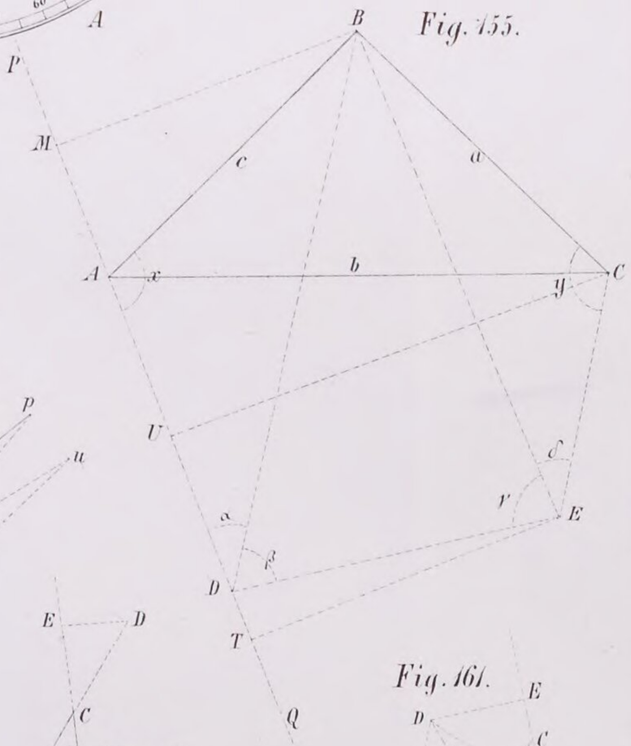


Fig. 162.

Fig. 164.

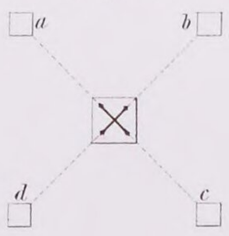


Fig. 158.

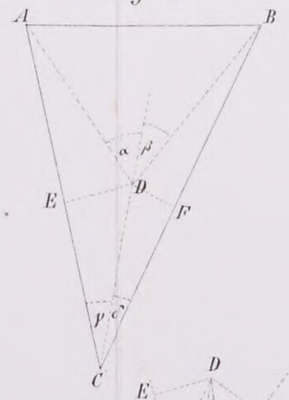


Fig. 160.

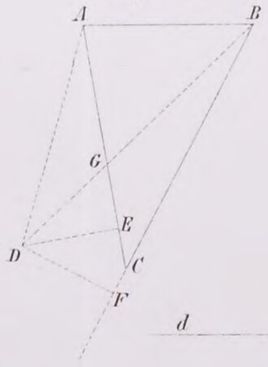


Fig. 163.

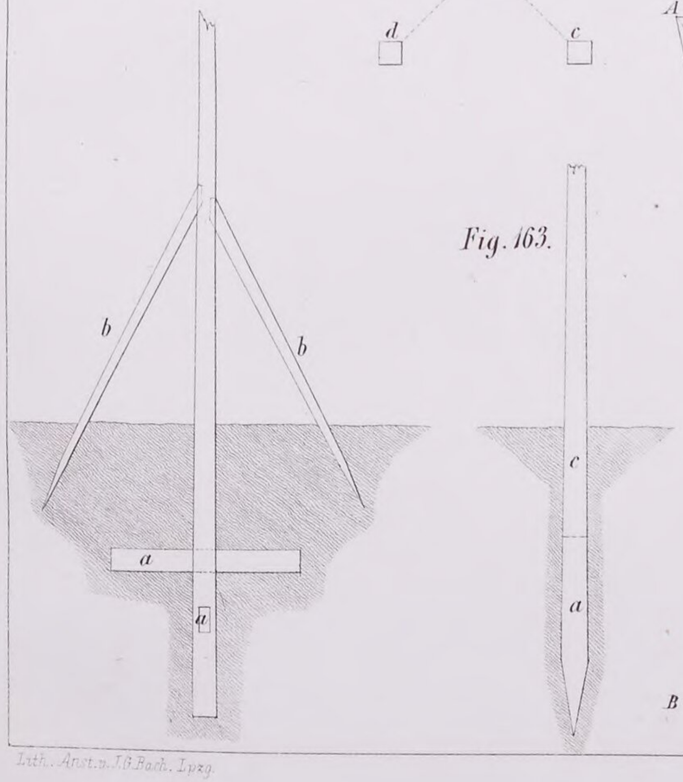


Fig. 159.

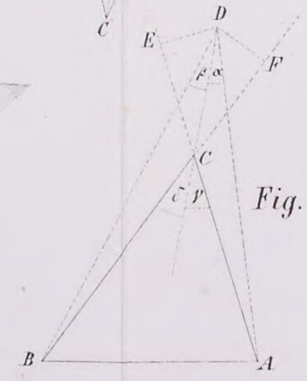


Fig. 166.

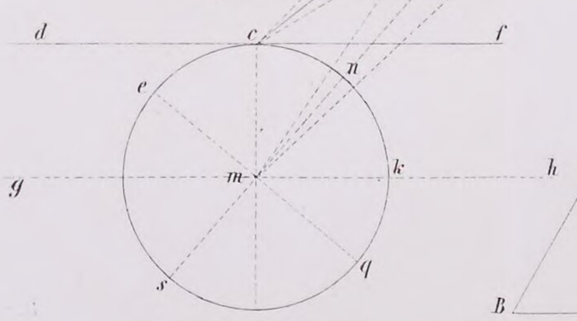


Fig. 157.

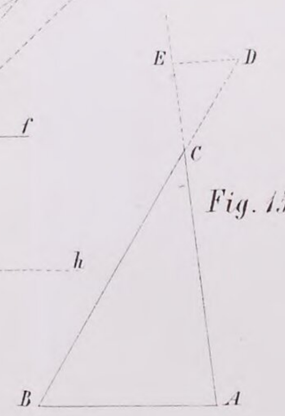
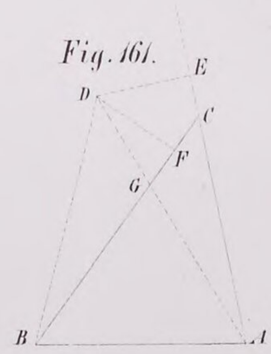


Fig. 161.



Lith. Anst. v. J.G. Bach. Lpzg.

Fig. 165.

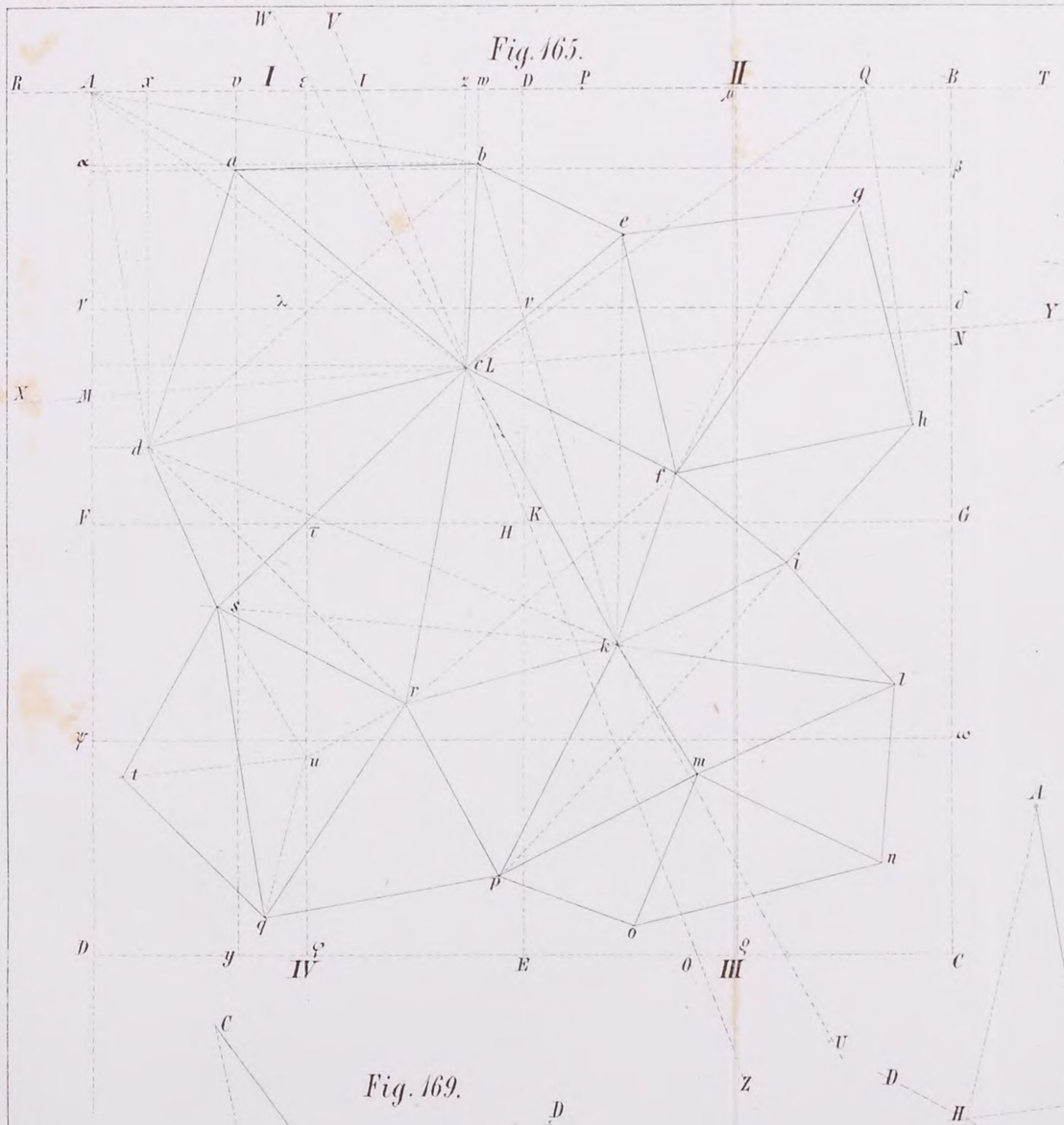


Fig. 168.

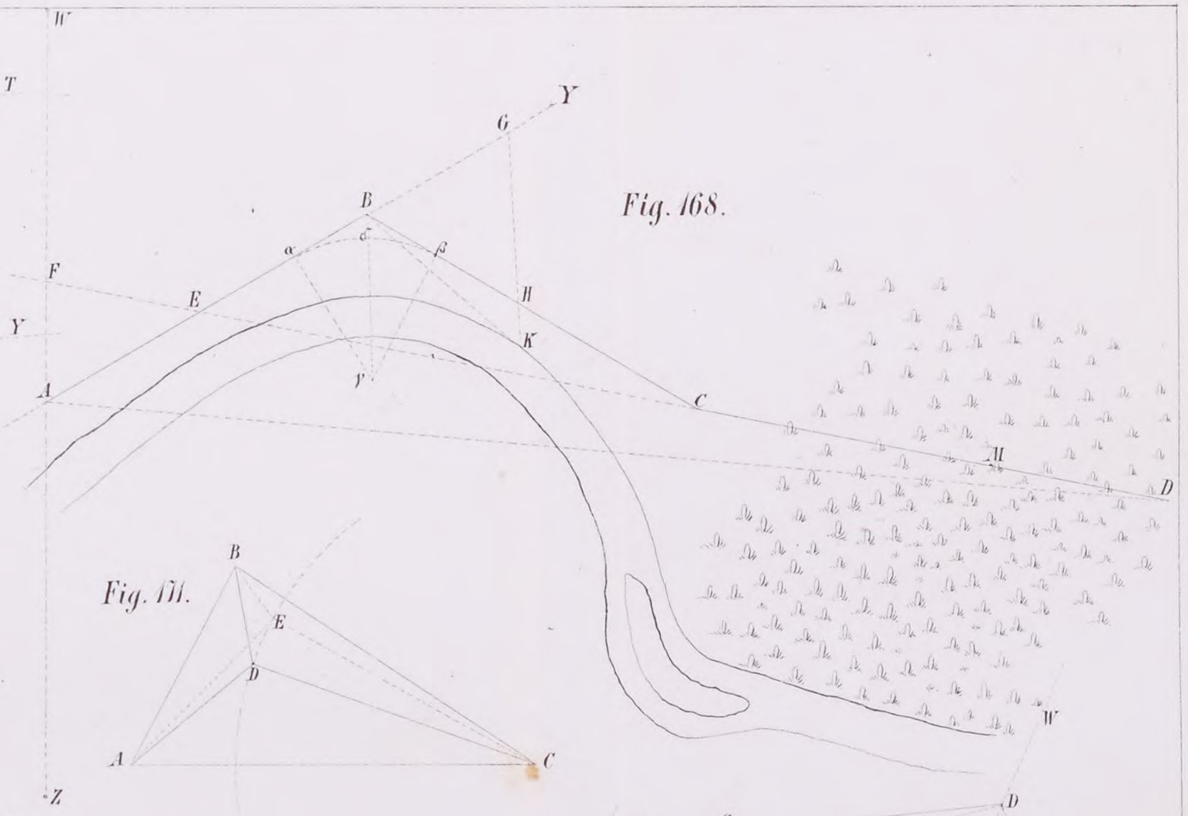


Fig. 171.

Fig. 167.

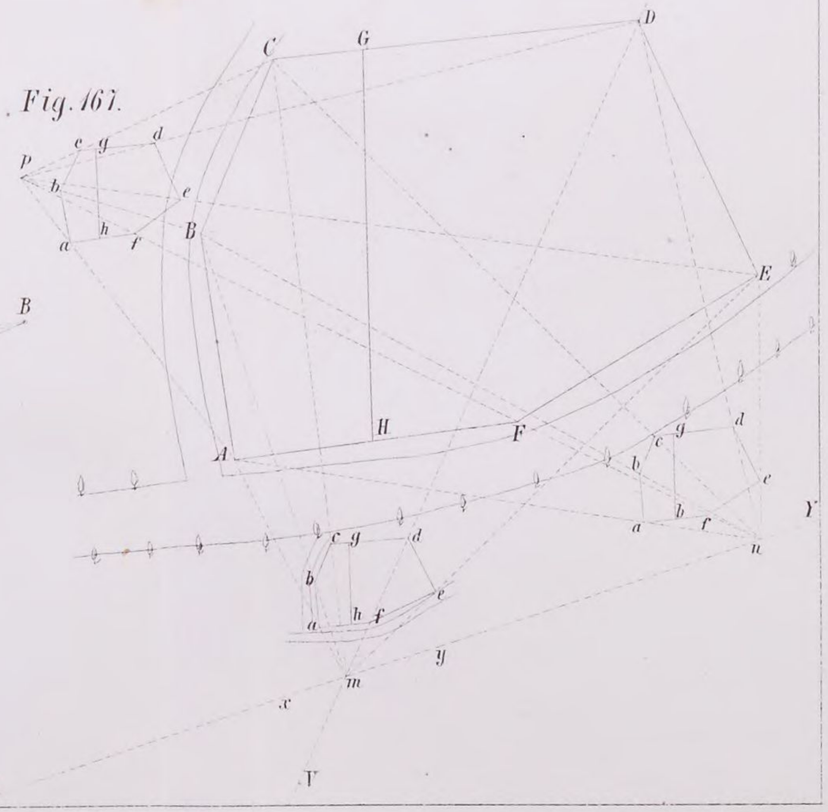


Fig. 169.

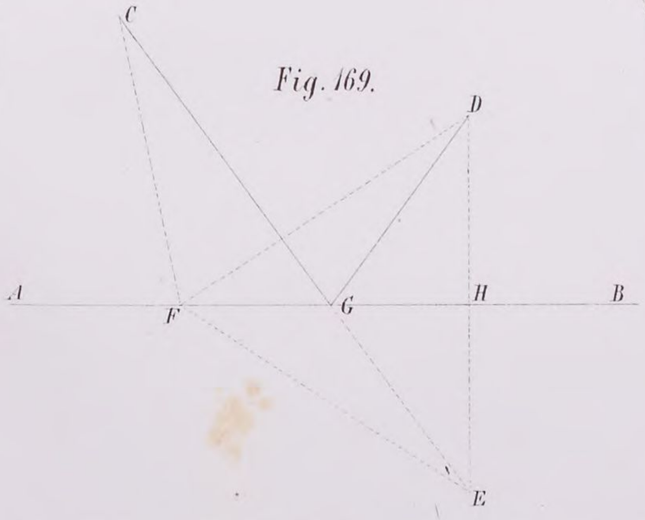
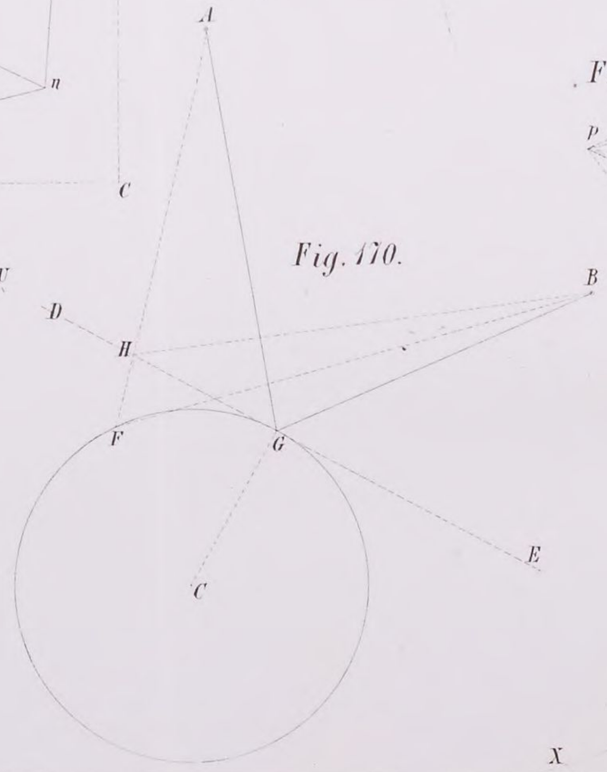


Fig. 170.



Lith. Anst. v. J. H. Bach. Speg.

Fig. 174.

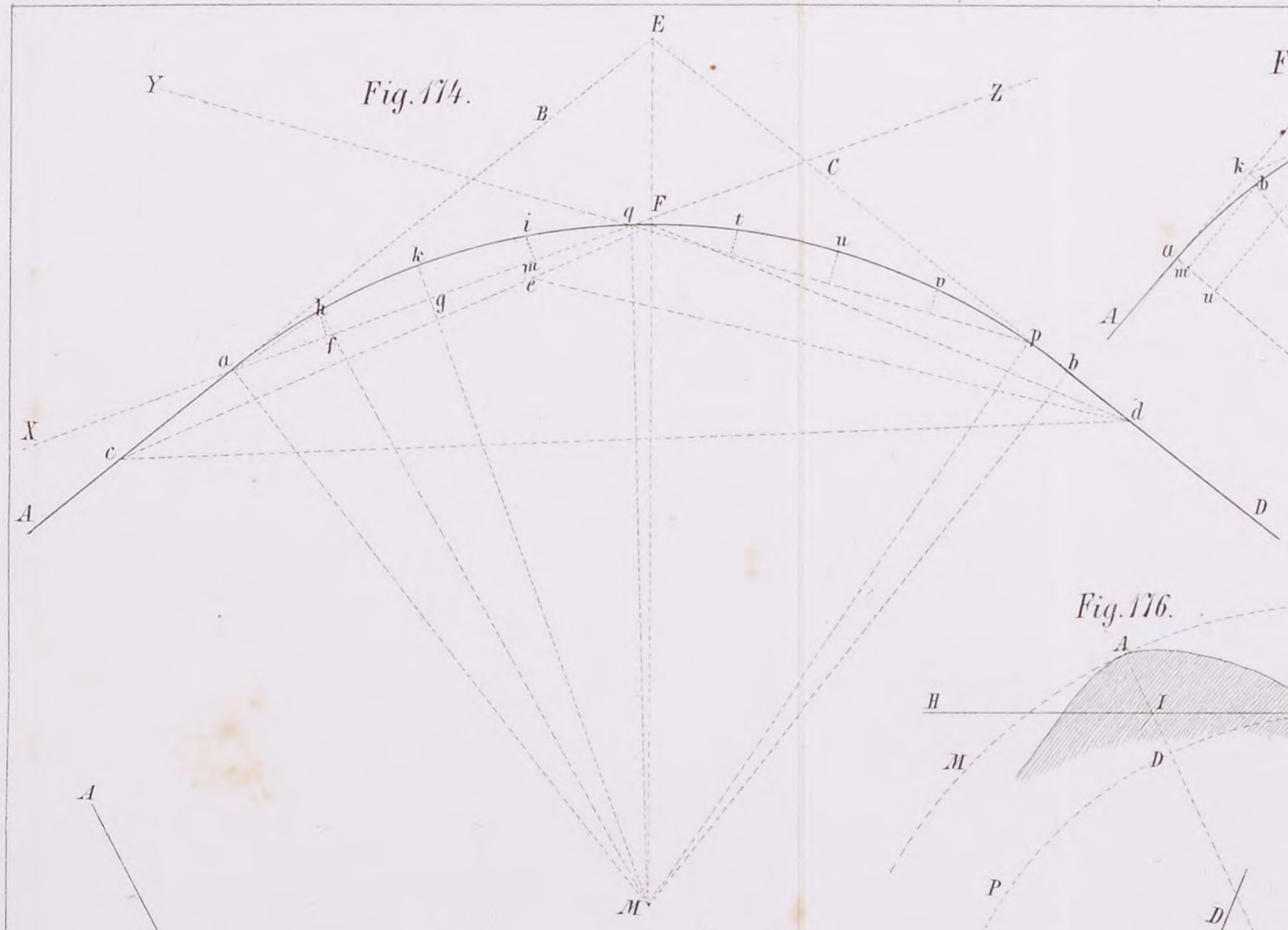


Fig. 175.

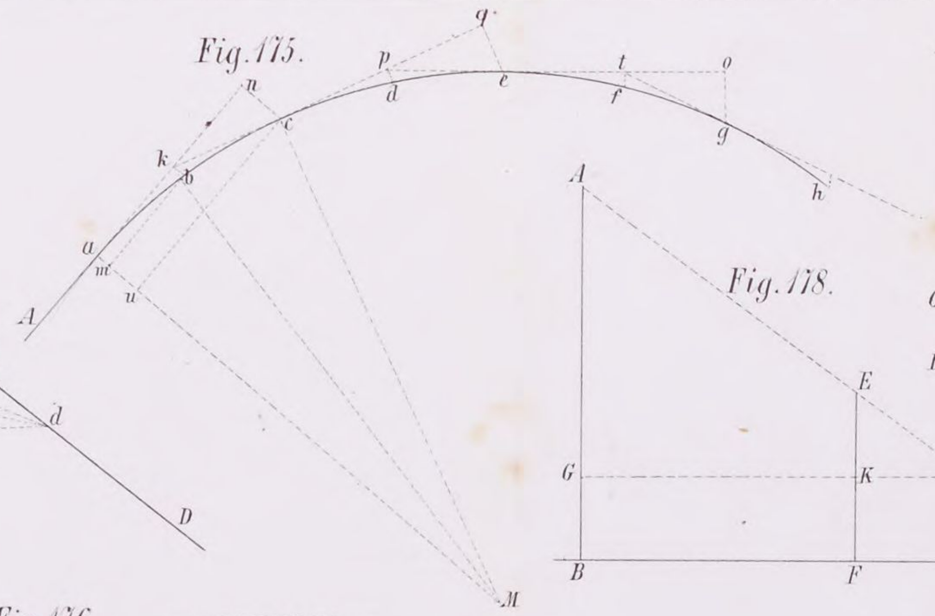


Fig. 178.

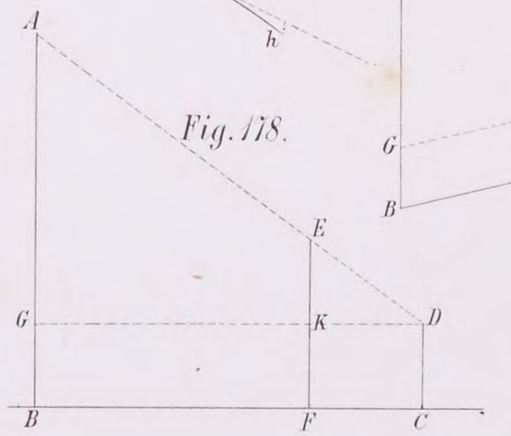


Fig. 179.

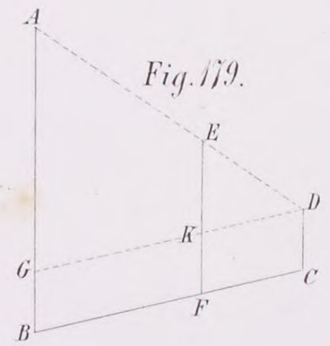


Fig. 176.

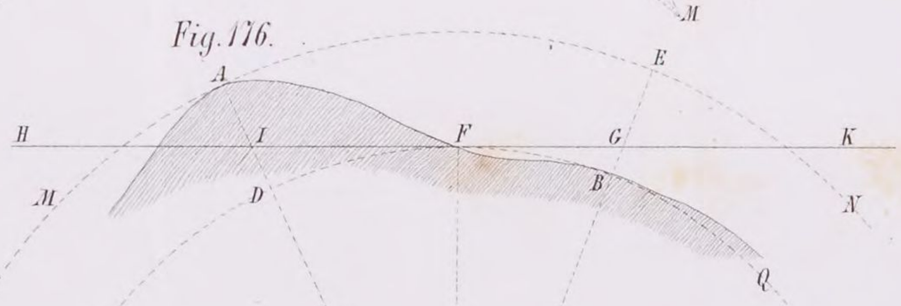


Fig. 177.

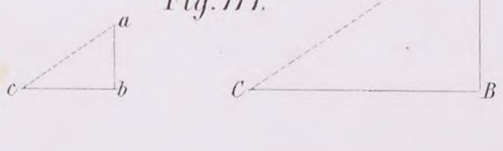


Fig. 173.

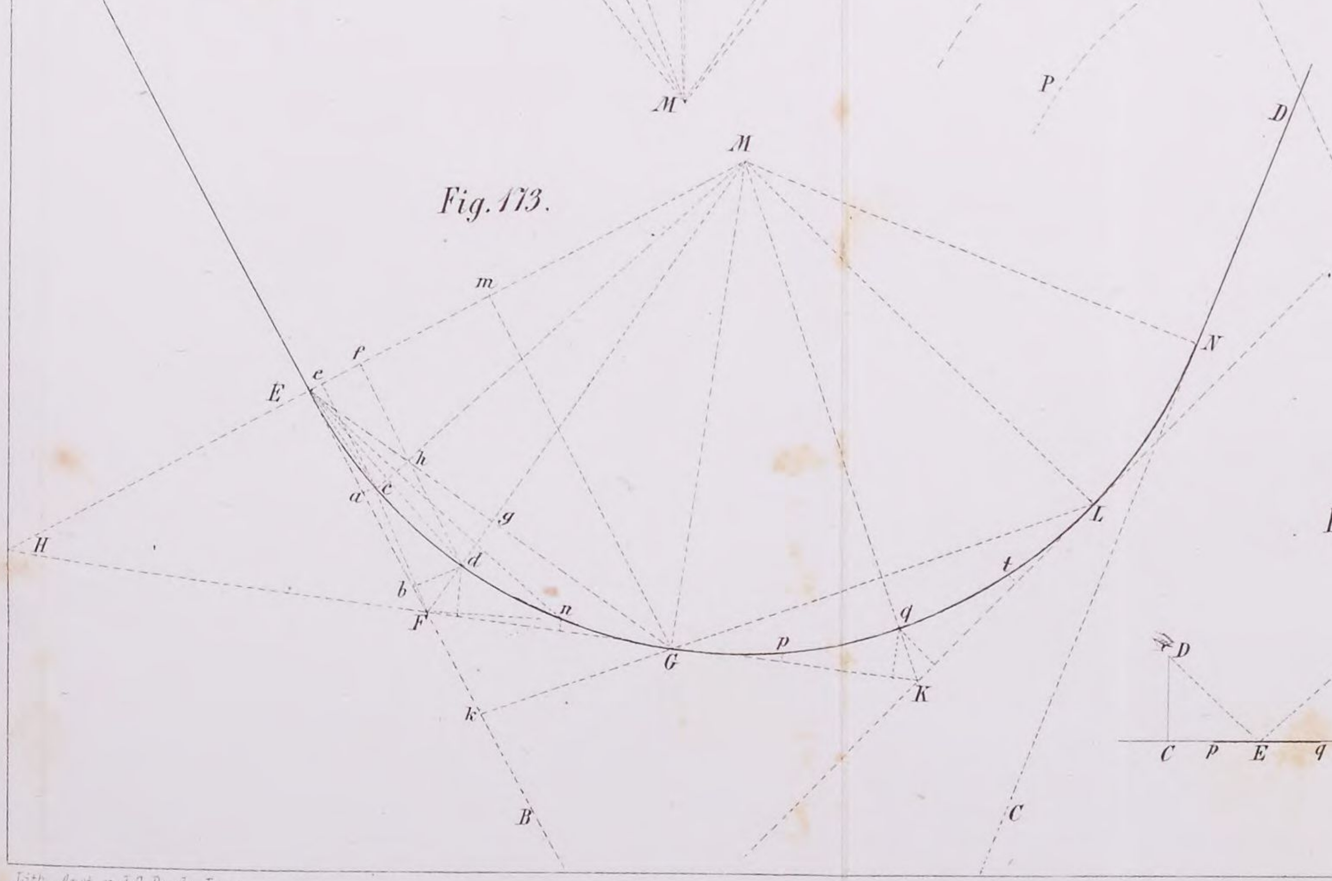


Fig. 180.

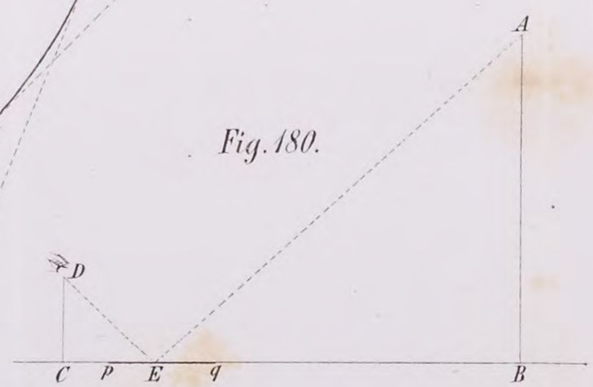
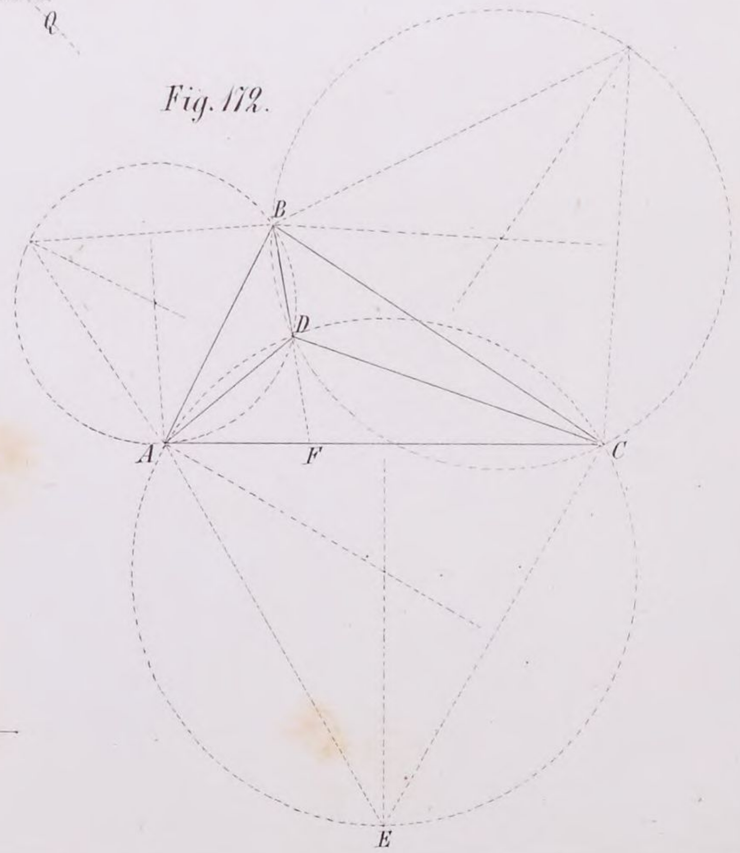


Fig. 172.



Lith. Anst. v. J. G. Bach. Lpzg.

Fig. 194.

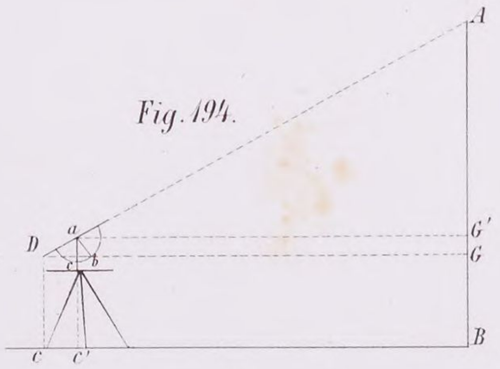


Fig. 193.

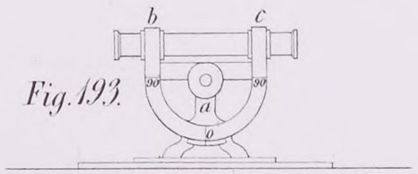


Fig. 184.

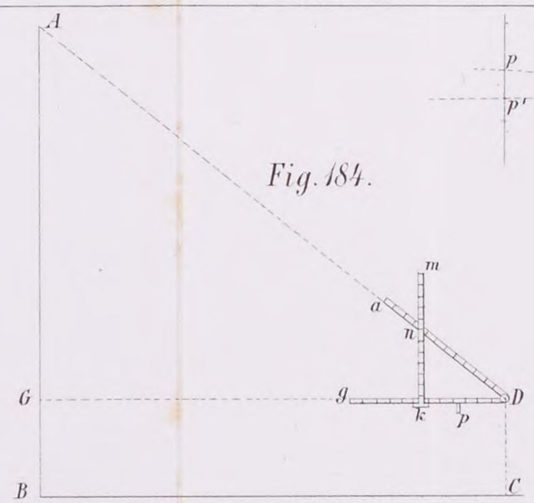


Fig. 192.

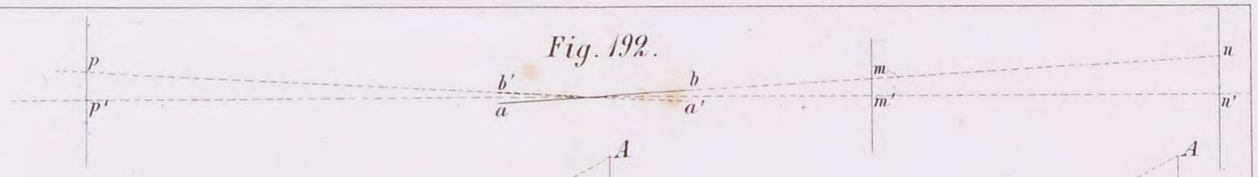


Fig. 182.

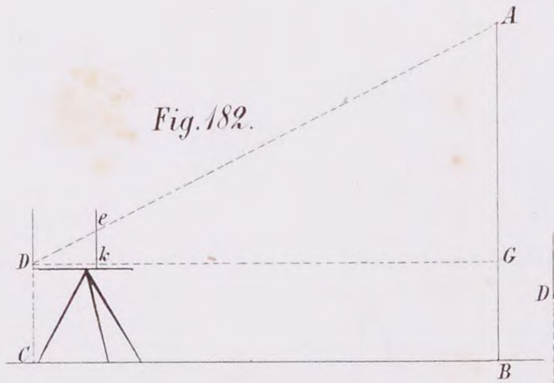


Fig. 183.

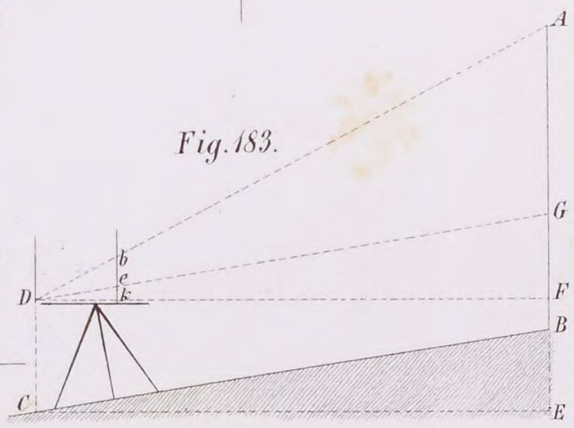


Fig. 185.

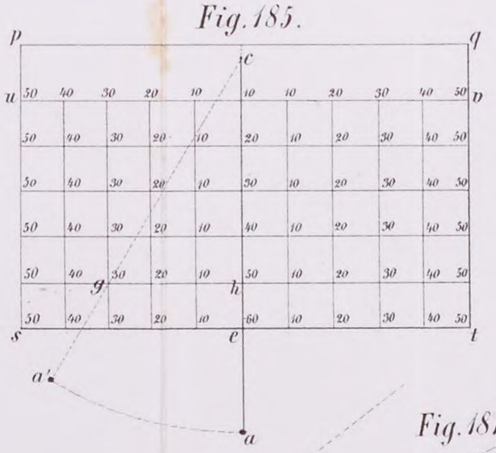


Fig. 191.

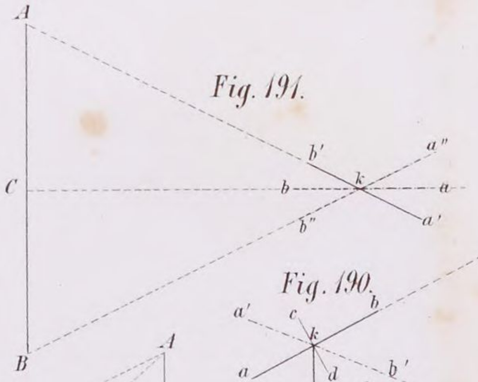


Fig. 186.

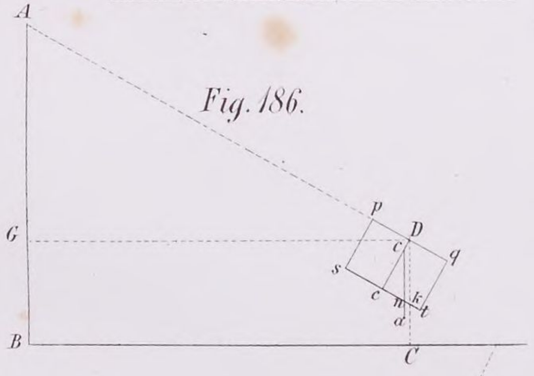


Fig. 187.

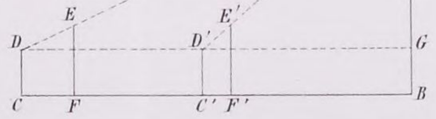


Fig. 190.

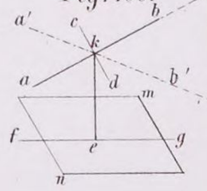


Fig. 188.

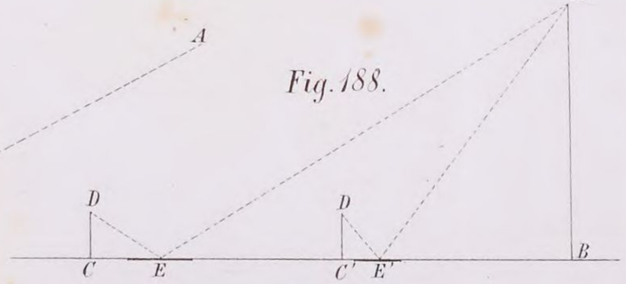


Fig. 181.

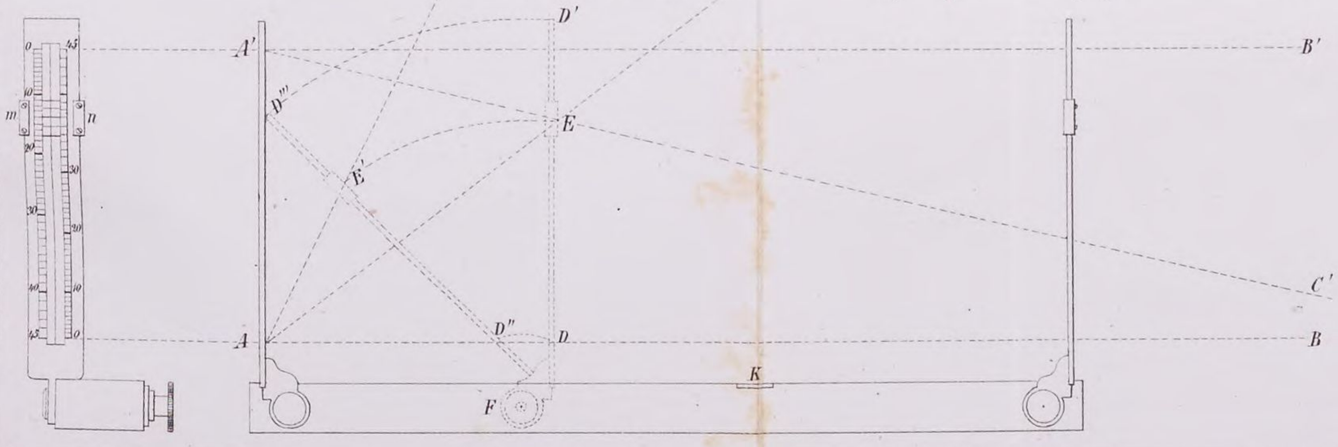


Fig. 189.a

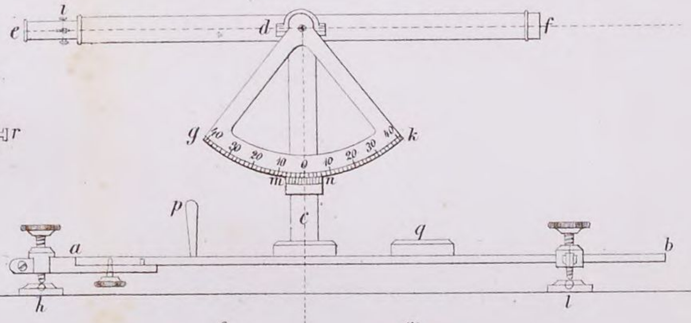


Fig. 189.b

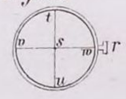


Fig. 189.c

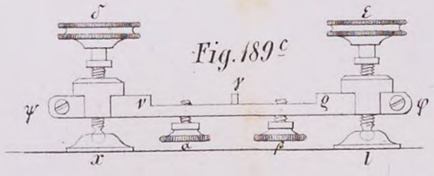
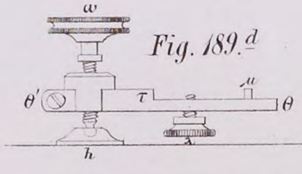


Fig. 189.d



Lith. Anst. v. J. G. Bach. Lpzg.

Fig. 195.

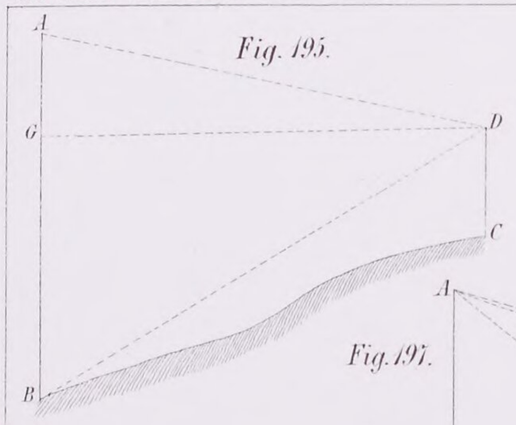


Fig. 196.

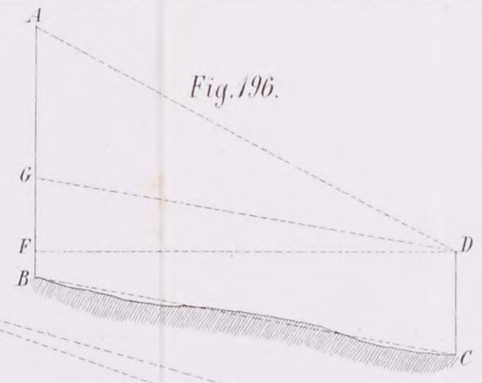


Fig. 197.

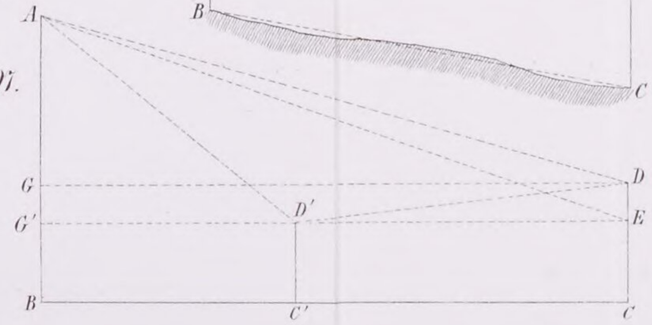


Fig. 198.

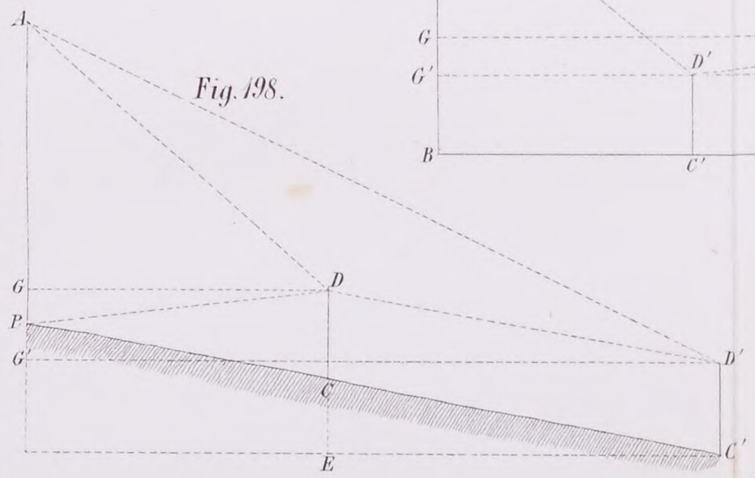


Fig. 199.

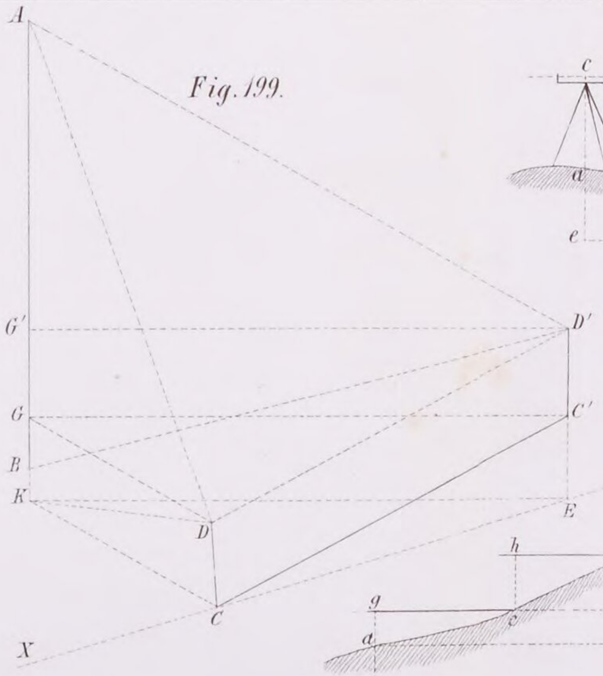


Fig. 206.

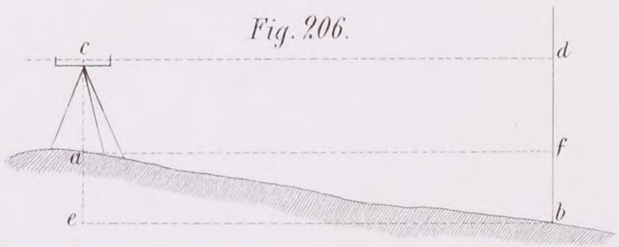


Fig. 202.

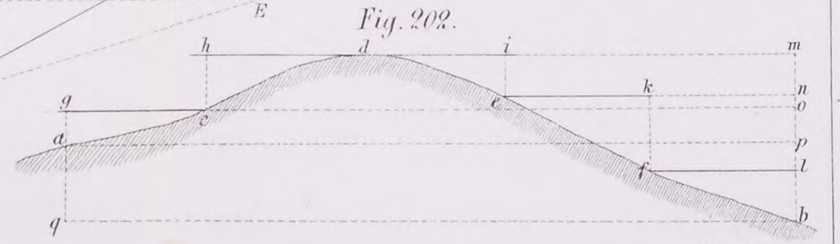


Fig. 201.

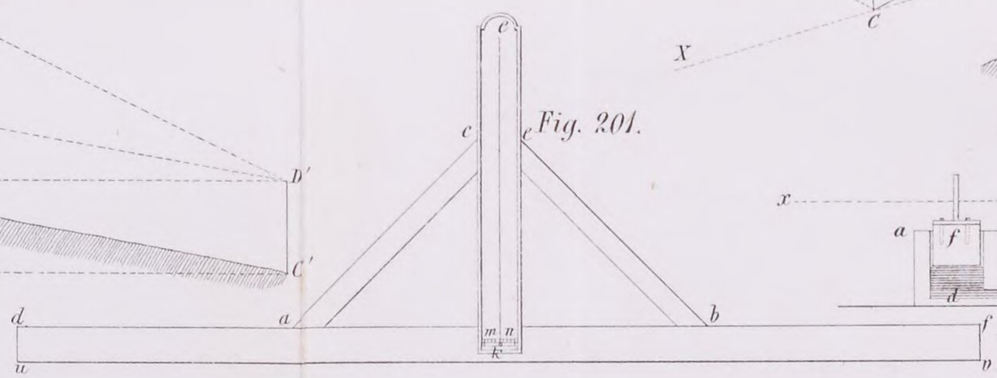


Fig. 204.a

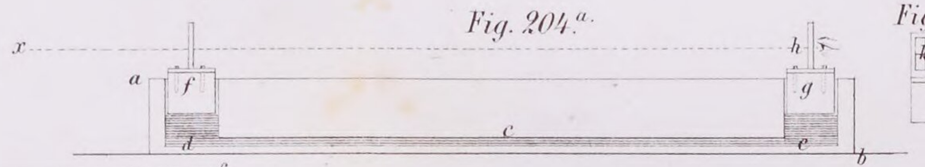


Fig. 204.b

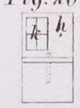


Fig. 205.

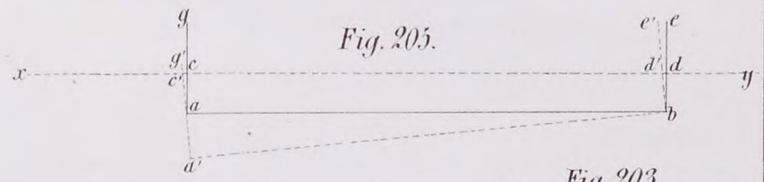


Fig. 207.

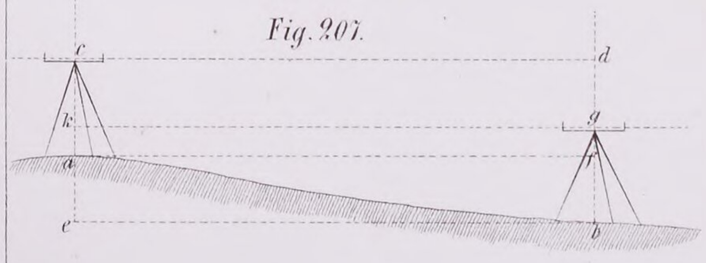


Fig. 208.

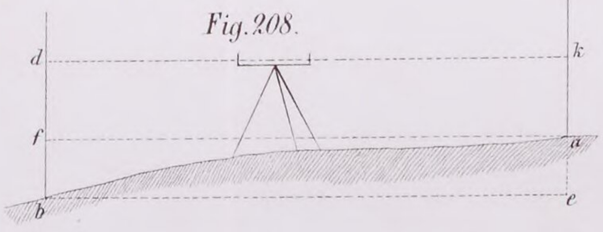


Fig. 200.

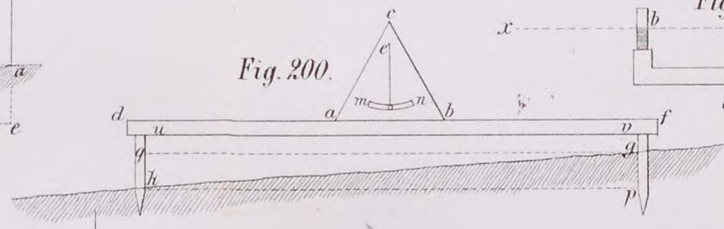


Fig. 203

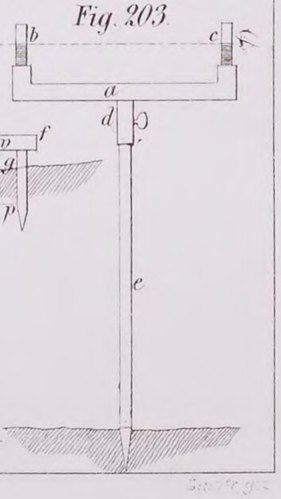
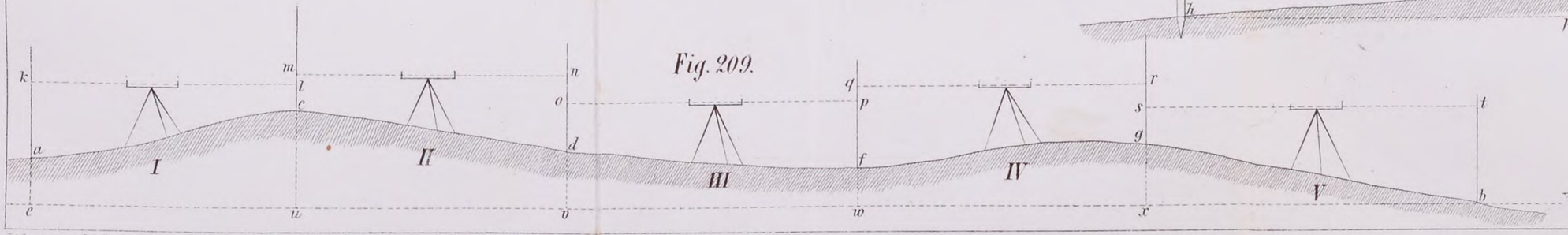


Fig. 209.



Lith. Anst. v. J.G. Bach. Lpzg.

Fig. 210.a

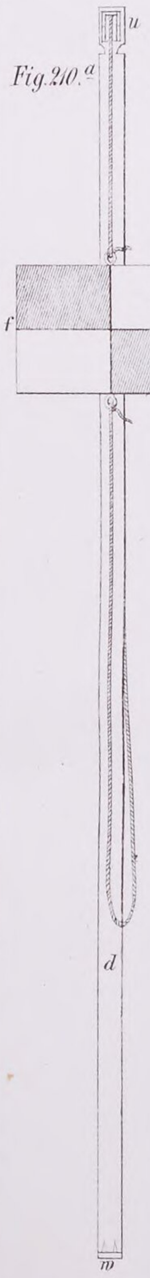


Fig. 210.b

Fig. 210.c

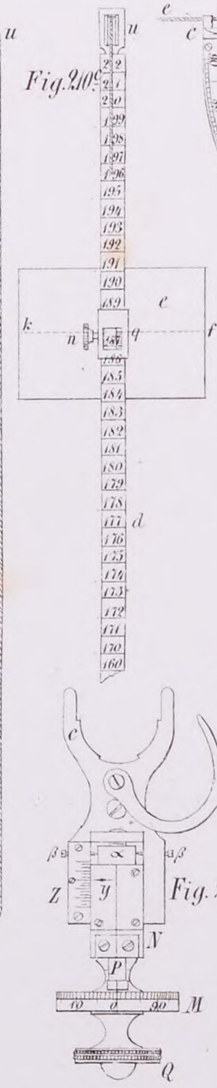


Fig. 211.a

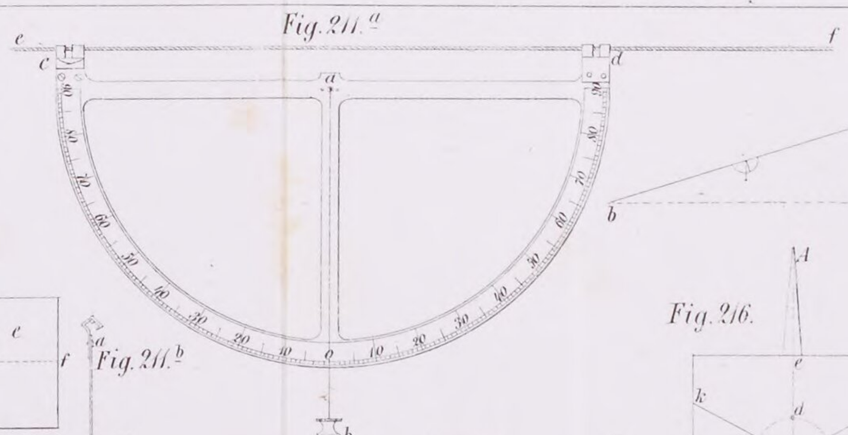


Fig. 211.b

Fig. 213.

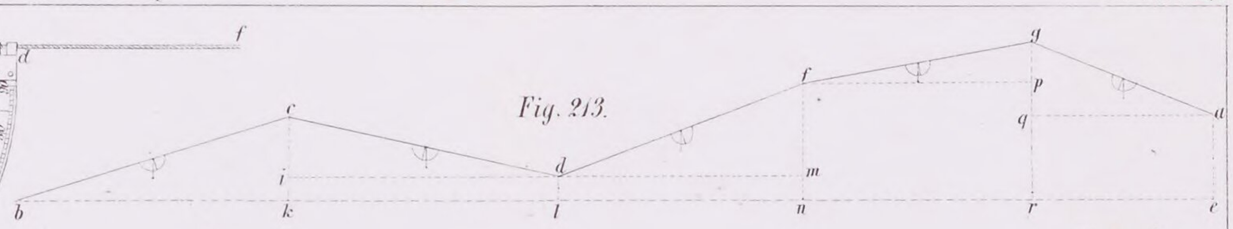


Fig. 214.a

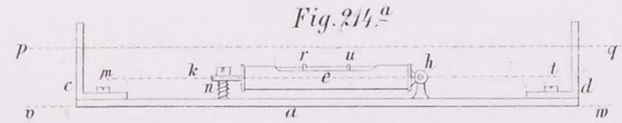


Fig. 214.b

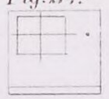


Fig. 216.

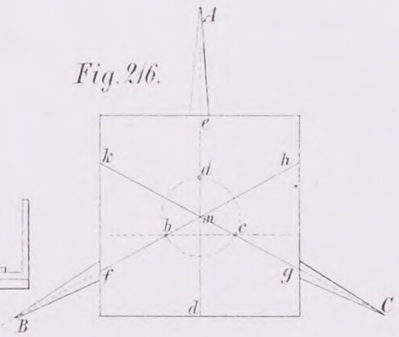


Fig. 217.

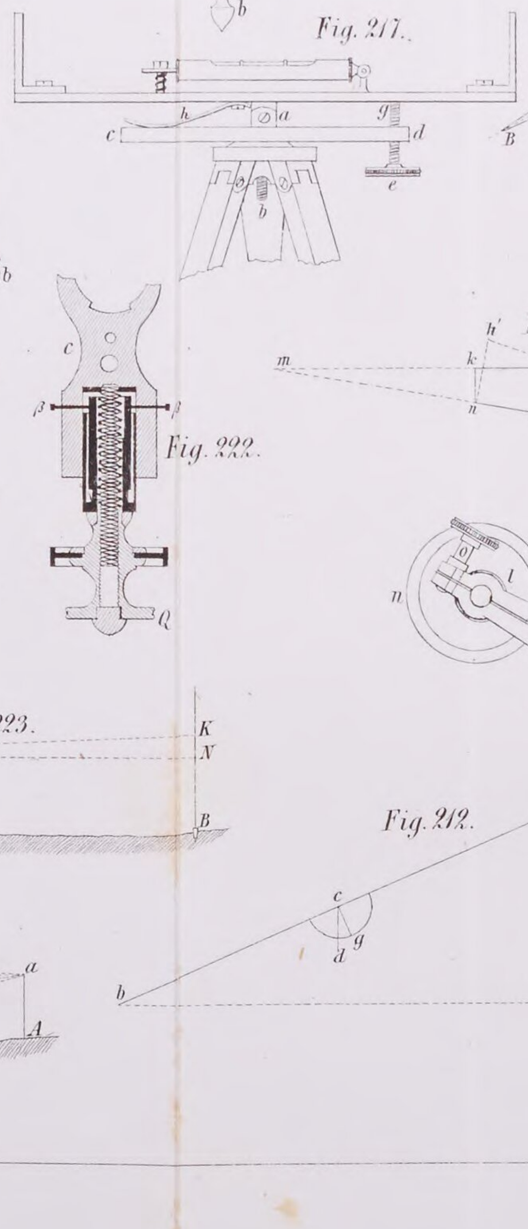


Fig. 218.

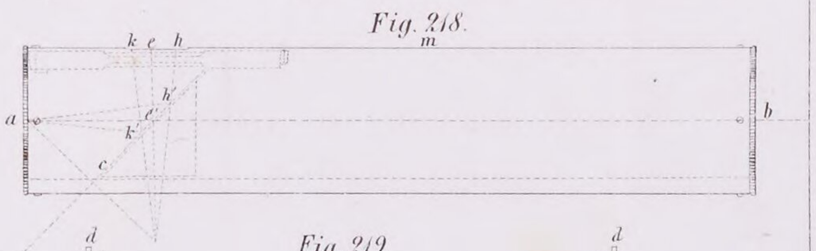


Fig. 219.

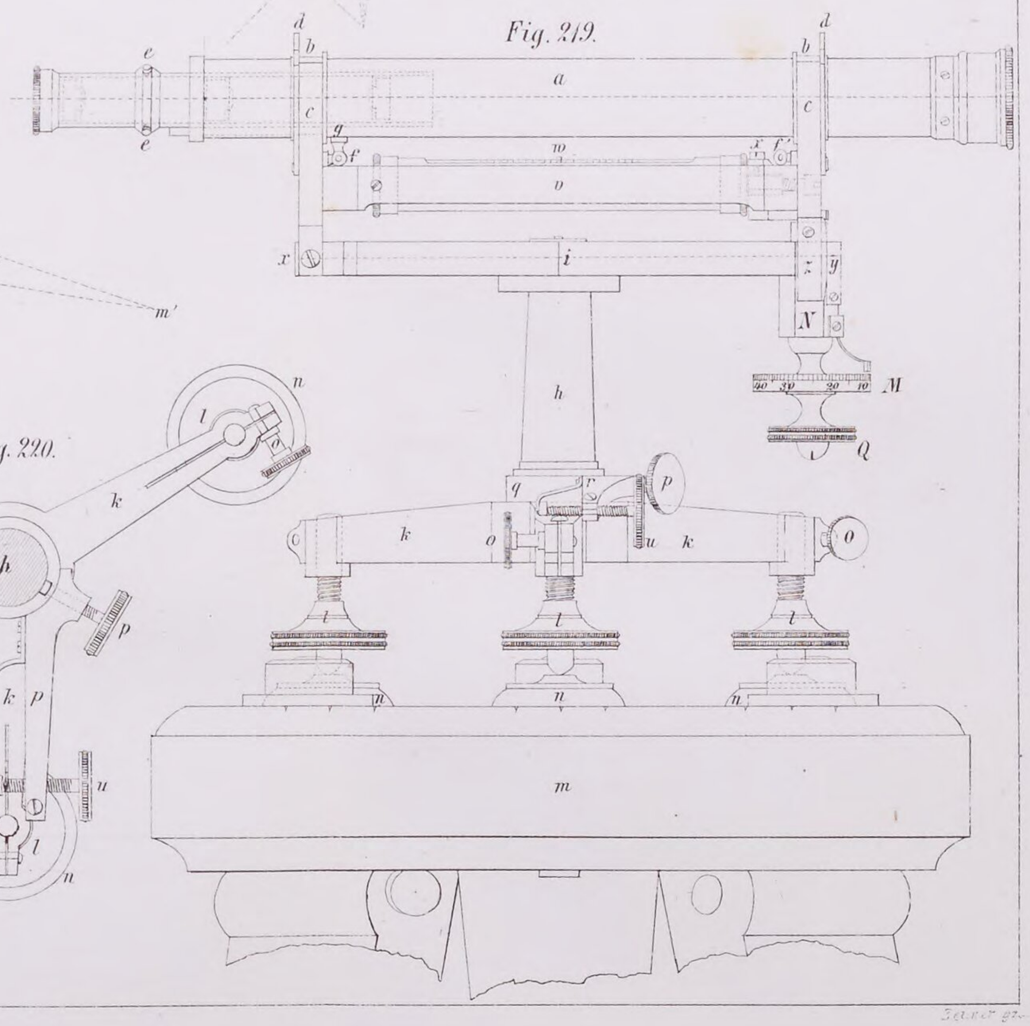


Fig. 215.

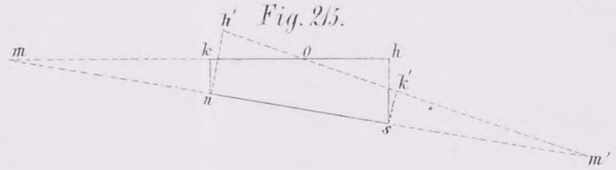


Fig. 220.

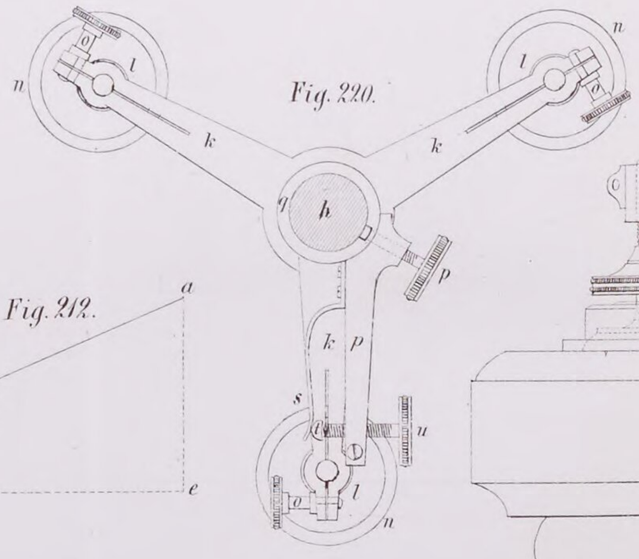


Fig. 221.

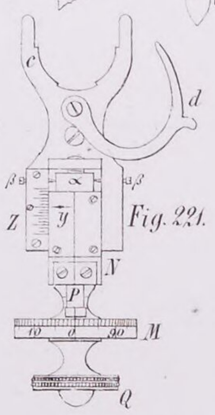


Fig. 222.

Fig. 223.

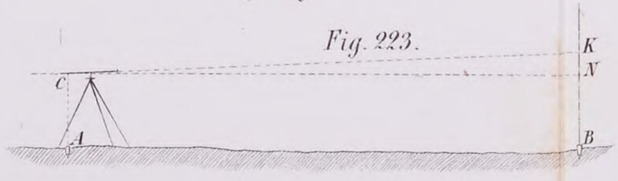


Fig. 212.

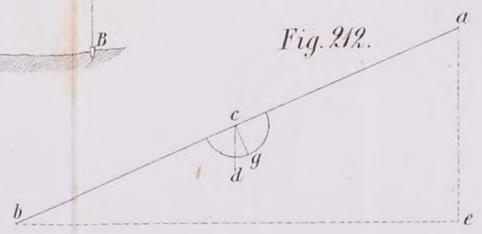
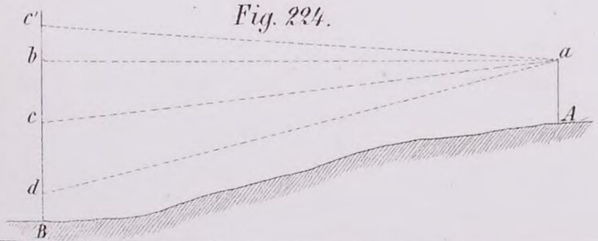


Fig. 224.



Lith. Anst. v. J.G. Back, Innsbruck

Fig. 238.

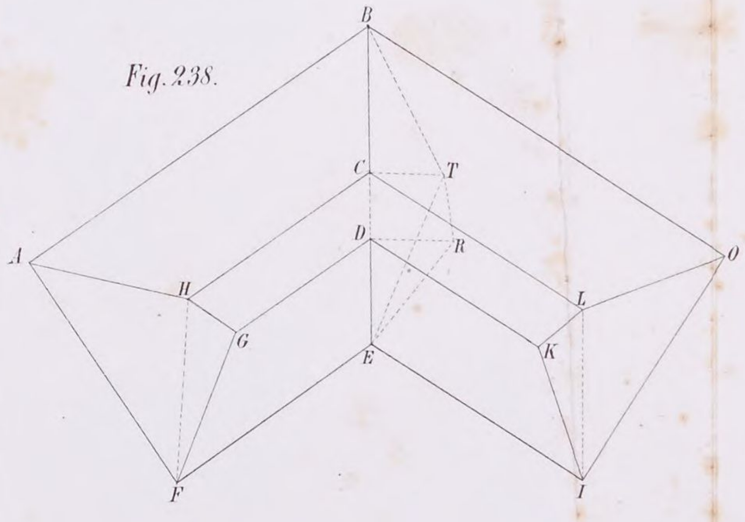


Fig. 239.

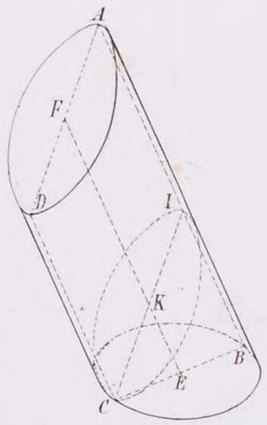


Fig. 240.

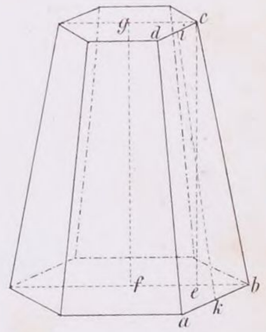


Fig. 244.

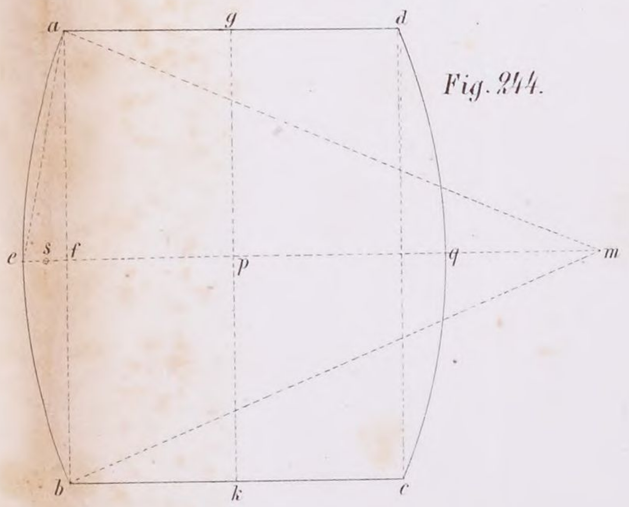


Fig. 241.

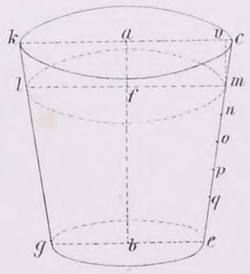


Fig. 242.

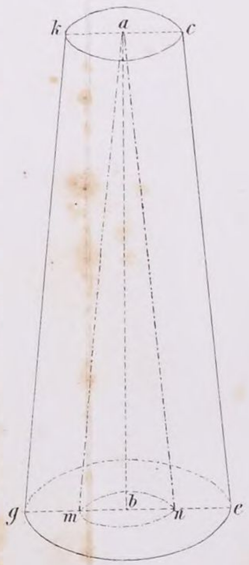


Fig. 243.

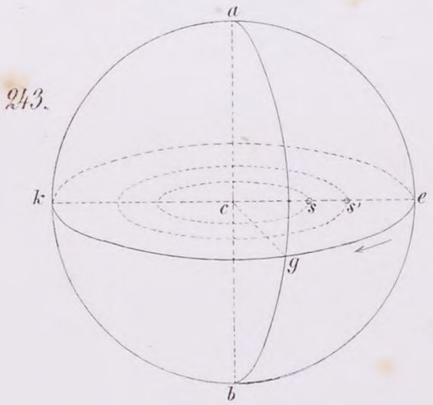


Fig. 246.

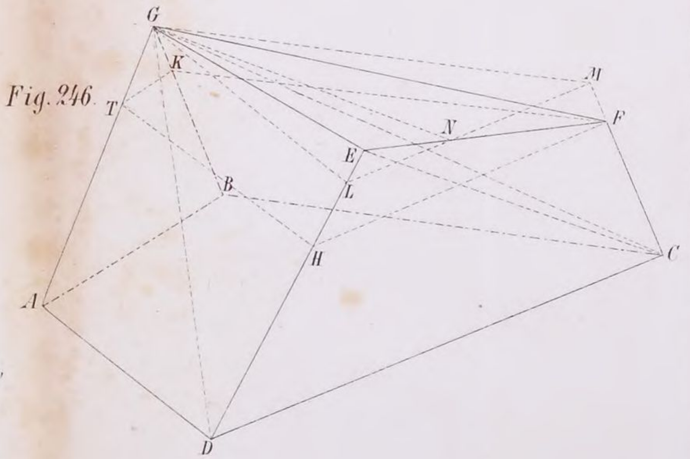


Fig. 245.

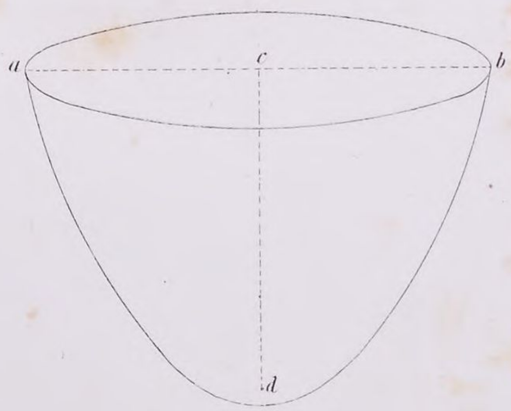


Fig. 247.

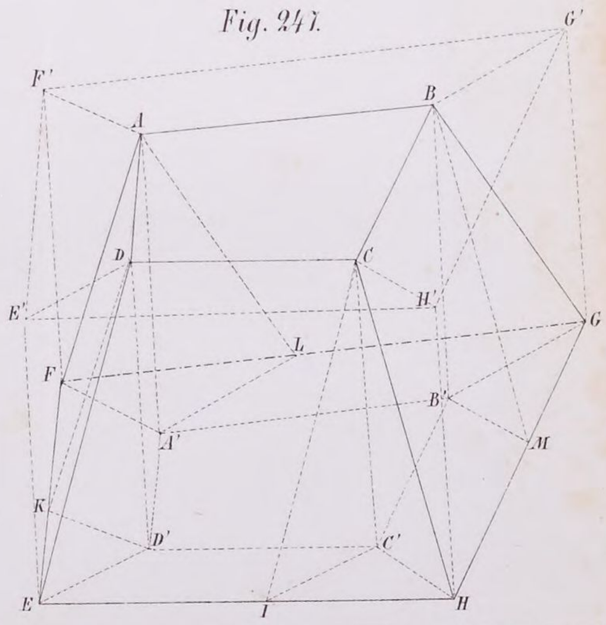
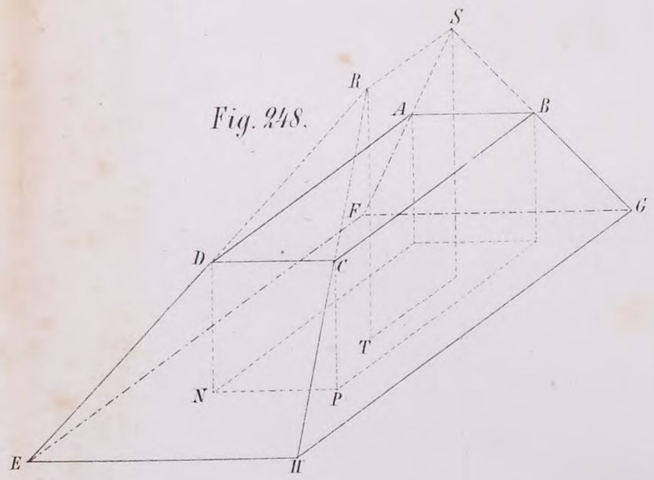


Fig. 248.



Lith. Anst. v. J. G. Bach Lpzg.

Bibliothek
Passau

Fig. 230.

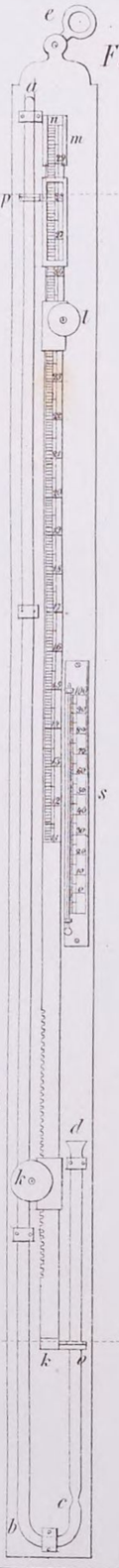


Fig. 232.

Fig. 231.

Fig. 229.

Fig. 225.

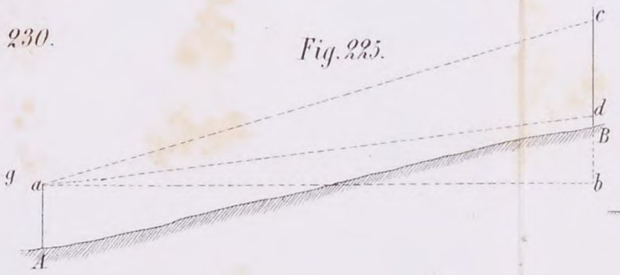


Fig. 226.

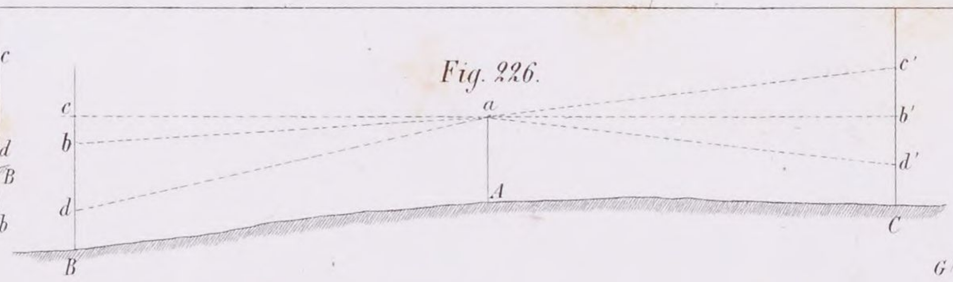


Fig. 228.

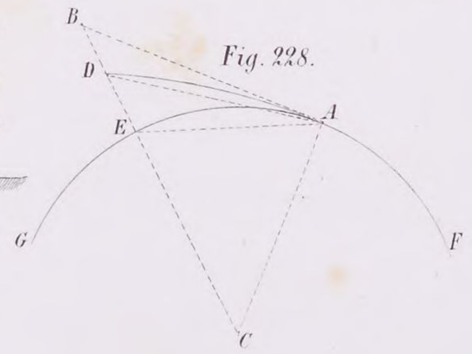


Fig. 227.

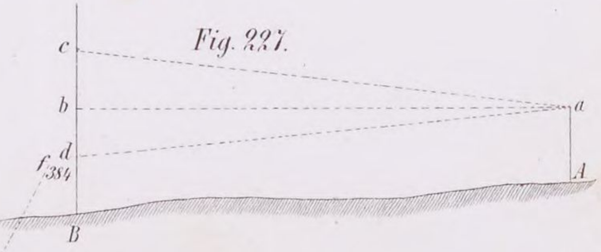


Fig. 235.

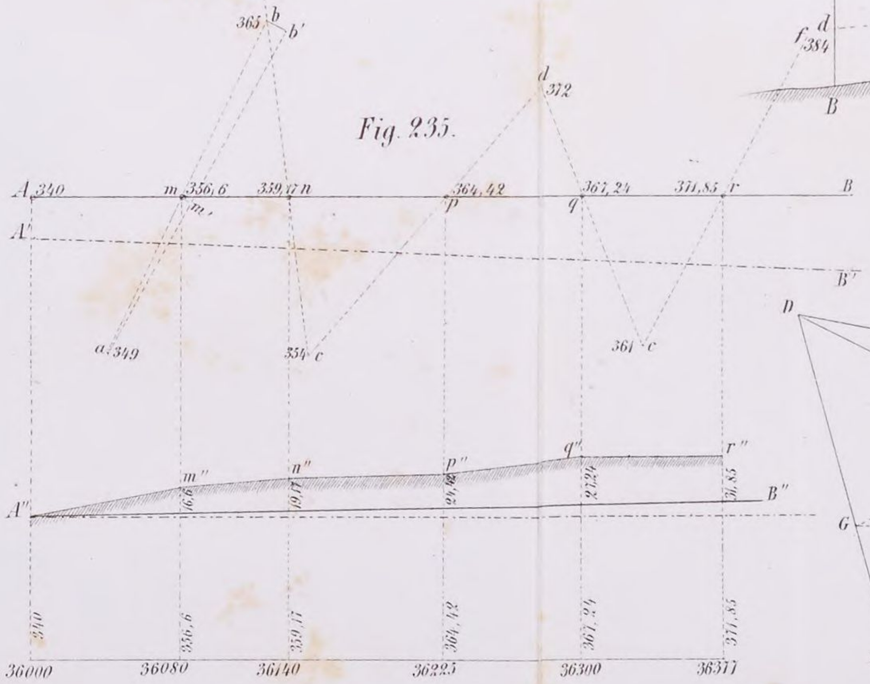


Fig. 236.

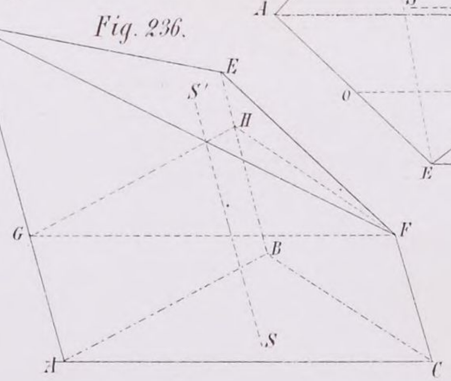


Fig. 233.

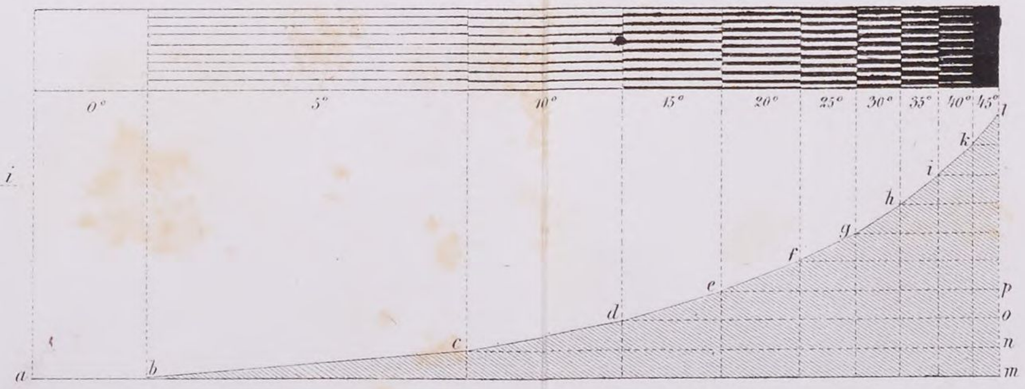


Fig. 231.

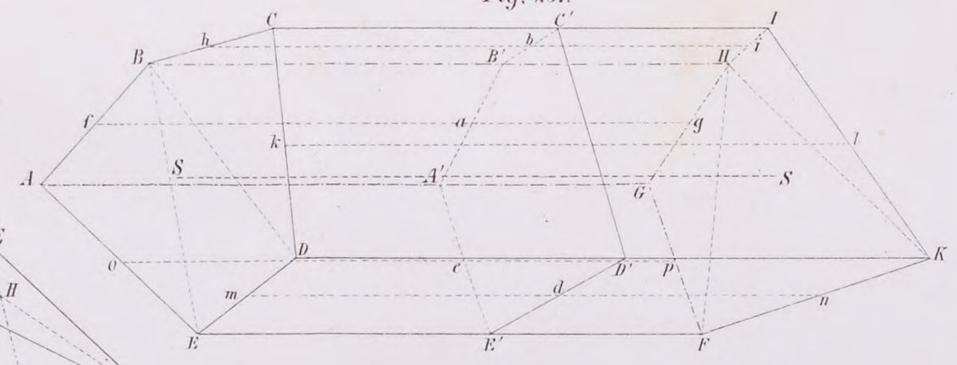
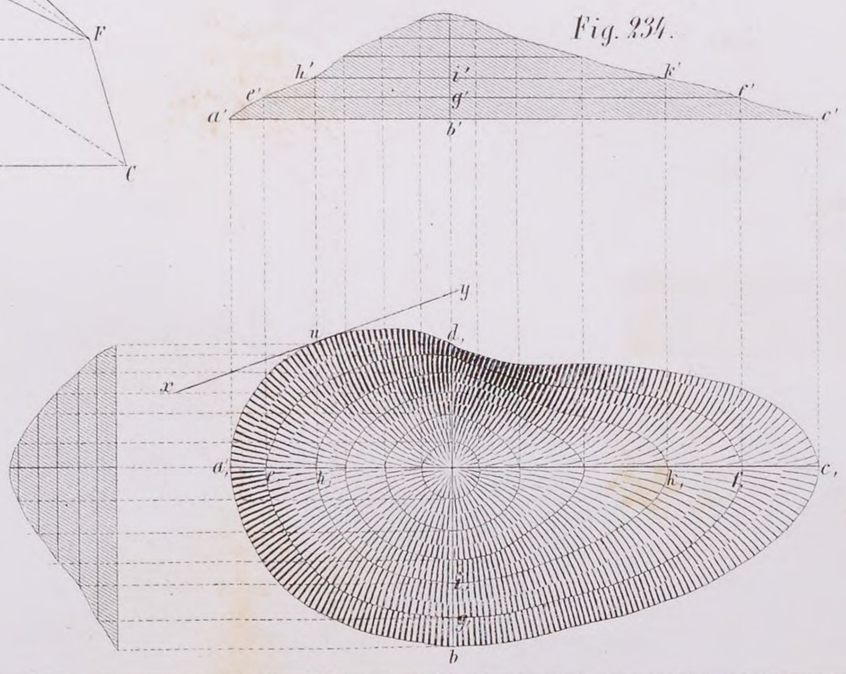


Fig. 234.



Lith. Anst. v. J. G. Bach in Leipzig.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bünau, Heinrich <<von>>,

Vorschule der praktischen Geometrie

Leipzig 1847
Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 743
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346371-5